

# 3차원 정적 집중하중을 받는 복합 탄성 케이블의 정적 해석

최윤락

울산대학교 조선해양공학부

## Analytic Investigation of Multi-Component Elastic Cables under 3-D Concentrated Static Loads

Yoon-Rak Choi

School of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Ulsan, Ulsan, Korea

**KEY WORDS:** Analytic solution 해석적 해, Static analysis 정적해석, Multi-component elastic cable 복합 탄성 케이블, Concentrated load 집중하중, Three-dimensional shape 3차원 형상

**ABSTRACT:** An elastic cable with piecewise constant properties under the action of concentrated static loads is studied analytically. Analytic solutions for catenary cables are combined at the discontinuous points caused by the discontinuous elastic properties or concentrated loads. The application of the boundary conditions at both ends of the multi-component cable results in three algebraic non-linear equations for three unknown parameters, which are determined numerically. The solutions for the shape, tension, elongation, and cross-sectional contraction of the cable are expressed in closed forms. Some examples are given for cases of two- and three-dimensional loads.

### 기 호

- $A_i$  : 비인장 상태 요소 케이블 i의 단면적
- $\tilde{A}$  : 인장 상태 케이블의 단면적
- $E_i$  : 요소 케이블 i의 영률
- $L$  : 비인장 상태 복합 케이블의 총길이
- $L_i$  : 비인장 상태 요소 케이블 i의 길이
- $l_i$  : 비인장 상태 요소 케이블 i의 무차원화된 길이
- $m_i$  : 비인장 상태 요소 케이블 i의 단위길이 당 질량
- $s$  : 비인장 상태 케이블의 원호길이
- $\tilde{s}$  : 인장 상태 케이블의 원호길이
- $T$  : 케이블 장력
- $W$  : 복합 케이블의 총 자중
- $\tilde{\alpha}$  : 변형에 의한 케이블 단면적 비
- $\beta_i$  : 요소 케이블 i의 Flexibility factor
- $\theta$  : 케이블 접선각
- $\nu_i$  : 요소 케이블 i의 포와송비
- $(\xi, \eta, \zeta)$  : 무차원화된 케이블 형상 좌표값

- $\rho_i$  : 요소 케이블 i의 무차원화된 단위길이 당 자중
- $\sigma$  : 비인장 상태 케이블의 무차원화된 원호길이
- $\tilde{\sigma}$  : 인장 상태 케이블의 무차원화된 원호길이
- $\tau$  : 무차원화된 케이블 장력
- $\varphi_{i-1}$  : 요소 케이블 i의 평면 투영선과 x축과의 사이각

### 1. 서 론

케이블 구조물은 장력만으로 하중을 지탱하는 케이블을 이용한 구조물로 건축, 토목, 조선해양 분야에 널리 사용되는 구조물 형식 중 하나이다(Irvine, 1981; Samset, 1985; Berteaux, 1976). 케이블 구조물은 설치 및 제거가 쉽고 강체구조물보다 비용이 저렴하다는 장점을 가진다. 그러나 케이블의 유연성으로 인해 하중에 대한 변위가 상대적으로 크고, 압축력에 저항 할 수 없으며, 허용 하중이 일반적인 강체구조물 보다 작다는 단점이 있다. 이러한 케이블 구조물의 해석을 위해서는 케이블 자중을 포함한 하중에 따른 형상해석이 필요하며, 케이블의 장력과 형상은 이 두 물리량의 상호작용에 의해 결정되는 비선형성이 강한 구조물이다. 케이블 자중에 의한 장력 및 형상은 현수선방정식

Received 16 May 2014, revised 17 June 2014, accepted 17 June 2014

Corresponding author Yoon-Rak Choi: +82-52-259-2158, yrchoi@ulsan.ac.kr

© 2014, The Korean Society of Ocean Engineers

It is noted that this paper is revised edition based on proceedings of KAOST 2014 in Busan.

으로 표현되며 Irvine(1981)과 Berteaux(1976) 등의 서적에 상세히 설명되어있다.

자중 뿐 만 아니라 집중하중이 부과된 케이블 문제의 경우, Irvine and Sinclair(1976)는 2차원 균일 탄성 케이블에 수직집중하중이 가해진 문제에 대하여 해석하였고, Sinclair and Hodder (1981)은 앞의 해석법을 케이블 네트워크의 해석에 적용하였다. Simith and MacFarlane(2001)은 수중에서 터치다운 포인트를 가지며 두 개의 상이한 케이블들로 구성된 복합 계류케이블에 하나의 부이 또는 싱커가 부착된 경우에 대하여 해를 다항식으로 변환하여 해석하였다. 수직 집중하중 뿐 만 아니라 수평 집중하중도 고려하게 되면 케이블 형상은 3차원 공간에서 해석하여야 하는데 균일 탄성 케이블에 대해서는 Peyrot and Goulois(1979), Such et al.(2009), Impollonia et al.(2011) 등의 연구결과가 있다.

