

# 대수정규 수명분포를 갖는 제품에 대한 신뢰성 입증시험에서 척도모수의 영향분석

권 영 일

청주대학교 산업공학과

## The Effect of Scale Parameter in Designing Reliability Demonstration Test for Lognormal Lifetime Distribution

Kwon, Young Il

Department of Industrial Engineering, Cheongju University

### <Abstract>

In the fields of reliability application, the most commonly used test methods for reliability demonstration are zero-failure acceptance tests since they require fewer test samples and less test time compared to other test methods that guarantee the same reliability with a given confidence level. For products with lognormal lifetime distribution, the value of scale parameter is usually assumed to be known in designing reliability demonstration tests. It is important to select correct values of scale parameters to guarantee the specified reliability with given confidence level exactly. The effect of using wrong values of scale parameters in designing reliability demonstration test for products with lognormal lifetime distribution is examined and selecting proper values of scale parameters for conservative reliability demonstration is discussed.

**Key Words:** reliability demonstration test(신뢰성 입증시험), lognormal distribution(대수정규분포), scale parameter(척도모수), zero-failure acceptance test(무고장시험)

## 1. 서론

제품이나 부품의 설계과정에서 신뢰성 보증이나 확인을 위한 입증시험(reliability demonstration test)으로 무고장 합격기준을 사용하는 시험방식(zero-failure acceptance test)이 선호되고 있다. 무고장 시험방식은 적용이 수월하고 동일한 요구수명을 주어진 신뢰수준으로 보장하는 시험방식들 중에서 상대적으로 시험시간이나 시료수가 단축된다는 장점을 갖는다.

Nelson (1985), Schneider (1989), Ke (1999), Abernethy (2000), Yan and Herfat (2004), Rahrough (2005), Yadav et al. (2006), 그리고 Kwon (2006, 2008, 2011) 등은 지수분포, 와이불분포 또는 대수정규분포를 대상으로 고장이 거의 관측되지 않거나 무고장 시험데이터를 사용한 신뢰성 평가와 신뢰성 입증시험

방법들을 제시하였으며, Kwon (2012)은 수명이 대수정규분포를 따르는 제품에 대해 요구수명을 규정된 신뢰수준으로 보증하는 경제적인 무고장 신뢰성 입증 시험방법을 설계하였다.

와이불분포의 형상모수 값이나 대수정규분포의 척도모수 값이 미지인 경우, 시료수가 적거나 고장이 거의 관측되지 않는 시험결과를 사용하여 신뢰도를 평가하게 되면 그 결과의 불확실성이 크고 의미 있는 평가가 불가능할 수도 있다. 이와 같은 상황에서는 시험 부품의 특성이나 과거 경험으로부터 도출된 형상모수 또는 척도모수의 추정 값을 사용함으로써 시료 수나 시험시간의 절감과 함께 평가결과의 불확실성을 감소시킬 수 있다. 따라서 신뢰도 입증시험설계에서는 통상적으로 와이불 분포의 형상모수나 대수정규분포의 척도모수는 알고 있다고 가정하는 경우가 많다.

입증시험 설계에서 과거 경험데이터로부터 추정한 모수 값이나 유사제품의 모수 값을 사용하더라도 이 값이 현재 대상제품의 모수 값과 일치한다는 보장은 없다. 잘못된 모수 값을 사용하여 설계한 입증시험이 규정된 신뢰도나 신뢰수준을 충족시키지 못하는 오류를 최소화하기 위해서는, 가능한 모수 값의 범위 내에서 보증 신뢰도나 신뢰수준을 훼손시키지 않는 모수 값을 보수적으로 선택하는 방법을 고려할 수 있다. Kwon (2011)은 수명이 와이불 분포를 따르는 제품에 대한 무고장 신뢰성 입증시험설계에서 형상모수 값의 변화에 따른 시료수와 시험시간의 변화를 파악하고, 잘못된 형상모수 값의 사용이 합격한 제품의 신뢰도와 신뢰수준에 미치는 영향을 분석하였다.

본 연구에서는 수명이 대수정규분포를 따르는 제품에 대한 무고장 신뢰성 입증시험설계에서 척도모수 값의 변화가 시험방식에 미치는 영향을 분석하고, 실제와 다른 척도모수 값을 사용하여 설계한 입증시험에서 규정된 신뢰도나 신뢰수준이 만족되지 않는 오류를 최소화하기 위해, 가능한 척도모수 값의 범위 중에서 보수적 모수 값을 선택하는 방안을 제시하였다.

