Journal for History of Mathematics http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2014.27.3.165
Vol. 27 No. 3 (June 2014), 165–182

Lagrange and Polynomial Equations

라그랑주의 방정식론

KOH Youngmee 고영미 REE Sangwook 이상욱

After algebraic expressions for the roots of 3rd and 4th degree polynomial equations were given in the mid 16th century, seeking such a formula for the 5th and greater degree equations had been one main problem for algebraists for almost 200 years. Lagrange made careful and thorough investigation of various solving methods for equations with the purpose of finding a principle which could be applicable to general equations. In the process of doing this, he found a relation between the roots of the original equation and its auxiliary equation using permutations of the roots. Lagrange's ingenious idea of using permutations of roots of the original equation is regarded as the key factor of the Abel's proof of unsolvability by radicals of general 5th degree equations and of Galois' theory as well. This paper intends to examine Lagrange's contribution in the theory of polynomial equations, providing a detailed analysis of various solving methods of Lagrange and others before him.

Keywords: Lagrange, polynomial equation, algebraically solvable, solvable by radicals, auxiliary equation, reslovent; 라그랑주, 다항방정식, 대수적으로 풀린다, 근호로 풀린다, 보조 방정식, 해결식

MSC: 01A45, 01A50, 08–03

1 서론

현대의 대수학은 추상적인 대수구조를 주요 대상으로 삼고 있지만, 19세기 초까지만 해도 다항방정식의 풀이가 대수학의 주요 주제였고 복소수체계에 초점이 맞추어져 있었다. 다항방정식의 풀이방법을 일반화하거나 이로부터 파생된 다양한 문제들로 구성된 수학 분야가 고전적 의미의 대수학이다.

다항방정식

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

의 해가 계수들에 의한 대수 공식으로 표현될 때, 이 다항방정식이 「대수적으로 풀린다

KOH Youngmee: Dept. of Math., The Univ. of Suwon E-mail: ymkoh@suwon.ac.kr
REE Sangwook: Dept. of Math., The Univ. of Suwon E-mail: swree@suwon.ac.kr
Received on Feb. 24, 2014, revised on Mar. 27, 2014, accepted on Apr. 10, 2014.

(algebraically solvable)」, 또는「근호로 풀린다(solvable by radicals)」고 말한다. 다시 말해서, 방정식의 계수들과 $+, -, \times, \div$ 와 $\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \ldots$ 으로 이루어진 공식으로 해를 표현할 수 있을 때 방정식이 대수적으로 풀린다고 말하는 것이다. 예를 들어, 2차 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 해는 다음의 근의 공식

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

으로 표현된다. 즉, 2차 방정식은 대수적으로 풀린다.

고차 방정식도 이와 유사한 공식으로 그 해를 표현할 수 있는 지에 관한 연구를 하는 과정에서 19세기 초에 군(group)과 체(field)와 같은 새롭고도 추상적인 개념이 싹트게 되었다. 그 결과 대수방정식의 풀이에 초점을 둔 고전 대수학이 이후의 현대적인 추상대수학으로 모습을 바꾸게 되었다[1, 5].

방정식의 해를 대수적인 공식으로 표현할 수 있는 지를 묻는 문제는 방정식의 해가 존재하는 지를 묻는 문제와는 별개이다. 1799년에 가우스가 실수 계수를 갖는 임의의 n차 방정식은 복소수체에서 n개의 해를 갖는다는 사실을 증명함으로써 다항방정식의 해의 존재성에 대한 답을 하였다.「(고전) 대수학의 기본 정리」라고 불리는 이 내용은 17–18세기에 이미 여러 수학자들에 의해 가정되었고, 당시의 수학자들은 5차 이상의 방정식의 해법을 찾으려는 다양한 시도를 하였다. 18세기 후반에 라그랑주는 이전의 수학자들이 구해놓은 다항방정식들의 해법을 자세히 조사하고 공통적인 성질을 발견하여 일반적인 방정식에 적용가능한 통일된 해법을 구하고자 하는 과정에서 고차 방정식의 대수적인 해법이 존재하지 않을 것으로 의심을 하였다.

본 논문은 라그랑주에 의한 방정식 이론, 특히 방정식의 해와 해들의 순열과의 관계를 살펴보고 그 의의를 관찰한다. 이를 위해서는 먼저 라그랑주 이전의 여러 수학자들에 의해서 구해진 3차, 4차 방정식의 해법을 이해할 필요가 있으므로 이에 대한 간단한 설명과 의미를 제시한다. 그럼으로써 라그랑주가 발견한 공통적인 원리를 이해하고, 방정식론의 발달에 있어서 라그랑주가 끼친 영향과 공헌을 조명한다.

2 다항방정식 풀이의 간단한 역사

방정식을 푸는 문제는 수학의 역사만큼이나 오래되었다. 고대 중국, 고대 인도, 이집트와 바빌로니아에서 1차 방정식의 해를 구할 수 있었고, 2차 방정식의 기하적인 풀이 방법은 고대 그리스인들과 고대 중국에 알려져 있었다. 실제로, 현대적인 기호를 사용하지 않고 말로 풀이 과정을 설명하고 있지만 기원전 1700년경의 바빌로니아인들도 2차 방정식의 근의 공식을 이미 알고 있었다. 3차, 4차 방정식의 근의 공식, 즉 대수적인 해법이 16세기에 발견되었고, 이후로 수학자들은 5차 이상의 방정식의 대수적인 풀이에 주목하게 되었다. 1799년에 루피니(Ruffini, 1765–1822)가 처음으로 5차 방정식이 대수적으로 풀리지 않음

을 증명하는 논문을 발표했지만, 논문이 매우 읽기 어렵게 쓰여졌을 뿐아니라 내용의 결함 때문에 별로 인정받지 못했다. 1826년에 아벨(Abel, 1802–1829)에 의해 일반적인 5차 방정식이 대수적으로 풀리지 않음이 증명되었다. 그러나 이것이 모든 5차 방정식의 해를 대수적으로 표현할 수 없다는 것을 의미하지는 않는다. 갈루아(Galois, 1811–1832)는 아벨의 증명의 핵심 아이디어인 순열군을 이용해서 특정한 다항방정식이 대수적으로 풀리는지에 대한 판별법을 제시하였다. 라그랑주(Lagrange, 1736–1813)는 갈루아 이론과 5차 이상의 방정식의 해법에 관한 연구 선상에 있는 최초의 수학자로 손꼽힌다. 라그랑주는 방정식의 풀이에 대한 해석적 기초를 정립하는 것을 목표로 하였다. 실제로 라그랑주는 방정식의 해와 순열의 관계에 주목한 최초의 수학자로서 루피니와 아벨의 증명에 핵심 아이디어를 제공하였고, 나중에 코쉬(Cauchy, 1789–1857)에 의한 순열 이론의 정립 배경을 제공하였다[1, 5, 8].