본 연구에서는 상이한 물성을 갖는 요소 케이블들로 구성된 하나의 양단 고정 복합 케이블(Multi-component cable)에 3차원 정적 집중하중들이 작용하는 경우에 대하여 해석하였다. 케이블의 형상, 장력, 인장변형 그리고 단면의 수축변형에 대한 해들을 해석적으로 표현하였다. 그리고 몇 가지의 경우에 대한 적용 예를 수록하였다.

## 2. 문제의 가정 및 요소 케이블의 해

하나의 복합 케이블은 물성이 다른  $n+1$ 개의 요소 케이블들로 연결 구성되었으며 각 요소 케이블들 간의 접합점인  $n$ 개의 절점에 3차원 집중하중이 작용한다고 가정한다. 그리고 절점  $i=0$  과  $i=n+1$ 은 복합 케이블의 양 끝단으로 고정되어 있다고 가정한다.

먼저 Fig. 1과 같이 절점  $i-1$ 과 절점  $i$ 사이의 요소 케이블  $i$ 에 대해 살펴보면, 힘의 평형 방정식은 식 (1)이며 인장변형 방정식은 식 (2)로 표현된다. 그림에서 양의  $z$ 축 방향은 연직상방이다.

$$\frac{d}{ds}(T\cos\theta) = 0, \quad \frac{d}{ds}(T\sin\theta) = m_i g \quad \text{for } s_{i-1} \leq s \leq s_i \quad (1)$$

$$d\tilde{s} = \left(1 + \frac{T}{E_i A_i}\right) ds \quad \text{for } s_{i-1} \leq s \leq s_i \quad (2)$$

여기서  $s$ 는 비인장 상태의 케이블 원호길이이고,  $T$ 는 케이블 장력,  $\theta$ 는 케이블 접선과 수평면이 이루는 각도,  $m_i$ ,  $E_i$  그리고  $A_i$ 는 각각 비인장 상태 요소 케이블  $i$ 의 단위 길이 당 질량, 영률(Young's modulus) 그리고 단면적이다.  $\tilde{s}$ 는 인장 변형이 일어난 상태에서의 케이블 원호길이이다. 그림에서  $\varphi_{i-1}$ 는 케이블 형상을 수평면인  $x-y$ 평면에 투영한 직선과 양의  $x$ 축과의 사이 각이다.

한편 장력에 의한 케이블  $i$ 의 수축된 단면적  $\tilde{A}$ 는 식 (3)과 같다.

$$\frac{\tilde{A}}{A_i} = \frac{1}{1 + \frac{T}{E_i A_i}} \left\{ 1 + (1 - 2\nu_i) \frac{T}{E_i A_i} \right\} \quad \text{for } s_{i-1} \leq s \leq s_i \quad (3)$$

여기서  $\nu_i$ 는 포와송비(Poisson's ratio)이다.

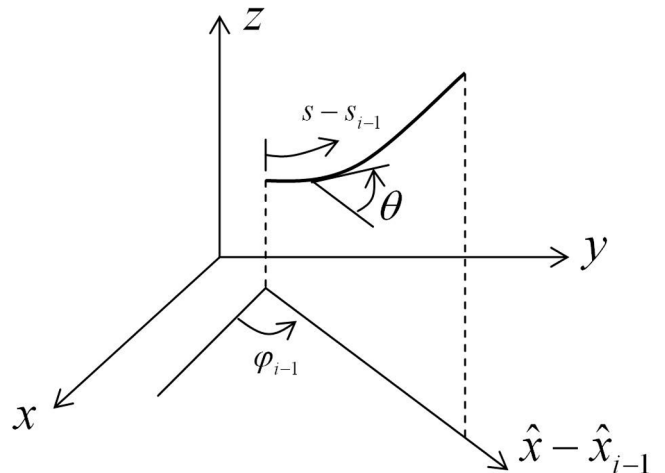


Fig. 1 Catenary cable element

해석의 편의를 위해 다음과 같은 무차원화 된 값들을 도입한다.

$$(\xi, \eta, \zeta) = \left( \frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L} \right), \quad \sigma = \frac{s}{L}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{s}}{L}, \quad \tau = \frac{T}{W}, \quad (4)$$

$$\beta_i = \frac{W}{E_i A_i}, \quad \rho_i = \frac{m_i g L}{W}, \quad l_i = \frac{L_i}{L}$$

여기서  $L$ 과  $W$ 는 각각 비인장 상태 복합 케이블의 총 길이와 총 자중이며  $L_i$ 는 요소 케이블  $i$ 의 길이이다.