## 2. 무고장 신뢰성 입증시험

### 2.1 대수정규분포

여기서는 부품의 수명이 대수정규분포를 따르는 경우, 즉 수명을  $T$ 라 할 때  $\ln T$ 가 평균이  $\mu$ , 분산이  $\sigma^2$ 인 정규분포를 따르는 부품에 대한 신뢰도 입증시험 설계문제를 다룬다. 대수정규분포에서  $\mu$ 를 로그평균(log mean) 또는 위치모수(location parameter),  $\sigma$ 를 로그표준편차(log standard deviation) 또는 척도모수(scale parameter)라고 부르며, 시험 설계 시 척도모수  $\sigma$  값은 알고 있다고 가정한다. 모수  $\mu, \sigma$ 를 갖는 대수정규분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t > 0 \quad (1)$$

또한 분포함수(불신뢰도) 및 신뢰도함수는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$F(t) = \Pr(T < t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \quad (2)$$

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \quad (3)$$

여기서  $Z \sim N(0, 1)$  즉 평균이 0, 분산이 1인 표준정규분포를 따르는 확률변수를 뜻하고  $\Phi(\cdot)$ 는  $Z$ 의 분포함수를 나타낸다.

대수정규분포에서 평균수명  $MTTF$ 와 고장률함수  $h(t)$ , 그리고 백분위수명  $B_{100p}$ 는 각각 다음과 같다.

$$MTTF = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (4)$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\phi[(\ln t - \mu)/\sigma]}{\sigma t \{1 - \Phi[(\ln t - \mu)/\sigma]\}} \quad (5)$$

$$B_{100p} = \exp(\mu + \sigma z_p) \quad (6)$$

여기서  $\phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률밀도함수를,  $z_p$ 는  $\Phi(z) = p$ 를 만족하는  $z$ 값을 말한다.

### 2.2 무고장 입증시험

수명이 대수정규분포를 따르는 제품이나 부품의 신뢰도 입증을 위해  $100p\%$  백분위 수명  $B_{100p}$ 를 주어진 신뢰수준  $CL_0$ 로 보증하는 무고장 시험방식을 설계한다. 일반적으로 신뢰성 입증시험 설계에서 대수정규분포의 척도모수  $\sigma$ 는 대상부품에 대한 과거의 사용 경험이나 시험자료로부터 추정하여 사용할 수 있다.

백분위 수명  $B_{100p} = t_0$ 를 주어진 신뢰수준  $CL_0$ 로 보증하기 위해, 크기  $n$ 의 샘플로 동시에 시험을 시작하여 시간  $T_0$  동안 고장이 없으면 합격시키는 무고장 합격 기준을 적용한 신뢰성 입증시험 설계에서, 시료수  $n$ 과 무고장 시험시간  $T_0$ 의 관계는 다음과 같이 구해진다.

먼저 보증수명  $B_{100p} = t_0$  일 때 위치모수를  $\mu_0$  라 하면

$$F(t_0) = \Phi\left(\frac{\ln t_0 - \mu_0}{\sigma}\right) = p \quad (7)$$

로부터

$$\mu_0 = \ln t_0 - \sigma z_p \quad (8)$$

관계가 얻어진다. 또한 보증수명이  $B_{100p} = t_0$  이고 신뢰수준이  $CL_0$  인 무고장 합격기준 시험방식  $(n, T_0)$  는 다음 식을 만족한다.

$$[R(T_0)]^n = 1 - CL_0 \quad (9)$$

이 식으로부터 시료수  $n$  이 주어진 경우 시험시간  $T_0$  는 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi\left(\frac{\ln T_0 - \mu_0}{\sigma}\right) = 1 - (1 - CL_0)^{1/n} \quad (10)$$

에서

$$T_0 = e^{\mu_0 + z_{\Delta(n)}\sigma} = t_0 e^{(z_{\Delta(n)} - z_p)\sigma}. \quad (11)$$

단 여기서

$$\Delta(n) = 1 - (1 - CL_0)^{\frac{1}{n}} \quad (12)$$

을 말한다. 또한 시험시간  $T_0$  가 주어진 경우 시료수  $n$  은 식 (8)과 (10)에서부터

$$n = \frac{\ln(1 - CL_0)}{\ln\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(T_0/t_0)}{\sigma} + z_p\right)\right]} \quad (13)$$

가 된다. 식(11) 또는 (13)에서 규정된 보증수명

$B_{100p} = t_0$  와 신뢰수준  $CL_0$  을 만족하는 다양한  $(n, T_0)$  조합이 존재함을 알 수 있다.