3 3차, 4차 방정식의 해법

3.1 까르다노의 3차 방정식의 해법

까르다노(Cardano, 1501–1576)는 3차 방정식의 해법을 제시한 사람으로 유명하다. 그러나 역사를 조금만 자세히 들여다보면 까르다노 이전에 3차 방정식의 풀이와 관련된 첫 번째 사람으로 델페로(del Ferro, 1465–1526)가 등장한다. 델페로는 $x^3 + px = q$ 형태의 3차 방정식의 해법을 알았지만 결과를 발표하지는 않았고 다만 임종에 이르러서야 그의 제자인 피오르(Fior)에게 해법을 전수하였다. 피오르와의 경쟁에서 이긴 타르탈리아(Tartaglia, 말더듬이)로 불렸던 폰타나(Fontana, 1499–1557)에게 까르다노는 3차 방정식의 해법을 알려달라고 거듭 요청했다. 까르다노로부터 비밀을 지키겠다는 약속을 받은 타르탈리아는 자신의 방법을 까르다노에게 알려주었다. 까르다노와 그의 제자 페라리(Ferrari, 1522–1565)는 이를 일반적인 3차 방정식의 해법으로 더욱 발전시켰고, 까르다노는 1545년에 그 결과를 담은 책 《Ars Magna》를 출판하였다. 이에 분노한 타르탈리아와 까르다노는 거친 논쟁을 시작하게 되는데 이에 대한 자세한 역사적인 내용은 [2, 7, 9]를 참고하면 된다.

까르다노는 방정식의 계수들을 양수로 한정해서 생각했기 때문에 $x^3 = px + q$과 $x^3 + px = q$를 구별하여 해법을 설명하였다. 까르다노의 3차 방정식의 해법은 기하적인 방법으로서 하나의 정육면체를 두 개의 작은 정육면체와 네 개의 직육면체로 나누어 부피를 구하는 방법에 기초한다[2, 6]. 먼저 일반적인 3차 방정식은 2차항이 없는 3차 방정식으로 변환이 가능하다. 방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$에서 $x = y - a/3$로 치환하면 2차항이 없는 3차 방정식이 된다.

까르다노의 방법을 따라 방정식 $x^3 + px = q$의 해를 구해보자. 한 변의 길이가 t인 큰

정육면체를 6개의 직육면체, 즉, 한 개의 꼭짓점을 공유하고 있는 한 변의 길이가 각각 u와 $t-u$인 두 개의 정육면체, 크기가 $u\times(t-u)\times t$인 두 개의 직육면체, 크기가 $u\times u\times(t-u)$이고 $(t-u)\times(t-u)\times u$인 직육면체 각각 한 개씩이 되도록 나눈다. 큰 정육면체의 부피를 6개의 분할 육면체의 부피의 합으로 나타내면

$$t^3 = u^3 + (t-u)^3 + 2tu(t-u) + u^2(t-u) + u(t-u)^2$$

이고, 이 식을 정리하여

$$(t-u)^3 + 3tu(t-u) = t^3 - u^3$$

을 얻는다. 이 식을 $x^3+px=q$와 비교하면 $p=3tu$이고 $q=t^3-u^3$일 때 $x=t-u$가 해가 된다. 두 식에서 u를 소거하여

$$t^6 - qt^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

을 얻는데, 이 식은 t^3에 관한 2차식이어서 방정식의 해 t^3을 대수적으로 구할 수 있다.

$$t^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

이고, $u^3 = t^3 - q$이므로 3차 방정식의 해의 대수적인 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x = t-u &= \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \end{aligned}$$

「까르다노의 공식」으로 알려진 위의 공식은 양수 p와 q의 구체적인 값과는 상관없이 항상 양수해를 제공한다. 까르다노는 한 개의 해를 구하는 것으로 만족했던 것 같다. 실제로 3차 방정식은 한 개 또는 세 개의 실근을 갖는데, 실근을 세 개 갖는 경우에 까르다노의 공식이 모든 실근을 구해주지는 못한다.

까르다노는 $x^3 = px + q$ 형태의 방정식에 대하여도 위와 유사한 방법으로 해를 얻었다. 이 경우의 해의 공식은 앞서 구한 $x^3 + px = q$의 해의 공식에서 p 대신 $-p$이 들어간 것이다. 이때 $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$이면 제곱근 안의 수가 음수가 되는데 이것이 나중에 복소수가 만들어지는 계기를 제공하였다[2, 7].

3.2 페라리의 4차 방정식의 해법

까르다노의 제자인 페라리(Ferrari, 1522–1565)가 일반적인 4차 방정식의 해법을 구했고 그 결과는 까르다노의 책 《Ars Magna》에 설명되어 있다[11]. 일반적인 4차 방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$은 변수변환 $x=y-a/4$를 통해 3차항의 계수가 0인 식 $y^4+py^2+qy+r=0$으로 변환된다. 페라리와 까르다노는 먼저 기하적인 방법으로 다음 등식

$$(s+a+b)^2 = (s+a)^2 + 2sb + 2ab + b^2$$

을 증명하고 이 식을 활용하였다[6]. y에 관한 4차 방정식을

$$\left(y^2+\frac{p}{2}\right)^2=-qy-r+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

으로 변형하여 양쪽에 $2uy^2+pu+u^2$를 더하면

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+u\right)^2=\left(y^2+\frac{p}{2}\right)^2+2uy^2+pu+u^2=-qy-r+\left(\frac{p}{2}\right)^2+2uy^2+pu+u^2$$

이 된다. 이제 오른쪽 식이 y에 관한 완전제곱식이 되도록 u를 정한다. 이를 위해서 u는

$$q^2-8u(-r+\left(\frac{p}{2}\right)^2+pu+u^2)=0$$

을 만족시켜야 한다. 이 식은 3차 방정식이므로 까르다노의 해법을 따라 u를 대수적으로 구한 다음, 이를 이용하여 2차식

$$y^2+\frac{p}{2}+u=\pm(\sqrt{2u}y-\frac{q}{2\sqrt{2u}})$$

를 풀면 네 개의 해를 얻는다.

위의 식은 $u\neq 0$을 가정한 풀이이다. $u=0$인 경우는 $q=0$일 때 발생하는데 이때 주어진 식 $y^4+py^2+r=0$은 y^2의 2차식이므로 쉽게 해결된다.

일반적인 4차 방정식에 이 해법을 적용하여 해의 값을 알기는 설명처럼 간단하지는 않다. 실제로 페라리의 방법을 적용하는 과정에서 3차 방정식의 해를 구해야 하는데 이때 까르다노의 공식으로 주어진 해는 제곱근에 이어 세제곱근을 포함하고 있다. 이어서 이 수를 포함한 2차 방정식의 해를 구하면 이 수를 포함한 제곱근을 또 다시 구해야 하는 복잡한 계산과정을 거쳐야만 한다. 특히, 복소수의 개념이 없었던 16세기 당시라면 페라리의 공식을 적용하여 임의로 주어진 4차 방정식의 해를 항상 얻을 수는 없었을 것이다. 그럼에도 불구하고 페라리의 방법은 일반적인 4차 방정식의 해를 대수적인 공식으로 나타낼 수 있음을 보여준다는 중요한 의미를 갖는다. 더구나 까르다노의 3차 방정식의 해의 공식과는 다르게 이 방법은 4차 방정식의 네 개의 해를 모두 표현해준다.