$$L = \sum_{i=1}^{n+1} L_i, \quad W = \sum_{i=1}^{n+1} m_i g L_i \quad (5)$$

이러한 무차원화 된 값들을 사용하여 식 (1)과 (2)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\sigma}(\tau \cos\theta) = 0, \quad \frac{d}{d\sigma}(\tau \sin\theta) = \rho_i \quad \text{for } \sigma_{i-1} \leq \sigma \leq \sigma_i \quad (6)$$

$$d\tilde{\sigma} = (1 + \beta_i \tau) d\sigma \quad \text{for } \sigma_{i-1} \leq \sigma \leq \sigma_i \quad (7)$$

기하학적 적합조건은 다음 식으로 표현 된다.

$$\frac{d\xi}{d\tilde{\sigma}} = \cos\theta, \quad \frac{d\zeta}{d\tilde{\sigma}} = \sin\theta \quad (8)$$

식 (6)-(8)의 해는 잘 알려진 탄성 요소 케이블  $i$ 에 대한 현수선 방정식으로 다음 식들로 표현된다.

$$\begin{aligned} \xi - \xi_{i-1} &= \beta_i \tau_{i-1}^+ \cos\theta_{i-1}^+ (\sigma - \sigma_{i-1}) + \frac{\tau_{i-1}^+ \cos\theta_{i-1}^+}{\rho_i} \\ &\times \ln \left[ \frac{\sin\theta_{i-1}^+ + \frac{1}{\sec\theta_{i-1}^+ + \tan\theta_{i-1}^+}}{1 + \sin\theta_{i-1}^+ + \frac{1}{\sec\theta_{i-1}^+ + \tan\theta_{i-1}^+}} \right. \\ &\left. \times \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})}{\tau_{i-1}^+ \cos\theta_{i-1}^+ + \tan\theta_{i-1}^+} \right)^2} + \frac{\rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})}{\tau_{i-1}^+ \cos\theta_{i-1}^+} \right) \right] \\ &= \beta_i \frac{\tau_{i-1}^+ \cos^2\theta_{i-1}^+}{\rho_i} (\tan\theta - \tan\theta_{i-1}^+) \\ &+ \frac{\tau_{i-1}^+ \cos\theta_{i-1}^+}{\rho_i} \ln \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta_{i-1}^+ + \tan\theta_{i-1}^+} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \zeta - \zeta_{i-1} &= \beta_i \tau_{i-1}^+ \sin \theta_{i-1}^+ (\sigma - \sigma_{i-1}) + \frac{\beta_i}{2} \rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})^2 + \frac{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+}{\rho_i} \\ &\times \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})}{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+} + \tan \theta_{i-1}^+ \right)^2} - \frac{1}{\cos \theta_{i-1}^+} \right] \\ &= \frac{\beta_i}{2} \frac{\tau_{i-1}^+ \cos^2 \theta_{i-1}^+}{\rho_i} \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta_{i-1}^+} \right) \\ &+ \frac{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+}{\rho_i} \left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta_{i-1}^+} \right) \\ &= \frac{\beta_i}{2} \frac{\tau^2 - \tau_{i-1}^2}{\rho_i} + \frac{\tau - \tau_{i-1}^+}{\rho_i} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tau = \frac{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+}{\cos \theta} = \tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+ \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})}{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+} + \tan \theta_{i-1}^+ \right)^2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_{i-1} &= \sigma - \sigma_{i-1} + \frac{\beta_i}{2} \tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+ \\ &\times \left[ \begin{aligned} &(\sigma - \sigma_{i-1}) \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})}{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+} + \tan \theta_{i-1}^+ \right)^2} \\ &+ \frac{\tau_{i-1}^+ \sin \theta_{i-1}^+}{\rho_i} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})}{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+} + \tan \theta_{i-1}^+ \right)^2} - \frac{1}{\cos \theta_{i-1}^+} \right) \\ &+ \frac{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+}{\rho_i} \ln \left( \frac{\sin \theta_{i-1}^+}{1 + \sin \theta_{i-1}^+} + \frac{1}{\sec \theta_{i-1}^+ + \tan \theta_{i-1}^+} \right) \\ &\times \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})}{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+} + \tan \theta_{i-1}^+ \right)^2} \right. \\ &\left. + \frac{\rho_i (\sigma - \sigma_{i-1})}{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+} \right\} \end{aligned} \right] \\ &= \frac{\tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+}{\rho_i} (\tan \theta - \tan \theta_{i-1}^+) + \frac{\beta_i}{2} \frac{\tau_{i-1}^+ \cos^2 \theta_{i-1}^+}{\rho_i} \\ &\times \left( \frac{\tan \theta}{\cos \theta} - \frac{\tan \theta_{i-1}^+}{\cos \theta_{i-1}^+} + \ln \frac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta_{i-1}^+ + \tan \theta_{i-1}^+} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

이 식들에서 밑 침자와 윗 침자가 함께 사용된  $\tau_{i-1}^+$ 와  $\theta_{i-1}^+$ 는 각각 요소 케이블  $i$ 의 시작점인 절점  $\sigma = \sigma_{i-1}$ 에서의  $\tau$ 와  $\theta$  값이다. 앞서 언급했듯이 위의 해들은 요소 케이블  $i$ 에 대해서 적용해야 하므로  $\sigma$ 의 범위는  $\sigma_{i-1} \leq \sigma \leq \sigma_i$ 이고  $i=1 \sim n+1$ 이다.