만약 시험시간이 보증수명과 동일하다면, 즉  $T_0 = t_0$  이면 식 (11)에서

$$\Delta(n) = 1 - (1 - CL_0)^{\frac{1}{n}} = p \quad (14)$$

로부터

$$n = \frac{\ln(1 - CL_0)}{\ln(1 - p)} \quad (15)$$

이 되어 시료수  $n$  은 척도모수  $\sigma$  의 영향을 받지 않는다.

실제 백분위 수명이  $B_{100p} = t$  인 제품이 이 시험에 합격될 확률은 다음과 같이 구해진다.

$$Pa(B_{100p} = t) = \left[1 - \Phi\left(z_{\Delta(n)} + \frac{\ln(t_0/t)}{\sigma}\right)\right]^n \quad (16)$$

### 2.3 척도모수가 입증시험방식 $(n, T_0)$ 에 미치는 영향

여기서는 척도모수  $\sigma$  가 입증시험의 시료수  $n$  과 시험시간  $T_0$  에 미치는 영향을 분석한다. 시험시간  $T_0$  가 주어진 경우, 보증수명  $t_0$  와 시험시간  $T_0$  의 비율을

$$D = \frac{T_0}{t_0} \quad (17)$$

라 두면, 식 (13)으로부터  $D > 1$  이면  $n$  은  $\sigma$  의 감소함수이며, 반대로  $D < 1$  이면  $n$  은  $\sigma$  의 증가함수이고,  $D = 1$  이면  $n$  은 식 (15)와 같고  $\sigma$  의 영향을 받지 않음을 알 수 있다.

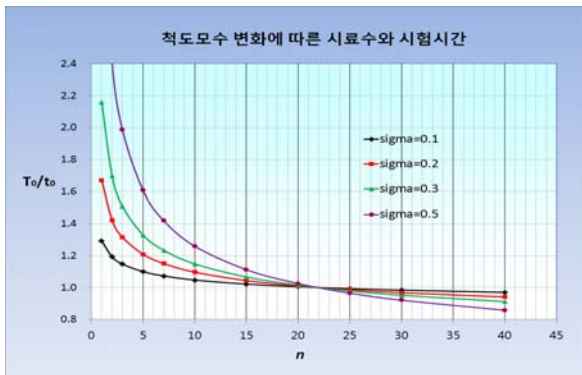
<그림 1>은  $p = 0.1$ ,  $CL_0 = 0.9$  인 입증시험 설계에서 척도모수 값  $\sigma$  에 따른 시료수  $n$  과 보증수명  $t_0$  에 대한 시험시간  $T_0$  의 비율  $D = T_0/t_0$  의 관계를 나타낸 것이다. 그림에서 전반적으로 시험시간이 길수록

시료수는 감소함을 나타내고 있다.

특히 시험시간  $T_0$ 가 요구수명  $t_0$ 와 동일할 때에는 척도모수 값의 변화가 시료수에 영향을 미치지 않는다는 것을 알 수 있다. 따라서 척도모수  $\sigma$ 에 대한 정보가 전혀 없을 때에는 시험시간과 요구수명을 동일하게 둠으로써 척도모수의 영향을 배제한 입증시험방식을 설계할 수 있다.