그런데, 페라리의 해법에서 한 가지 의문이 생긴다. 3차 방정식에서 어떤 해가 구해지는지에 따라[1] 결과로 얻어지는 2차 방정식이 달라지는데, 원래의 4차 방정식의 해들이 중간에 등장하는 3차 방정식의 해에 대해 독립적인가 하는 의심이 바로 그것이다. 이에 대한 답은 3차 방정식의 세 개의 해 중에 어떤 값을 이용하더라도 원래의 4차 방정식의 해들에 영향을 미치지 않는다는 것이다. 그 이유는 5절에서 라그랑주가 관찰한 방식으로 보조 방정식의 성질을 조사해보면 쉽게 알 수 있다.

3.3 비에트의 3차 방정식의 해법

비에트 (Viète, 1540–1603) 가 방정식의 미지수, 덧셈, 뺄셈 등을 나타내는 기호를 도입하여 사용함으로써 대수적인 조작과 계산이 용이하게 되었고, 그로 인하여 대수학이 기하학으로부

1) 실제로 까르다노의 공식에서 $\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}<0$인 경우에 3차 방정식은 세 개의 실근을 갖는다.

터 독립되었으며, 결국 대수학이 큰 발전을 이루게된다. 비에트는 변수변환을 이용하여 3차 방정식의 해를 구하였다[11].

방정식 $x^3+px+q=0$ 에서 $x=\frac{p}{3y}-y$ 로 치환하면 $y^6-qy^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ 이 된다. 이 식의 해는

$$y_1^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2},\ \ y_2^3=\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

이다. 여기서 $(y_1y_2)^3=-(\frac{p}{3})^3$ 이므로, $x=\frac{p}{3y_1}-y_1=\frac{p}{3y_2}-y_2=-y_1-y_2$ 이다.

비에트가 얻은 결과는 까르다노의 공식과 같다. 실제로, 비에트의 변수 변환 방법은 까르다노의 방법에서 기하적인 해석을 제외한 내용과 동일하다. 앞 절의 까르다노의 방법의 $x=t-u$, $p=3tu$ 에서 u 를 y 로 바꾼 것이 비에트의 방법이다. 비에트는 이런 식의 변수변환을 통해서 주어진 3차 방정식을 6차 방정식이지만 궁극적으로는 2차 방정식으로 표현할 수 있다는 사실에 주목했던 것 같다.

3.4 데카르트의 4차 방정식의 해법

현대 대수학에서 사용하는 대부분의 기호는 데카르트(Descartes, 1596–1650)에 의해 만들어졌다. 데카르트는 그의 책 《La Geometrie》(1637)에서 방정식의 해를 다루는 과정에서 「실수(real)」, 「허수(imaginary)」라는 용어를 처음으로 사용했고, 실수부와 허수부를 갖는 수를 「복소수(complex)」라고 불렀다. 1629년에 지라르(Girard, 1595–1632)가 음수해를 방정식의 해로 인정하고, 데카르트가 복소수를 방정식의 해로 인정하면서, 데카르트는 방정식은 그 차수만큼의 해를 가질 수 있다고 주장하였다[7].

데카르트는 페라리가 한 것처럼 일반적인 4차 방정식의 3차항을 제거한 다음, 4차식을 두 개의 2차식의 곱으로 나타내었다[11].

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

양쪽 식의 계수를 비교하여 b,c,d 를 a 로 나타내면

$$c=-a,\ \ b=\frac{a^2}{2}+\frac{p}{2}-\frac{q}{2a},\ \ d=\frac{a^2}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q}{2a}$$

가 되는데, 이 식을 $bd=r$ 에 대입하고 정리하면 a 에 관한 6차식이자 a^2 에 관한 3차식을 얻는다.

$$a^6+2pa^4+(p^2-4r)a^2-q^2=0$$

3차 방정식을 풀어 a^2 을 구하고 나면 b,c,d 를 알 수 있고, 마지막으로 두 개의 2차식을 풀어 원래 방정식의 대수적인 해를 얻는다.

유리수 계수를 갖는 4차식을 두 개의 유리수 계수의 2차식의 곱으로 나타내는 것은 불가능할 때가 있지만, 실수 계수를 갖는 두 개의 2차식의 곱으로 나타내는 것은 항상 가능하다.

위의 식은 $q \neq 0$일 때 $a \neq 0$임을 이용한 것이지만, $q = 0$인 경우에는 3차 방정식을 풀지 않고 $p^2 - 4r$이 양수인지 음수인지에 따라 서로 다른 형태의 2차식의 곱으로 나타내어진다. 데카르트처럼 4차 방정식이 네 개의 해를 가질 것을 기대한다면 4차 방정식을 해를 두 개씩 갖는 2차 방정식의 곱으로 표현하는 것은 매우 자연스런 시도로 보인다.

데카르트의 방법을 따르면 중간에 3차식을 풀어 a^2을 구하는데 까르다노의 공식으로 3차 방정식의 해를 한 개만 구할 수 있다고 해도 a의 가능한 값은 두 개이고 실제로는 6차 방정식의 해로서 a의 가능한 값은 여섯 가지가 된다. 각 a마다 주어진 두 개의 2차 방정식을 풀면 4차 방정식의 해로 네 개씩 얻는데, 주어진 4차 방정식의 해는 a가 무엇으로 선택되든 상관없이 동일한 것인 지에 대하여 생기는 의심은 페라리의 해법에서 생기는 의심과 마찬가지로 5절에서 해결된다.

4 고차방정식의 해법

4.1 취른하우스의 방법

취른하우스(Tschirnhaus, 1651–1708)는 1683년에 모든 차수의 방정식에 일반적으로 적용 가능한 해법을 제시하였다[12]. 방정식 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$의 두 번째 항을 변수 변환 $x = y - \dfrac{a_{n-1}}{n}$을 통해 제거한 것처럼,

$$x^{n-1} = b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + y + b_0$$

로 두면 원래의 방정식의 $n-1$개의 가운데 항들을 모두 제거할 수 있어서 주어진 방정식을

$$y^n + c = 0$$

의 형태로 바꿀 수 있다고 주장하였다. 이 식의 대수적인 해는 $y = \sqrt[n]{-c}$이므로 방정식

$$x^{n-1} - b_{n-2}x^{n-2} - \cdots - b_1x - b_0 - \sqrt[n]{-c} = 0$$

을 대수적으로 풀 수 있음을 주장한 것이다.

취른하우스의 방법에 따라 3차 방정식을 대수적으로 풀어보자. 주어진 방정식 $x^3+px+q = 0$을 $y^3 + c = 0$으로 바꾸기 위해서 $x^2 = bx + y + a$로 두고 x를 소거해야 하는데 취른하우스의 논문에는 이에 대한 구체적인 계산 과정이 없이 결과만 포함되어 있다. 죠지(George, [3])의 소거 방법을 따라, 2차 방정식 $x^2 = bx + y + a$의 두 해를 r과 s라고 하면 둘 중 적어도 하나는 3차 방정식 $x^3 + px + q = 0$을 만족시켜야 하므로

$$(r^3 + pr + q)(s^3 + ps + q) = 0$$

이다. 위의 식을 $r + s = b,\ rs = -y - a$를 이용하여 정리하면 y에 관한 3차식

$$c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0$$

을 얻는다. 여기서,

$$c_3 = -1,$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -3a - 2p, \\
c_1 &= -4pa + 3qb – 3a^2 – pb^2 – p^2, \\
c_0 &= q^2 - p^2 a + pqb + 3qab – 2pa^2 - a^3 + qb^3 - pab^2
\end{aligned}
$$

이다. $c_1 = c_2 = 0$ 이 되기 위해서는 $a = -\frac{2p}{3}$ 이어야 하고 b 는 식

$$pb^2 - 3qb - \frac{p^2}{3} = 0$$

을 만족시켜야 한다.

$$b = \frac{3}{p}\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)$$

로 택하면 c_0 를 알게 된다. 그래서 $-y^3 + c_0 = 0$ 을 얻고, 2차 방정식 $x^2 - bx - \sqrt[3]{c_0} - a = 0$ 을 풀면 대수적인 해를 두 개 얻는다. 이때 얻은 두 수 중에서 처음의 3차 방정식을 만족시키는 수가 원하는 결과이다.