식 (3)의 단면적비  $\tilde{\alpha}$ 는 다음 식과 같다.

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{A}}{A_i} = \frac{1}{1 + \beta_i \tau} \{1 + (1 - 2\nu_i) \beta_i \tau\} \quad (13)$$

식 (9)-(13)로 표현된 해들에서 Flexibility factor인  $\beta_i$ 가 0인 경우는 비인장성 케이블(Inextensible cable)에 대한 해이다.

### 3. 절점에서의 접합조건

절점  $i$ 에 복합 케이블 총 자중  $W$ 로 무차원화 된 3차원 정적 하중  $\psi_{\xi_i}$ ,  $\psi_{\eta_i}$ ,  $\psi_{\zeta_i}$ 가 작용하면, 요소 케이블  $i$ 와  $i+1$ 의 장력들과 외력의 평형에 따라 다음과 같은 방정식을 얻게 된다.

$$\tau_i^+ \cos \theta_i^+ \cos \varphi_i = \tau_i^- \cos \theta_i^- \cos \varphi_{i-1} - \psi_{\xi_i} \quad (14)$$

$$\tau_i^+ \cos \theta_i^+ \sin \varphi_i = \tau_i^- \cos \theta_i^- \sin \varphi_{i-1} - \psi_{\eta_i} \quad (15)$$

$$\tau_{i+1}^- \sin \theta_{i+1}^- = \tau_i^- \sin \theta_i^- - \psi_{\zeta_i} \quad (16)$$

여기서  $i=1 \sim n$ 이며, 좌변의 아래 위 침자 항들은 요소 케이블  $i+1$ 의 시작점에서의 값들이고 우변의 아래 위 침자 항들은 요소 케이블  $i$ 의 끝점에서의 값들이다. 식 (14)-(16)은 집중하중에 의한 절점에서의 장력  $\tau$ ,  $\theta$ , 그리고  $\varphi$ 의 불연속성을 나타낸다. 식 (6)의 해인

$$\tau_i^- \cos \theta_i^- = \tau_{i-1}^+ \cos \theta_{i-1}^+ \quad \text{for } i=1 \sim n+1 \quad (17)$$

$$\tau_i^- \sin \theta_i^- = \tau_{i-1}^+ \sin \theta_{i-1}^+ + \rho_i l_i \quad \text{for } i=1 \sim n+1 \quad (18)$$

의 관계식들과 식 (14)-(16)을 결합하면 임의 절점 및 복합 케이블 끝점에서의 장력  $\tau$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  값을 시작점에서의 값들로 표현할 수 있다.

$$\tau_{i+1}^- \cos \theta_{i+1}^- \cos \varphi_i = \tau_i^+ \cos \theta_i^+ \cos \varphi_i = \tau_0^+ \cos \theta_0^+ \cos \varphi_0 - \sum_{j=1}^i \psi_{\xi_j} \quad (19)$$

$$\tau_{i+1}^- \cos \theta_{i+1}^- \sin \varphi_i = \tau_i^+ \cos \theta_i^+ \sin \varphi_i = \tau_0^+ \cos \theta_0^+ \sin \varphi_0 - \sum_{j=1}^i \psi_{\eta_j} \quad (20)$$

$$\tau_{i+1}^- \sin \theta_{i+1}^- = \tau_0^+ \sin \theta_0^+ + \sum_{j=1}^{i+1} \rho_j l_j - \sum_{j=1}^i \psi_{\zeta_j} \quad (21)$$

$$\tau_i^+ \sin \theta_i^+ = \tau_0^+ \sin \theta_0^+ + \sum_{j=1}^i \rho_j l_j - \sum_{j=1}^i \psi_{\zeta_j} \quad (22)$$

위의 식들에서  $i=1 \sim n$  이고, 특히  $\tau_{n+1}^-$ ,  $\theta_{n+1}^-$ ,  $\varphi_n$ 은 복합 케이블 끝점에서의 값들을 의미한다. 그리고 시작점으로 부터 첫 번째 요소 케이블에서는 다음의 관계식을 가진다.

$$\tau_1^- \cos \theta_1^- \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \end{pmatrix} = \tau_0^+ \cos \theta_0^+ \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\tau_1^- \sin \theta_1^- = \tau_0^+ \sin \theta_0^+ + \rho_1 l_1 \quad (24)$$

식 (19)-(24)를 사용하면 절점  $i$ 에서의  $\tau_i^+$ ,  $\theta_i^+$ ,  $\varphi_i$ 의 값들과 복합 케이블 끝점인  $i=n+1$ 의  $\tau_{n+1}^-$ ,  $\theta_{n+1}^-$ ,  $\varphi_n$ 의 값들을 시작점에서의 값들인  $\tau_0^+$ ,  $\theta_0^+$ ,  $\varphi_0$ 로 표현할 수 있다.