다음은 잘못된 척도모수 값의 사용이 신뢰성 입증시험 설계에 미치는 영향을 살펴본다.  $B_{100p}$  수명  $t_0$ 를 신뢰수준  $CL_0$ 로 보증하는 무고장시험 설계 시 사용한 척도모수값이  $\sigma_0$ 이고, 실제 척도모수값은  $\sigma$ 일 때 시간  $t_0$ 에서 동일한 신뢰도  $1-p$ 를 갖는, 즉  $B_{100p} = t_0$ 인 제품의 합격확률은 다음과 같이 구해진다.

$$P_a(B_{100p} = t_0) = \left[ 1 - \Phi \left\{ \frac{(z_{\Delta(n)} - z_p)\sigma_0}{\sigma} + z_p \right\} \right]^n \quad (18)$$



<그림 1> 척도모수값  $\sigma$ 가 신뢰성 입증시험의 시료수  $n$ 과 시험시간  $T_0$ 에 미치는 영향

위 식에서  $\sigma = \sigma_0$ , 즉 시험설계 시 사용한 척도모수 값  $\sigma_0$ 가 실제 참값  $\sigma$ 와 일치한다면

$$P_a(B_{100p} = t_0) = 1 - CL_0 \quad (19)$$

가 되어 설계 시 규정된 신뢰수준  $CL_0$ 를 만족함을 볼 수 있다.

식 (18)에서부터  $\sigma$ 와  $\sigma_0$ 가 일치하지 않을 때, 실제 신뢰수준  $CL$ 은

$$CL = 1 - \left[ 1 - \Phi \left\{ \frac{(z_{\Delta(n)} - z_p)\sigma_0}{\sigma} + z_p \right\} \right]^n \quad (20)$$

이 된다.

$\sigma$ 와  $\sigma_0$ 의 비율을

$$\rho = \frac{\sigma_0}{\sigma} \quad (21)$$

라고 두면, 식 (11)과 (19)로부터  $\rho$ 와 실제 신뢰수준  $CL$ 의 관계는 다음과 같이 정리된다.

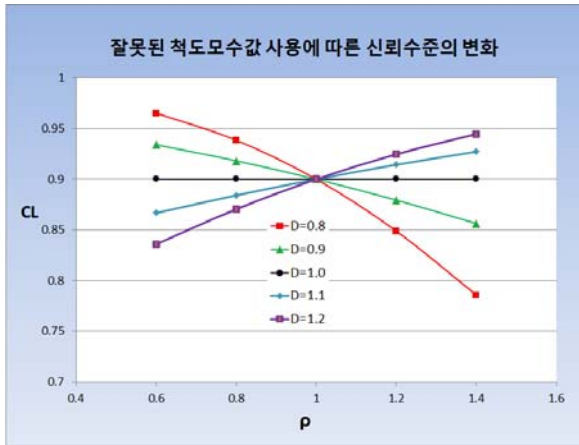
**정리 1.** 보증수명  $t_0$ 와 시험시간  $T_0$ 의 비율  $D$ 를 식 (17)과 같이 두면

- i)  $D = 1$ 이면  $CL$ 은  $\rho$ 의 영향을 받지 않으며  $CL = CL_0$ 가 만족된다.
- ii)  $D < 1$ 이면  $CL$ 은  $\rho$ 의 증가함수이다.
- iii)  $D > 1$ 이면  $CL$ 은  $\rho$ 의 감소함수이다.

위 정리의 내용은 다음과 같은 의미를 나타내고 있다. 먼저 시험시간  $T_0$ 를 보증수명  $t_0$ 와 동일하게 두면, 신뢰수준은 척도모수 값의 영향을 받지 않고 규정된 신뢰수준  $CL_0$ 를 만족한다.  $T_0 < t_0$ 인 경우는 척도모수의 실제 값  $\sigma$ 에 비해 설계 시 사용한 값  $\sigma_0$ 가 클수록  $CL$ 이 증가하므로, 가능한 척도모수 값의 범위에서 가장 큰 값을 선택하여 입증시험을 설계하는 것이 신뢰수준의 저하를 방지하는 보수적 방법이 될 것이다. 끝으로  $T_0 > t_0$ 면 척도모수의 실제 값  $\sigma$ 에 비해 설계 시 사용한 값  $\sigma_0$ 가 클수록  $CL$ 이 감소함을 나타낸다. 이때에는 가능한 척도모수 값의 범위에서 가장 작은 값을 선택하여 입증시험을 설계하는 것이 신뢰수준의 저하를 방지하는 보수적 방법이 된다.