취른하우스의 방법을 따라 3차 방정식을 해결하는 것만해도 상당히 복잡한 계산이 요구된다. 취른하우스는 일반적인 n 차 방정식을 $n-1$ 차 방정식을 푸는 문제로 바꾸는 방법을 설명하고는 있지만, 그 과정에서 처음 나오는 변수변환을 하는 과정에서 $b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}$ 를 정하기 위해서는 1차, 2차, ..., $n-1$ 차 방정식을 연립하여 풀어야 한다. 이것은 곧 $(n-1)!$ 차 방정식을 풀어야 함을 의미한다. 따라서 이 방법은 3보다 큰 차수의 방정식에 적용하기가 거의 불가능하지만 특정 방정식의 풀이보다는 일반적인 방정식을 해결하기 위하여 주어진 방정식의 차수를 낮추어 풀 수 있는 방법을 모색한 시도라는 점에서 그 의의를 찾을 수 있겠다. 취른하우스의 방법에서 이전까지의 개별적인 방정식의 풀이에 초점을 둔 수학에서 일반적인 방정식의 해법을 구하기 위한 순수수학으로의 이동을 볼 수 있다.

4.2 베주와 오일러의 방법

18세기에 드무아브르 (de Moivre, 1667–1754) 의 연구로 단위근 (roots of unity) 에 대한 이해가 생기면서 방정식론이 빠르게 발달하게 되었다. 오일러 (Euler, 1707–1783) 와 베주 (Bézout, 1730–1783) 가 4차 이하의 방정식을 해결할 수 있는 새로운 방법을 고안하였다. 베주가 1765년에 제시한 단위근을 이용한 방법을 살펴보자. 오일러의 방법도 이와 유사하다[11].

두 식

$$
\begin{aligned}
x &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{n-1} y^{n-1}, \\
y^n &= 1
\end{aligned}
$$

에서 y 를 소거해서 얻은 x 에 관한 n 차 방정식을 $R_n(x) = 0$ 으로 나타내자. $R_n(x) = 0$ 의 최고 차항의 계수는 항상 1이라고 가정할 수 있다. $\omega^n = 1$ 이면 $a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1}$ 은 $R_n(x) = 0$ 의 해가 된다. 즉,

$$R_n(x) = \prod_{\omega} (x - (a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1}))$$

이 되고, 이때 곱은 서로 다른 n개의 n차 단위근(nth root of unity)에 대한 곱을 나타낸다.

이제 주어진 n차 방정식 $P(x) = 0$을 풀고자 한다면, $P(x) = R_n(x)$가 되도록 a_i 들만 결정하면 해들은 이미 구한 것이 된다. 단위근을 이용하여 $n = 2, 3$에 대한 $R_n(x)$를 구해보면,

$$\begin{aligned} R_2(x) &= (x - (a_0 + a_1))(x - (a_0 - a_1)) = (x - a_0)^2 - a_1^2, \\ R_3(x) &= (x - (a_0 + a_1 + a_2))(x - (a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2)(x - (a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4)) \\ &= (x - a_0)^3 - 3a_1a_2(x - a_0) - (a_1^3 + a_2^3). \end{aligned}$$

여기서 ω와 ω^2은 $x^2 + x + 1 = 0$의 두 해로서, $\omega^3 = 1$이다.

베주의 방법을 따라 3차 방정식 $x^3 + px + q = 0$을 대수적으로 풀어보자. 이 식이 위에서 구한 $R_3(x) = 0$과 같아지려면 세 조건

$$a_0 = 0, \ \ -3a_1a_2 = p, \ \ -(a_1^3 + a_2^3) = q$$

이 만족되어야 한다. 즉, a_1은 다음 식

$$a_1^6 + qa_1^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

을 만족시켜야 한다. 이 식에서 먼저 a_1^3을 구하여 a_1을 구한 다음 a_2를 구하면, 주어진 방정식의 세 개의 해는

$$a_1 + a_2, \ \ a_1\omega + a_2\omega^2, \ \ a_1\omega^2 + a_2\omega$$

이고, 이때 $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 이다.

위에서 a_1^3에 관한 2차 방정식의 해로 두 값을 얻는데 그 중 한 값을 a_1^3이라고 하면, 조건에서 $a_1^3a_2^3 = -(\frac{p}{3})^3$이므로 2차 방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 다른 한 값은 a_2^3이 되어야 한다. 그래서 a_1에 관한 6차 방정식의 모든 해는 a_1, $a_1\omega$, $a_1\omega^2$, a_2, $a_2\omega$, $a_2\omega^2$ 이고, 이들 중 어떤 값을 a_1으로 선택하든지 상관없이 원래의 3차 방정식의 해는 $\{a_1+a_2,\ a_1\omega+a_2\omega^2,\ a_1\omega^2+a_2\omega\}$으로 변하지 않는다. 예를 들어, a_1으로 $a_2\omega$를 택하면 a_2는 $a_1\omega^2$이 되어야 두 수의 곱이 $-\frac{p}{3}$가 된다. 비록 3, 4차 방정식의 해법에 국한된 것이지만, 베주가 해법을 한 가지로 통합한 것과 지금까지 한 개의 해만 찾는 방법을 제시한 수학자들과는 다르게 그는 모든 해를 찾는 방법을 제시하였다는 점이 중요하게 보인다.

5 라그랑주의 방정식론

라그랑주(Lagrange, 1736–1813)는 이전까지 발표되었던 방정식의 해법을 면밀히 분석하여 하나의 공통적인 원리를 발견하였고 그 결과를 다룬 논문 〈Réflexions sur la résolution algébrique des équations (Reflections on the algebraic solution of equations)〉을 1770-1771년 베를린 아카데미의 《Memoires》에 출판하였다. 라그랑주는 낮은 차수의 방정식의 해법을 철저히 조사해서 이들 방법이 3차, 4차 방정식에 대해서 왜 성공적이었는 지를 「연역적으로(a priori)」[2] 밝히고자 하였고, 높은 차수의 방정식으로 일반화할 수 있는 그럴듯한

2) 실제로 라그랑주는 논문에서 여러 차례에 걸쳐서 a priori라는 말을 자주 하고 있다 [5, 7].

패턴을 발견하고자 하였다.