한편 절점에서 형상의 연속성을 사용하면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$\xi_i - \xi_0 = \sum_{j=1}^i (\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_{j-1}) \cos \varphi_{j-1} \quad (25)$$

$$\eta_i - \eta_0 = \sum_{j=1}^i (\hat{\xi}_j - \hat{\xi}_{j-1}) \sin \varphi_{j-1} \quad (26)$$

$$\zeta_i - \zeta_0 = \sum_{j=1}^i (\zeta_j - \zeta_{j-1}) \quad (27)$$

여기서  $i=1 \sim n+1$ 이며,  $\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_{i-1}$ 과  $\zeta_i - \zeta_{i-1}$ 은 식 (9)와 (10)으로부터 구할 수 있고 이 역시  $\tau_0^+$ ,  $\theta_0^+$ ,  $\varphi_0$ 로 표현된다.

### 4. 형상 및 물리량들의 결정

복합 케이블의 양 끝단의 위치가 주어져 있으므로  $\xi_{n+1} - \xi_0$ ,

$\eta_{n+1} - \eta_0, \zeta_{n+1} - \zeta_0$ 는 기지의 값들이며, 이 값들을 식 (25)-(27)에 대입하면  $\tau_0^+, \theta_0^+, \varphi_0$ 로 표현되는 세 개의 식을 얻게 된다. 따라서 3개의 연립 비선형 대수방정식의 해로서  $\tau_0^+, \theta_0^+, \varphi_0$ 를 구할 수 있다. 본 연구에서는 연립 비선형 대수방정식의 수치해법 중 하나인 Broyden 방법을 사용하였다(Press et al., 1992).

세 개의 미지 값( $\tau_0^+, \theta_0^+, \varphi_0$ )이 결정되면 식 (19)-(24)에 의해 모든 절점에서의  $\tau_i^+, \theta_i^+, \varphi_i$ 이 결정되며, 요소 케이블 형상의 해석적 해인 식 (9)와 (10)을 사용하면 복합 케이블 전체에 대한 형상이  $\sigma$ 의 함수로 표현된다.

$$\xi - \xi_0 = (\hat{\xi} - \hat{\xi}_{i-1}) \cos \varphi_{i-1} + (\xi_{i-1} - \xi_0) \tag{28}$$

$$\eta - \eta_0 = (\hat{\xi} - \hat{\xi}_{i-1}) \sin \varphi_{i-1} + (\eta_{i-1} - \eta_0) \tag{29}$$

$$\zeta - \zeta_0 = \zeta - \zeta_{i-1} + (\zeta_{i-1} - \zeta_0) \tag{30}$$

여기서  $i=1 \sim n+1$  이며, 식들의 우변 마지막 항 값들은 식 (25)-(27)을 사용하여 구할 수 있다. 인장된 케이블의 길이 또한 절점에서의 연속성을 고려하면 이와 유사하게 결정할 수 있다.

장력  $\tau$ 는 식 (11)로 표현되며, 이로 부터 단면적비  $\tilde{\alpha}$ 도 식 (13)으로 결정된다.

### 5. 적용 예

해석법의 유효성을 검증하기 위해 Irvine and Sincliar(1976)에 나와 있는 2차원 문제에 대한 실험치와 비교하였다. 상기 문헌에는 균일한 탄성 케이블의 한 지점에 수직 집중하중을 가했을 때의 실험결과가 나와 있는데, 집중하중 작용지점은  $\sigma_1 = 0.275$  이고 케이블의 Flexibility factor  $\beta$ 는  $3.16 \times 10^{-4}$ 이다. 그리고 집중하중은  $\psi_{c1} = 0.0, 0.196, 0.392$ 의 3가지 경우로 하였고 케이블 양 끝단 좌표값은  $\xi_2 - \xi_0 = 0.8333, \zeta_2 - \zeta_0 = 0.0$  이다. 집중하중 작용점의 수평 및 수직방향 좌표값( $\xi_1 - \xi_0, \zeta_1 - \zeta_0$ )을 Table 1에 정리하였다. 표에서 보듯이 실험치와 본 해석법에 의한 결과치가 잘 일치하여 본 해석법이 유효함을 알 수 있다.