<그림 2>는  $\sigma = 0.5$ 인 제품에 대해  $B_{10} = 1,000$ 시간을 신뢰수준  $CL_0 = 0.9$ 로 보증하는 신뢰성 입증시

험 설계에서 잘못된 척도모수 값 사용에 따른 신뢰수준의 변화를 나타낸 것이다. 그림의 결과는 정리 1의 내용과 일치함을 보여주고 있다.



<그림 2>  $B_{10}$  수명을 신뢰수준  $CL_0 = 0.9$ 로 보증하도록 설계된 신뢰성 입증시험에서  $\rho = \sigma_0/\sigma$ 와 실제 신뢰수준  $CL$ 의 관계

신뢰성 입증시험 설계에서 보수적 척도모수 값을 결정하는데 필요한 척도모수 값의 가능한 범위에 대한 정보는 시험전문가들의 경험이나 의견을 참고하거나, 유사 제품이나 부품에 대한 과거의 시험데이터로부터 척도모수에 대한 신뢰구간을 구하여 활용할 수도 있을 것이다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 수명이 대수분포를 따르는 제품에 대한 신뢰성 입증시험설계에서 척도모수 값의 변화에 따른 시료수와 시험시간의 변화를 파악하고, 잘못된 척도모수 값의 사용이 동일한 신뢰도(백분위 수명)를 보증하는데 있어 실제 신뢰수준에 미치는 영향을 분석하였다. 입증시험에서 시험시간  $T_0$ 가 보증수명  $t_0$ 와 동일하면, 신뢰수준은 척도모수 값의 영향을 받지 않고 규정된 신뢰수준  $CL_0$ 를 만족한다.  $T_0 < t_0$  인 경우는 척도모수의 실제 값  $\sigma$ 에 비해 설계 시 사용한 값  $\sigma_0$ 가 클수록  $CL$ 이 증가하며,  $T_0 > t_0$  면 척도모

수의 실제 값  $\sigma$ 에 비해 설계 시 사용한 값  $\sigma_0$ 가 클수록  $CL$ 이 감소하는 것으로 나타났다. 이들 결과는 신뢰성 입증시험 설계 시 정확한 척도모수 값에 대한 정보가 없을 경우 보증하고자 하는 신뢰도와 신뢰수준이 훼손되지 않는 보수적 척도모수 값을 선택하는데 활용될 수 있다.

#### 참고문헌

- [1] 권영일 (2006), 기계류부품 신뢰성보증을 위한 2단계 시험 방식 설계, 한국품질경영학회지, 제34권, 제1호, pp. 20-26.
- [2] 권영일 (2008), 양산제품에 대한 신뢰성보증 시험방식의 설계, 산업과학연구, 제26권, 제1호, pp. 237-244.
- [3] 권영일 (2011), 경제적인 무고장 신뢰성 인증시험 설계, 한국품질경영학회지, 제39권, 제1호, pp. 71-77.
- [4] 권영일 (2011), 와이불수명분포를 갖는 제품의 신뢰성 인증시험에서 형상모수의 영향분석, 신뢰성응용연구, 제11권, 제3호, pp.225-234.
- [5] 권영일 (2012), 수명이 대수정규분포를 따르는 제품에 대한 경제적인 신뢰성 입증시험 설계, 신뢰성응용연구, 제12권, 제1호, pp. 47-56.
- [6] Abernethy, R. B. (2000), The New Weibull Handbook.
- [7] Ke, H.Y. (1999), Sampling Plans for Vehicle Component Reliability Verification, Quality and Reliability Engineering International, 15, pp. 363-368.
- [8] Nelson, W. (1985), Weibull Analysis of Reliability Data with Few or No Failures, Journal of Quality Technology, Vol. 17, No. 3, pp. 140-146.
- [9] Rahrough, M. (2005), Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstration, Ph.D. Thesis, University of Durham, U.K.
- [10] Schneider, H. (1989), Failure Censored Variable Sampling plans for Lognormal and Weibull Distributions, Technometrics, 31, pp 199-206.
- [11] Yadav, O.P., Singh, N., and Goel, P.S. (2006), Reliability Demonstration Test Planning; A Three Dimensional Consideration, Reliability Engineering and System Safety, 91, pp. 882-893.
- [12] Yan, W. and Herfat, A.T. (2004), Design Criteria Evaluation Using Field Test Data and Reliability Test Improvement Based on Statistical Analysis, IEEE RAMS 2004, pp. 168-172.