주어진 방정식의 계수들은 방정식의 해에 관한 대칭함수로 주어지기 때문에 해의 형식적인 순서가 변해도 계수가 일정해서 방정식을 구성하는 다항식 자체는 변하지 않는다. 반면에 그 방정식으로부터 만들어지는 보조 방정식[3)]의 해로 정의되는 유리식은 원래 방정식의 해들의 비대칭함수로서 해들의 순열에 따라 몇 개의 서로 다른 값을 갖는다. 라그랑주는 순열 자체보다는 순열에 의해서 변하는 유리식의 값에 관심의 초점을 두었고, 이에 대한 연구 결과로 얻어진 정리는 이후에 라그랑주의 정리[4)]로 알려지면서 군론의 기초 정리가 되었다. 또한 순열에 따라 변하는 함숫값에 대한 연구는 훗날 코쉬에 의해 방정식과는 별개의 독립적인 순열 이론으로 정립되었고, 순열을 활용하는 라그랑주의 아이디어는 갈루아 이론의 핵심 역할을 하는 등, 이후의 수학자들이 방정식 이론을 연구하는 데 중요한 도구가 되었으며 순열 이론은 추상적인 군론의 한 부분을 차지하게 되었다[5, 8].

라그랑주는 보조 방정식으로 주어진 방정식의 해들의 비대칭함수가 취하는 모든 값을 해로 갖는 방정식을 만들었다. 보조 방정식을 대수적으로 풀면 비대칭함수의 값을 알 수 있다. 예를 들어, 2차 방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 개의 해를 x_1과 x_2라고 하자. 이들 해의 유리식인 비대칭함수 $h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$는 x_1, x_2의 순열에 따라 $x_1 - x_2$ 또는 $x_2 - x_1$을 함숫값으로 갖는다. 이들 두 값을 해로 갖는 방정식은

$$(y - (x_1 - x_2))(y - (x_2 - x_1)) = y^2 - (x_1 - x_2)^2 = 0$$

이다. 그런데 $(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q$ 이므로 보조 방정식은 $y^2 - (p^2 - 4q) = 0$ 으로 표현된다. 그러므로 $\sqrt{p^2 - 4q}$는 $x_1 - x_2$ 또는 $x_2 - x_1$과 같아야 한다. $\sqrt{p^2 - 4q} = x_1 - x_2$ 인 경우에 x_1, x_2를 보조 방정식의 해와 원래 방정식의 계수의 유리식을 이용하여 구할 수 있다.

$$x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)}{2},$$
$$x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)}{2}.$$

다른 경우도 유사하게 하면 된다.

5.1 3차 방정식과 보조 방정식

연역적인 방법으로(a priori) 3, 4차 방정식의 해법이 성공적인 이유를 밝히려는 시도로 라그랑주가 생각해낸 아이디어는 보조 방정식의 해를 주어진 방정식의 해들의 함수로 결정하는 것이었다[4].

3) 라그랑주는 보조 방정식을 「réduites」라고 불렀고 지금은 「해결식(resolvent)」으로 불린다.
4) 『유한군의 부분군의 위수는 전체 군의 위수의 약수이다.』

까르다노나 비에트의 방법을 따라 방정식 $x^3+px+q=0$ 에서 $x=y-\frac{p}{3y}$ 로 바꾸면 보조 방정식

$$y^6+qy^3-\frac{p^3}{27}=0$$

을 얻는다. 이 방정식은 $r=y^3$ 에 관한 2차 방정식으로 두 개의 대수적인 해

$$r_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ \ r_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

를 갖고, 이로부터 3차 단위근 $\omega\neq 1$ 를 이용하여 y 를 구할 수 있다.

$$y_1=\sqrt[3]{r_1},\ y_2=\omega\sqrt[3]{r_1},\ y_3=\omega^2\sqrt[3]{r_1},\quad y_4=\sqrt[3]{r_2},\ y_5=\omega\sqrt[3]{r_2},\ y_6=\omega^2\sqrt[3]{r_2}$$

r 에 관한 2차 방정식에서 두 해의 곱이 $r_1r_2=-\frac{p^3}{27}$ 임을 이용하여 $x=y-\frac{p}{3y}$ 를 계산하면 원래 방정식의 3개의 해가

$$\begin{aligned}x_1&=\sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2}=y_1+y_4\\x_2&=\omega\sqrt[3]{r_1}+\omega^2\sqrt[3]{r_2}=\omega y_1+\omega^2y_4\\x_3&=\omega^2\sqrt[3]{r_1}+\omega\sqrt[3]{r_2}=\omega^2y_1+\omega y_4\end{aligned}$$

로 표현됨을 알 수 있다. 즉, 보조 방정식의 해로부터 원래 방정식의 해를 구할 수 있다.

라그랑주는 이어서 연역적인 방법으로(a priori) 위의 해법에서 드러난 방정식과 보조 방정식의 관계와 패턴을 설명하고자, 위의 과정을 거슬러 올라가며 보조 방정식의 해를 원래 방정식의 계수와 해의 유리식으로 표현하였다[5, 11]. 앞에서 구한 3차 방정식의 해 x_1,x_2,x_3 와 보조 방정식의 해 $y_1,\ldots,y_6$ 의 관계로부터

$$y_1=\frac{1}{3}(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3),\ y_4=\frac{1}{3}(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)$$
$$y_2=\omega y_1,\ y_3=\omega^2y_1,\ y_5=\omega y_1,\ y_6=\omega^2y_1$$

으로 쓸 수 있다. 여기에서 알 수 있듯이 보조 방정식의 6개의 해는 유리식 $\frac{1}{3}(x_1+\omega^2x_2+\omega x_3)$ 에 x_1,x_2,x_3 의 순열을 적용하면 얻어지는 것들이다. 그런데 이들 값을 세제곱하면 $y_1^3=y_2^3=y_3^3,\ y_4^3=y_5^3=y_6^3$ 으로 단 2개의 서로 다른 값을 갖는다. 그래서 y_j 들을 해로 갖는 6차 방정식은 y^3 에 관한 2차 방정식 $(y^3-y_1^3)(y^3-y_4^3)=0$ 으로 표현되어야 하는 것이다. y^3 에 관한 2차 방정식

$$(y^3-y_1^3)(y^3-y_4^3)=y^6-(y_1^3+y_4^3)y^3+y_1^3y_4^3=0$$

의 계수는 원래 방정식의 해 x_1,x_2,x_3 의 대칭식이므로 대칭함수의 기본 정리[5)]에 의해 이 보조 방정식의 계수는 원래 방정식의 계수 p,q 의 함수로 표현된다. 즉, 2차 보조 방정식의 해를 구할 수 있다.

---

5) n 개의 다항식 $s_1=x_1+x_2+\cdots+x_n$, $s_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\ldots,s_n=x_1x_2\cdots x_n$ 을 「기본대칭식(elementary symmetric polynomial)」이라고 한다. 「대칭함수의 기본 정리」는 『임의의 대칭함수는 기본대칭식의 함수로 표현가능하다』이고, 이는 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 가 대칭함수이면 $f(x_1,\ldots,x_n)=g(s_1,\ldots,s_n)$ 임을 의미한다.
각 $s_j(j=1,2,\ldots,n)$ 에 순서대로 $-,+$ 를 번갈아 붙이면 이들은 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 을 해로 갖고 최고차항의 계수가 1인 n 차 방정식의 계수와 같은데, 이것이 근과 계수와의 관계로서 Viète의 공식으로 불린다.