Table 2의 제원을 가지는 복합 케이블에 집중하중이 작용하지 않을 때의 2차원 문제에 대하여 해석을 수행하였다. 표에서 보듯이 4가지 경우 모두 3개의 요소 케이블로 구성되어 있는데, 각 요소 케이블의 길이는 전체 길이의 1/3로 모두 동일하다. CASE 1의 중앙부분 요소 케이블( $i=2$ )은 양쪽 끝단 요소 케이블( $i=1,3$ )에 비해 중량이 절반이고  $\beta$ 값은 두 배이다. CASE 2는

**Table 1** Comparison between the results of experiment and present study

$\psi_{c1}$	$\xi_1 - \xi_0$		$\zeta_1 - \zeta_0$	
	Exp.	Present study	Exp.	Present study
0.000	0.208	0.203	-0.189	-0.184
0.196	0.193	0.187	-0.208	-0.201
0.392	0.182	0.176	-0.215	-0.211

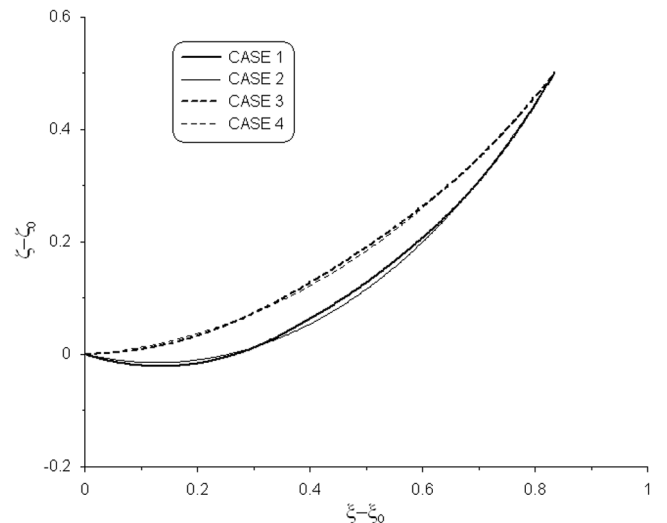
실질적으로 균일한 케이블로서  $\beta$ 는 CASE 1 재질의 등가 균일 값인 0.06으로 가정하였다. 인장성 케이블에 대한 본 연구의 적용성을 살펴보기 위해 사용된  $\beta$ 값들은 통상적인 값보다 상당히 큰 값이다. CASE 3과 4는 각각 CASE 1과 2를 비인장성 재질로 가정한 것이다. CASE 1~4 모두  $\xi_3 - \xi_0 = 0.8333, \zeta_3 - \zeta_0 = 0.5$ 의 조건을 부과하였다.

Fig. 2에 복합 케이블들의 형상을 도시하였다. 불균일한 케이블인 CASE 1 및 3과 균일한 케이블인 CASE 2 및 4를 비교해 보면 무거운 요소 케이블 부분이 더 처지고 가벼운 부분은 덜 처짐을 알 수 있다. 주어진  $\beta$ 값들에 대해 CASE 1과 2 모두 전체길이의 약 4.18%가 인장되는 것으로 계산되었다.

집중하중에 의한 영향을 살펴보기 위해 CASE 1~4의 절점들에 복합 케이블 자중의 20%에 해당하는 수직 상방 하중  $\psi_{c1} = \psi_{c2} = 0.2$ 를 부과하여 각각 CASE 5~8로 설정하였다. Fig. 3의 결과를 보면 절점에서 집중하중에 의해 형상이 꺾임을 확인할 수 있다. CASE 5와 6에서 인장률은 각각 2.35%와 2.40%

**Table 2** Specific values of multi-component cable cases 1~4

	$i$	$l$	$\rho l$	$\beta$	$\nu$
CASE 1	1	0.3333	0.4	0.05	0.3
	2	0.3334	0.2	0.10	0.3
	3	0.3333	0.4	0.05	0.3
CASE 2	1	0.3333	0.3333	0.06	0.3
	2	0.3334	0.3334	0.06	0.3
	3	0.3333	0.3333	0.06	0.3
CASE 3	1	0.3333	0.4	0.0	0.0
	2	0.3334	0.2	0.0	0.0
	3	0.3333	0.4	0.0	0.0
CASE 4	1	0.3333	0.3333	0.0	0.0
	2	0.3334	0.3334	0.0	0.0
	3	0.3333	0.3333	0.0	0.0



**Fig. 2** Shapes of multi-component cables w/o concentrated forces.

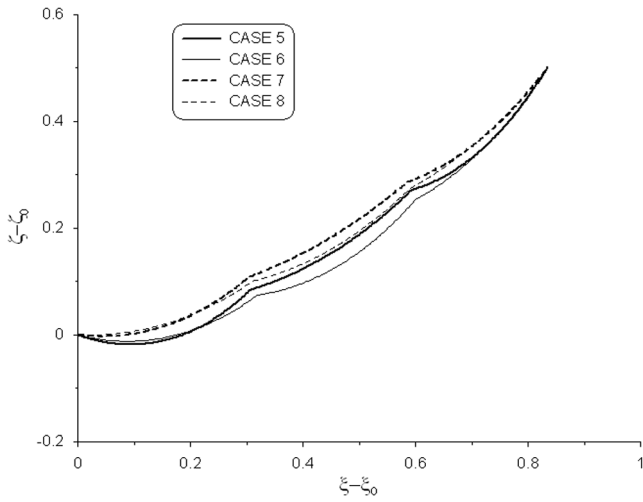


Fig. 3 Shapes of multi-component cables under the concentrated vertical forces

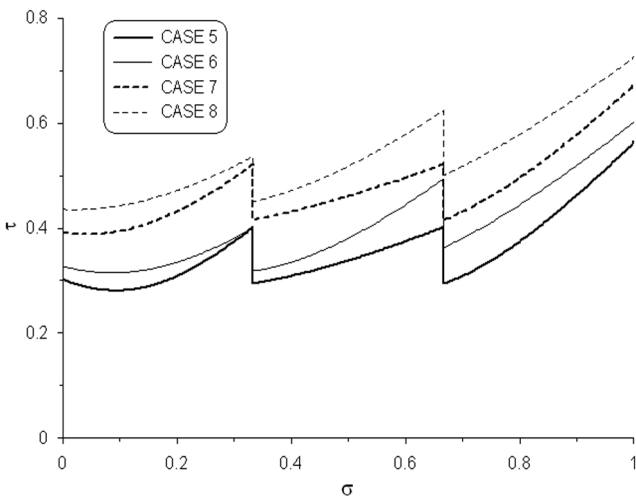


Fig. 4 Tensions of multi-component cables under the concentrated vertical forces

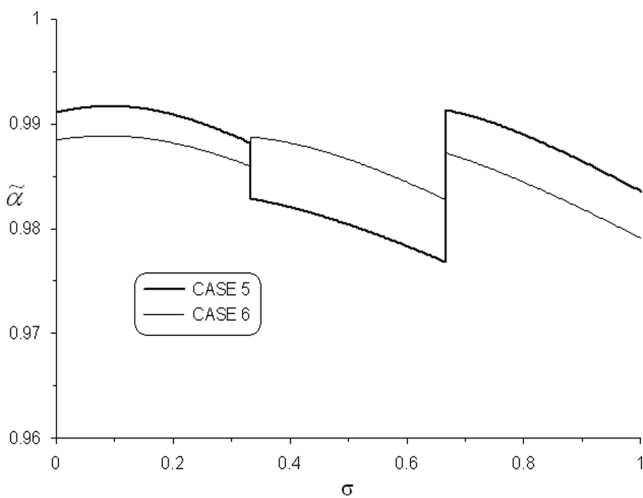


Fig. 5 Cross-sectional area ratios under the concentrated vertical forces

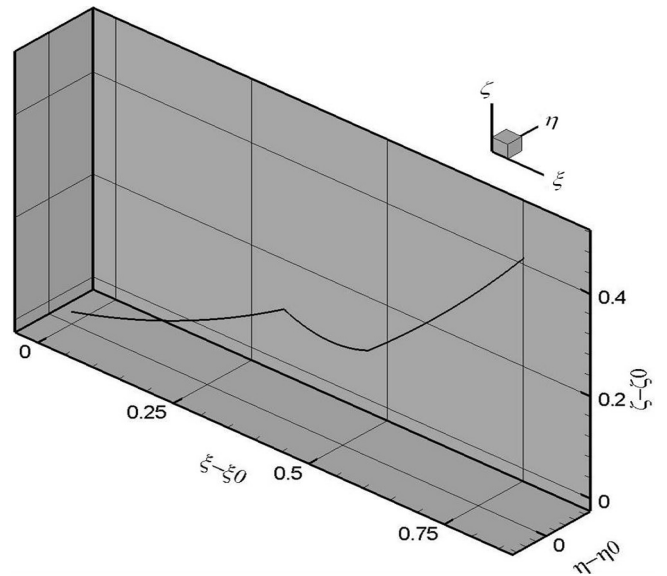


Fig. 6 Shape of the multi-component cable under the 3-D concentrated forces

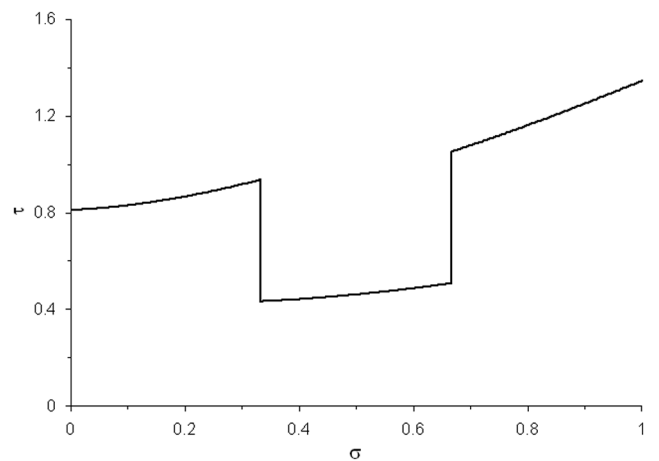


Fig. 7 Tension of the multi-component cable under the 3-D concentrated forces

이다. Fig. 4에 장력의 분포를 도시하였는데 집중 하중에 의한 장력의 불연속 현상을 볼 수 있다. 또한 비인장 경우인 CASE 7과 8에 비해 인장변형을 고려한 CASE 5와 6의 장력이 작음을 알 수 있다. 단면적비  $\tilde{\alpha}$ 의 결과는 Fig. 5에 수록하였다.

3차원 집중하중에 대한 해석 예로써 Table 2의 CASE 1에  $\vec{\psi}_1 = (0.4, 0.4, 0.4)$ 와  $\vec{\psi}_2 = (-0.4, -0.4, -0.4)$ 이 작용하였을 때의 3차원 형상을 Fig. 6에 도시하였다. 이때 양 끝단 조건은  $\xi_3 - \xi_0 = 0.8333$ ,  $\eta_3 - \eta_0 = 0.0$ ,  $\zeta_3 - \zeta_0 = 0.5$ 이다. 그림에서 보듯이 3차원 공간의 두 절점에서 꺾인 형상을 볼 수 있으며, 인장률은 4.97%이다. Fig. 7에는 장력을 도시하였다.

## 6. 결 론

물성이 다른 요소 케이블들로 구성된 복합 케이블에 3차원

정적 집중하중이 작용하였을 때의 해석법을 개발하였다. 인장 변형을 고려한 요소 케이블에 대한 해석적 해들을 바탕으로 절점 작용하중과 장력과 힘의 평형조건을 사용하여 복합 케이블의 해석적 해를 케이블 시작점에서의 세 개의 미지 값으로 표현하였다. 이러한 미지 값들은 경계조건인 복합 케이블 양 끝단 위치조건에 의해 결정된다. 이 값들을 사용하면 복합 케이블의 형상, 장력 분포, 인장 변형, 케이블 단면적 변형비 등을 해석적으로 구할 수 있다.