라그랑주는 까르다노의 방법에 이어서 취른하우스의 방법을 조사하였다[4, 11]. x_1, x_2, x_3을 세 개의 해로 갖는 3차 방정식을 변수 변환 $y = a+bx+x^2$을 해서 $y^3 = c$로 바꾸면, 이 식의 해는 $\sqrt[3]{c}, \omega\sqrt[3]{c}, \omega^2\sqrt[3]{c}$이므로 다음과 같은 관계식을 얻는다. 이때 $\omega \neq 1$은 3차 단위근이다.

$$x_1^2 + bx_1 + a = \sqrt[3]{c}, \tag{1}$$
$$x_2^2 + bx_2 + a = \omega\sqrt[3]{c}, \tag{2}$$
$$x_3^2 + bx_3 + a = \omega^2\sqrt[3]{c}. \tag{3}$$

식 (2)에 ω, 식 (3)에 ω^2을 각각 곱하고 이들을 식 (1)에 더하여 b를 구한다.

$$b = -\frac{x_1^2 + \omega x_2^2 + \omega^2 x_3^2}{x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3}$$

여기서 b는 x_1, x_2, x_3의 순열에 따라 2개의 서로 다른 값

$$b_1 = -\frac{x_1^2 + \omega x_2^2 + \omega^2 x_3^2}{x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3}, \quad b_2 = -\frac{x_1^2 + \omega^2 x_2^2 + \omega x_3^2}{x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3}$$

을 갖는다. 그래서 b는 2차 보조 방정식 $t^2 - (b_1 + b_2)t + b_1 b_2 = 0$의 해가 된다. 여기서 $b_1 + b_2$와 $b_1 b_2$는 x_1, x_2, x_3에 관한 대칭식이므로 대칭함수의 기본 정리에 의하여 원래의 3차식의 계수들을 이용한 식으로 나타낼 수 있다. 즉, 2차식을 풀어 b를 알 수 있다. 이제 a를 구하기 위해 식 (1), (2), (3)을 모두 더하면

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b(x_1 + x_2 + x_3) + 3a = 0$$

이 된다. 여기서 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$과 $x_1 + x_2 + x_3$은 대칭식이므로 원래 3차식의 계수로 표현가능하다. 즉, a는 b와 원래 3차식의 계수의 유리식으로 표현된다. 식 (1), (2), (3)을 모두 곱해서 얻은 대칭식

$$c = (x_1^2 + bx_1 + a)(x_2^2 + bx_2 + a)(x_3^2 + bx_3 + a)$$

에서 c를 얻는다. 마지막으로 a, b, c를 이용하여 원래 식의 해 x_1, x_2, x_3를 구할 수 있다.

5.2 4차 방정식과 보조 방정식

라그랑주는 오일러와 베주의 해법을 포함하여 다양한 4차 방정식의 해법을 조사하고, 보조 방정식의 해가 원래 방정식의 해를 이용한 식으로 어떻게 나타나는지를 밝히고, 원래 방정식의 해들의 유리식으로 표현되는 보조 방정식의 해가 취하는 값의 개수가 원래 방정식의 차수보다 작음에 주목하였다[4, 11].

페라리의 4차 방정식 해법의 주요 아이디어는 적당한 u를 찾아서 주어진 방정식 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$을

$$(x^2 + \frac{p}{2} + u)^2 = (\sqrt{2u}x - \frac{q}{2\sqrt{2u}})^2$$

으로 바꾸는 것이다. 두 개의 2차 방정식

$$x^2 + \frac{p}{2} + u = \sqrt{2u}x - \frac{q}{2\sqrt{2u}}, \quad x^2 + \frac{p}{2} + u = -\sqrt{2u}x + \frac{q}{2\sqrt{2u}}$$

의 해를 각각 x_1, x_2와 x_3, x_4라고 하면,

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2u}, \quad x_3 + x_4 = -\sqrt{2u}$$

이므로 $u = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$로 표현된다. 따라서 u는 x_1, x_2, x_3, x_4의 순열에 따라 3개의 값을 가지므로 u가 만족시키는 보조 방정식의 차수는 3이고, 이것은 페라리의 해법에서 보았던 u에 관한 3차 방정식을 설명해준다.

결국, u에 관한 3차 방정식의 세 개의 해 $u_1 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $u_2 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$, $u_3 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$ 중에 어떤 것을 u로 선택하더라도 결과로 얻어지는 4차 방정식의 해는 변함없이 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$이다. 이것으로 4절에서 언급했던 페라리의 방법에 대한 의문에 답이 된다.

데카르트의 4차 방정식의 해법에서 얻게 되는 3차 보조 방정식을 살펴보자. 주어진 4차 방정식 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$을 2차 방정식 두 개로 곱으로 나타낼 때 그 방정식을 각각

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + cx + d = 0$$

이라고 하자. a와 4차 방정식의 해 x_1, x_2, x_3, x_4의 관계는 다음 6가지의 경우로 나뉜다.

$$-a = x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ x_1 + x_4,\ x_2 + x_3,\ x_2 + x_4,\ x_3 + x_4$$

한편 원래 4차식의 x^3의 계수가 0이므로 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$이어서 a^2이 x_1, x_2, x_3, x_4의 순열에 따라 갖는 값의 개수는 3이다. p, q, r의 유리식을 계수로 갖는 3차 보조 방정식을 풀어 a^2을 구할 수 있다. 다시 말해서, a는 6차 방정식의 해로 주어지지만, 어떤 값을 a로 선택하던지 상관없이 얻어지는 4차 방정식의 네 개의 해는 변함이 없고, 이것이 앞 절에서 제기한 의문에 대한 답이다.

3차, 4차 방정식의 해법에서 등장하는 보조 방정식의 공통점을 다음과 같이 정리할 수 있다. 보조 방정식의 해는 원래 방정식의 해들의 유리식으로 비대칭함수이다. 그리고 이 유리식이 원래 방정식의 해들의 순열에 따라 취하는 값의 개수가 보조 방정식의 차수를 결정하는데 그 차수는 궁극적으로 원래 방정식의 차수보다 1만큼 작다. 또한 보조 방정식의 계수는 원래 방정식의 계수의 유리식으로 표현되기 때문에 계수가 알려진 2차, 3차 보조 방정식은 항상 대수적으로 풀린다. 이렇게 구한 보조 방정식의 해를 이용하면 원래 방정식의 해를 구할 수 있다. 결국, 3차와 4차 방정식의 경우에서 보듯이 주어진 방정식이 대수적으로 풀리기 위해서는 대수적으로 풀 수 있는 낮은 차수의 보조 방정식이 필요한 것이다.

5.3 라그랑주의 일반화

라그랑주는 3, 4차 해법에 대한 면밀한 관찰을 통하여 다음과 같은 중요한 결론을 얻었다. 방정식의 계수는 해들의 기본대칭식이므로, 이들 계수의 함수로 표현된 보조 방정식의 계수

역시 대칭식이다. 그래서 원래 방정식의 해들의 적당한 유리식이 보조 방정식의 해가 되면, 그 유리식이 원래 방정식의 해들의 순열에 따라 취하는 값들 모두가 보조 방정식의 해가 되어야 한다[11].