해석 예로써 2차원 평면에서 수직방향 집중하중이 작용하는 경우에 대하여 해석하였고 균일 케이블에 대한 결과와 비교하였다. 그리고 3차원 집중하중에 대한 해석 예도 제시하였다.

본 연구결과를 수중 복합 케이블에 적용하기 위해서는 케이블들의 자중을 수중 부력을 고려한 수중에서의 자중으로 대체하면 되며, 이 때 구해지는 장력은 유효 장력(Effective tension)으로 해석하면 된다.

## References

- Berteaux, H.O., 1976. Buoy Engineering. Wiley, New York.
- Impollonia, N., Ricciardi, G., Saitta, F., 2011. Statics of Elastic Cables under 3D Point Forces. International Journal of Solids and Structures, 48(9), 1268-1276.
- Irvine, H.M., Sinclair, G.B., 1976. The Suspended Elastic Cable under the Action of Concentrated Vertical Loads. International Journal of Solids and Structures, 12(4), 309-317.
- Irvine, H.M., 1981. Cable Structures, MIT Press, Cambridge.
- Peyrot, A.H., Goulois, A.M., 1979. Analysis of Cable Structures, Computers & Structures, 10(5), 805-813.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1992. Numerical Recipes in Fortran 77. 2nd Edition., Cambridge University Press, New York.
- Samset, I., 1985. Winch and Cable Systems. Martinus Nijhoff/Dr W. Junk Publ., Dordrecht, The Netherlands.
- Sinclair, G.B., Hodder, S.B., 1981. Exact Solutions for Elastic Cable Systems. International Journal of Solids and Structures, 17(9), 845-854.
- Smith, R.J., MacFarlane, C.J., 2001. Statics of a Three Component Mooring Line. Ocean Engineering, 28(7), 899-914.
- Such, M., Jimenez-Octavio, J.R., Carnicero, A., Lopez-Garcia, O., 2009. An Approach Based on the Catenary Equation to Deal with Static Analysis of Three Dimensional Cable Structures. Engineering Structures, 31(90), 2162-2170.