이 말은 원래 방정식의 해들의 유리식으로 결정되는 비대칭함수가 취하는 모든 값들이 보조 방정식의 해가 되고 이들 값의 개수가 곧 보조 방정식의 차수임을 설명해준다[6]. 즉, 대수적으로 풀 수 있는 낮은 차수의 보조 방정식을 찾기 위해서는 원래 방정식의 해들의 순열에 따라 취하는 값의 개수가 작은 유리식을 찾는 게 중요하다. 라그랑주는 보조 방정식을 찾고 푸는 것이 원래 방정식의 해를 구하는 데에 있어서의 관건이라고 생각했고, 이를 위해 베주의 방법을 적용하여 일반적인 방정식에 대한 보조 방정식을 결정하는 방법을 제시하고자 하였다.

단위근을 이용하는 베주의 방법을 따르면 n차 방정식의 해 $x_1, x_2, \ldots, x_n$는 n차 단위 원시근(primitive nth root of unity)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다[11]. 적당한 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$에 대하여

$$x_k = a_0 + a_1\omega^{k-1} + a_2\omega^{2(k-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega^{(n-1)(k-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

n차 단위근 $\omega^k (k \neq 0)$는 $y^{n-1} + y^{n-2} + \cdots + y + 1 = 0$을 만족시키므로, $\sum_{m=0}^{n-1} \omega^{km} = 0$이다. 이를 이용하면 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$를 $x_1, x_2, \ldots, x_n$들의 식으로 나타낼 수 있다.

$$a_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{m=0}^{n-1} \omega^{-km} x_{m+1}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

이 식을 「라그랑주의 해결식」[7]이라고 한다. $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 순열에 따라 a_k는 서로 다른 값을 갖는다. 즉, a_k는 차수가 $n!$인 방정식의 해로 결정된다. 그러나 실제로, a_k^n은 $(n-1)!$의 서로 다른 값을 갖는다. 예를 들어, $\omega^n = 1$이므로

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{1}{n}\left(x_1 + \omega^{-1}x_2 + \omega^{-2}x_3 + \cdots + \omega^{-(n-1)}x_n\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(x_1 + \omega^{n-1}x_2 + \omega^{n-2}x_3 + \cdots + \omega x_n\right) \end{aligned}$$

이고, 그래서

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega a_1(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) = \cdots = \omega^{n-1} a_1(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

이므로 등식

$$a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)^n = a_1(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)^n = \cdots = a_1(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})^n$$

이 성립한다. 즉, a_1^n은 $(n-1)!$차의 방정식의 해로 표현된다. 이것은 베주의 방법을 적용하면 일반적인 n차 방정식의 보조 방정식의 차수가 $(n-1)!$임을 의미한다. 라그랑주의 해결식은

6) 현대 대수학의 용어로 말하면 보조 방정식의 차수는 순열군의 적당한 부분군의 코셋의 개수에 해당한다.

7) 해결식(resolvent)은 경우에 따라 주어진 방정식의 해들의 유리식, 즉, 보조 방정식의 해를 의미하기도 하고, 또 보조 방정식 자체를 일컫기도 한다.

4차 이상의 방정식에 대하여는 별로 도움이 되지 않는 것 같다. 만약 4차 이상의 방정식을 대수적으로 풀 수 있다면 이와는 다른 보조 방정식이 필요할 것이다. 라그랑주는 $n = 4$일 때 차수가 3인 보조 방정식을 찾을 수 있었는데, 이에 대한 설명은 아래에 하기로 한다.

라그랑주는 방정식 해법에 관한 연구에서 순열에 대한 계산을 통하여 군론과 갈루아 이론의 처음 결과라고 할 수 있는 정리들을 얻었다.

정리 1. 유리식 $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$가 $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 순열에 따라 m개의 서로 다른 값을 갖고 f를 고정시키는 순열의 개수가 k이면 $m = \dfrac{n!}{k}$이다.

정리 2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 유리식 f와 g에 대하여, g를 고정시키는 순열에 대하여 f가 취하는 값의 개수가 m이면, f는 g와 $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 기본대칭식인 $s_1, s_2, \ldots, s_n$의 유리함수로 표현되는 계수를 갖는 m차 방정식의 해가 된다.
(정리에 대한 증명은 [11]을 참고하면 된다.)

정리 1은 현재 군론에서 『라그랑주 정리』라고 불리는 군론의 유명한 기초 정리이다. 정리 2는 정리 1을 확장한 결과로서 갈루아 이론의 핵심 아이디어의 바탕이 된다.

티그놀은 방정식을 해결하기 위하여 보조 방정식을 반복해서 이용하는 라그랑주의 방법을 다음과 같이 요약해 놓았다[11]. $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 적당한 유리식 $f_0, f_1, \ldots, f_r$이 다음 조건을 만족시키도록 찾는다: (i) f_0는 $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 대칭식이고, (ii) f_r은 x_1이고, (iii) f_j $(1 \le j \le r)$는 $f_j^n = f_{j-1}$이거나, f_{j-1}를 고정시키는 순열에 따른 f_j의 값의 개수가 n보다 작다.

여기서, $f_j^n = f_{j-1}$이면 f_j는 f_{j-1}의 n 거듭제곱근으로 풀 수 있고, f_{j-1}를 고정시키는 순열에 따른 f_j의 값의 개수가 $m < n$이면 정리 2에 의하여 m차 방정식을 풀어 f_j를 구할 수 있다. 결국 조건에 맞는 유리식을 차례로 결정할 수 있고 각 단계마다 보조 방정식을 풀 수 있으면 원래 방정식이 대수적으로 풀림을 알 수 있다.

이에 대한 구체적인 예를 살펴보자. 라그랑주는 4차 방정식의 네 개의 해의 순열에 따라 세 개의 값만을 갖는 유리식 중 하나로 $x_1x_2 + x_3x_4$를 이용하였다[6, 10]. 이를 활용하여 4차 방정식을 해결하기 위한 유리식을 차례로

$$f_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \;\; f_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \;\; f_2 = x_1x_2, \;\; f_3 = x_1$$

으로 정의하자. f_0는 대칭함수이고, f_1은 x_1, x_2, x_3, x_4의 순열에 따라 3개의 값을 갖는다. 이 값들을 해로 갖는 3차 방정식을 대수적으로 풀어 f_1을 구할 수 있다. f_1을 고정시키는 순열[8)]에 따라 f_2는 2개의 서로 다른 값, x_1x_2와 x_3x_4를 갖는다. 2차 방정식을 풀어 f_2를

8) $\sigma_1 = id$, $\sigma_2 = (12)$, $\sigma_3 = (34)$, $\sigma_4 = (12)(34)$, $\sigma_5 = (13)(24)$, $\sigma_6 = (14)(23)$, $\sigma_7 = (1423)$, $\sigma_8 = (1324)$

구한다. $f_2 = x_1x_2$를 고정시키는 순열[9)]에 대하여 f_3의 값은 x_1이거나 x_2이다. 2차 방정식 $x^2 - (x_1 + x_2)x + f_2 = 0$에서 x_1과 x_2를 구한다.

주어진 4차 방정식을 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$이라 하고, 이 과정을 좀 더 상세히 설명하기로 한다. f_1이 취하는 3 개의 값을 해로 갖는 3차 보조 방정식은

$$(y - (x_1x_2 + x_3x_4))(y - (x_1x_3 + x_2x_4))(y - (x_1x_4 + x_2x_3)) = 0$$

이다. x_1, x_2, x_3, x_4와 a, b, c, d와의 관계를 이용하면 이 식은

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + (4bd - a^2d - c^2) = 0$$

으로 나타나고, 이 방정식의 세 개의 해로 f_1의 서로 다른 값

$$x_1x_2 + x_3x_4,\ x_1x_3 + x_2x_4,\ x_1x_4 + x_2x_3$$

를 구할 수 있다. 이제, $f_1 = x_1x_2 + x_3x_4$에 대하여 $x_1x_2x_3x_4 = d$를 이용하여 2차 방정식

$$z^2 - (x_1x_2 + x_3x_4)z + x_1x_2x_3x_4 = z^2 - f_1z + d = 0$$

에서 f_2의 값들로 두 개의 해 x_1x_2와 x_3x_4를 구한다. $f_2 = x_1x_2$에 대하여 2차 방정식

$$u^2 - (x_1 + x_2)u + x_1x_2 = 0$$

을 풀어 f_3의 값인 x_1을 구하면 된다. 그러기 위해서는 $x_1 + x_2$가 무엇인지 알아야 한다. 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{aligned}
&-c = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2),\\
&-a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4
\end{aligned}$$

를 이용하면

$$x_1 + x_2 = \frac{-ax_1x_2 + c}{x_1x_2 - x_3x_4}$$

임을 알 수 있다. 그래서 2차 방정식

$$u^2 - (x_1 + x_2)u + x_1x_2 = u^2 + \frac{ax_1x_2 - c}{x_1x_2 - x_3x_4}u + x_1x_2 = 0$$

을 풀어 x_1과 x_2를 각각 구할 수 있다. 같은 방법으로 x_3과 x_4도 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{a}{4} + \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^2}{4R}}\\
x_2 &= -\frac{a}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^2}{4R}}\\
x_3 &= -\frac{a}{4} - \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b - \frac{4ab - 8c - a^2}{4R}}\\
x_4 &= -\frac{a}{4} - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b - \frac{4ab - 8c - a^2}{4R}}
\end{aligned}$$

여기서 $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b - y}$이고, $y = f_1$은 앞의 3차 보조 방정식의 한 개의 해이다.

9) $\sigma_1 = id$, $\sigma_2 = (12)$, $\sigma_3 = (34)$, $\sigma_4 = (12)(34)$

라그랑주는 해결식으로 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ 도 제시하였다[10]. 이 경우,

$$f_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ f_1 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,\ f_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ f_3 = x_1$$

으로 정의해서 4차 방정식을 풀 수도 있다.

앞 절의 페라리의 방법은 4차 방정식에 대한 해결식을 $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$ 으로 정의하고 이에 따라 차례대로 유리식

$$f_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ f_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4),\ f_2 = x_1 + x_2,\ f_3 = x_1$$

의 값을 구하여 방정식을 해결한 것으로 볼 수 있다.

라그랑주는 이런 과정을 적용해서 5차 방정식을 풀게 될 경우 조사하고 조합해야 할 계산 대상이 너무 많아서 성공을 보장하기가 의심스럽다고 하였다. 그러나 새롭고 일반적인 이론의 기초를 놓았다는 사실에 만족감을 느꼈던 것 같다[5, 11].

6 결론

주어진 방정식의 해들의 비대칭 유리식을 찾는 것으로 시작하는 라그랑주의 방법이 라그랑주보다 이전에 알려져있던 방법으로 해를 구하는 것보다 훨씬 더 복잡해 보인다. 라그랑주의 목표는 개별 방정식의 해를 구하는 구체적인 과정을 제시하기보다 각 차수별로 다르게 설명되는 방정식의 해법을 한 가지 방법으로 통합한 일반 방정식의 해법을 제시하여 5차 이상의 방정식에도 적용하고자 한 것이었다. 즉, 이전의 3, 4차 방정식의 해법은 라그랑주가 발견한 체계적인 풀이 과정에 대한 예시가 된다. 라그랑주는 이미 알려져있던 3차 및 4차 방정식의 해법을 분석하여, 「주어진 방정식의 해들의 적당한 유리식을 구성해서 해들의 순열에 따라 변하는 유리식의 값을 해로 갖는 대수적으로 풀 수 있는 보조 방정식을 결정하는 것」이 방정식 해법의 공통적인 원리임을 발견하였다.

방정식에 관한 라그랑주의 업적을 요약하면, 알려진 모든 해법을 체계화하고 일반화함으로써 개별 방정식의 풀이만이 아니라 이론화하는 순수수학으로의 발전을 이끌었다는 것이다. 그 과정에서 라그랑주는 최초로 순열이라는 새로운 개념을 도입하였고 방정식의 해들의 형식적인 순서와 보조 방정식의 관계를 도출하였다. 라그랑주가 방정식의 해법을 연구하는 데 순열을 이용한 아이디어는 훗날 일반적인 5차 방정식의 대수적인 해법이 존재하지 않음에 대한 아벨의 증명과 갈루아 이론의 탄생에 결정적인 도움이 되었다. 갈루아 이론에서 군과 체의 개념 등이 생성되면서 현대 대수학이 시작되는 계기가 마련되었음을 생각하면 방정식론에 관한 라그랑주의 업적은 고전 대수학이 현대 대수학으로 바뀌는 변환에 있어서 도약의 발판같은 것이었다고 생각된다.

References

1. Heine J.Barnett, Abstract awakening in algebra: Early group theory in the work of Lagrange, Cauchy, and Cayley, Lecture note, Colorado State University-Pueblo, 2011.
2. William Dunham, *Journey through genius: The great theorems of mathematics*, The Wiley Science Editions, John Wiley and Sons, Inc., 1990.
3. Greg St. George, Symmetric polynomials in the work of Newton and Lagrange, *Math. Mag.* 76(5) (2003), 372–378.
4. Rider R. Hamburg, The theory of equations in the 18th century: The work of Joseph Lagrange, *Archive for History of Exact Sciences* 16 (1976/77), 17–36.
5. Melvin B. Kiernan, The development of Galois theory from Lagrange to Artin, *Archive for History of Exact Sciences* 8 (1971), 40–154.
6. Ng Tuen Wai, History of solving polynomial equations, MATH2001 lecture note (2012), The Univ. of Hong Kong. (http://hkmath.hku.hk/course/MATH2001)
7. Peter Pesic, *Abel's proof: An essay on the sources and meaning of mathematical unsolvability*, The MIT press, 2003.
8. Kragh H. Sørensen, *Niels Henrik Abel and the theory of equations*, 1999. (http://www.henrikkragh.dk/pdf/part199911g.pdf)
9. John Stillwell, *Mathematics and its history*, Undergraduate Texts in Mathematics, 3rd ed., Springer, 2010.
10. Jeff Suzuki, Lagrange's proof of the fundamental theorem of algebra, *MAA Monthly* 113(8) (Oct. 2006), 705–714.
11. Jean-Pierre Tignol, *Galois' theory of algebraic equations*, World Scientific, 2001.
12. Ehrenfried W. von Tschirnhaus, A method for removing all intermediate terms from a given equation, *Acta Eruditorum* (May 1683), 204–207. Translated by R. F. Green, *ACM SIGSAM Bulletin* 37(1) (2003).