대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 2, 103 ~ 124. May 2014

유추 사고과정 모델의 개발

최 남 광* · 류 희 찬**

기존의 문제해결 유추(Problem Solving Analogies)의 사고과정은 표상, 접근, 사상, 적용, 학습의 5단계로 요약된다. 본 연구의 목적은 일반적인 문제해결 유추의 사고과정을 토대로 수학교육이라는 특수성이 반영된 '유추 사고과정 모델'을 개발하여 궁극적으로 학생들이 더 많이 유추를 사용할 수 있도록 도움을 주는데 있다. 모델의 개발과정은 먼저 Euler가 유추를 사용해 수학적 발견을 시도한 역사적인 사례를 분석하여 가설적 유추 사고과정 모델(초안)을 설계한 후, 연구자가 고안한 유추과제 즉, 피타고라스 정리의 증명을 유추적으로 연결시켜 코사인법칙을 증명하는 과제를 수학영재들로 하여금 해결하도록 하고, 그 해결과정에서 나타나는 사고과정의 특성을 반영하여 모델을 2차에 걸쳐 수정 · 보완하였으며, 교육적인 시사점을 도출하였다.

Ⅰ. 서 론

'유추(analogical reasoning)'는 심리학과 수학교육학 분야에서 인간의 인지과정의 핵심기제(Gentner, 1989; Holyoak & Thagard, 1995; English, 2004; Tzurial, & George, 2009)로 가장 주목을 받아온 개념 중 하나이다. 유추는 문제해결뿐만 아니라 귀납적 추론, 수학적 발견, 추상적 개념학습, 창의적 사고를 위한 강력한 사고의 도구로 연구되어 왔다(Alexander et al., 1997; English, 1997, 2004; Gentner et al., 2001; Goswami, 2004; Holyoak & Thagard, 1995; Klauer & Phye, 2008; Novick, 1988; Polya, 1954; Weisberg, 2006; 이경화, 2009a, 2009b; 이승우, 우정호, 2002; 이종희, 김선희, 2002; 우정호, 2002).

이처럼 유추적 사고의 가치를 강조하고 있지만, 수학교육적 측면에서 학생들이 유추적 사고의 가치와 유용성을 이해하고, 유추를 적극적으로 사용하도록 도움을 줄 수 있는 구체적인 활용방안에 대한 연구는 부족하다(English, 2004; 이경화, 2009b). 이를 위해서는 실제로 학생들이 유추를 사용해 스스로 수학적 (재)발견이나 수학문제를 해결하는 경험을 제공하고 그 세부과정을 분석하여, 그 과정에서 나타나는 특징을 바탕으로 교수학적 시사점을 도출할 필요가 있다.

유추에 의한 문제해결(Problem Solving Analogies) 과정에 대한 견해는 학자들마다 조금씩 다르지만 대체적으로 표상(Representation), 접근(Access), 사상(Mapping), 적용(Adaptation), 학습(Learning)의 5단계로 구분하고 있으며 각 단계에 대한 연구는 폭넓게 이루어져왔다(Gentner, 1989; Holyoak & Thagrd, 1995; Novick, 1988; Rattermann, 1997; Thagard, 1988). 그러나, 현재 사용되고 있는 유추에 의한 문제해결 과정은 심리학과 같은 인지과학분야의 학자들이 중심이

* 대전과학고등학교, dclick21@hanmail.net
** 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr

되어 연구되어 왔으며, 수학교육의 특수성을 반영한 연구는 부족하다(Rattermann, 1997; 이신자, 2009; 이종희, 2003; 유상휘, 송상헌, 2013). 즉, 수학자가 수학을 발견할 때 사용하였을 법한 유추적 사고 과정이나 학생들이 수학문제를 해결하는 과정에서 나타나는 유추적 사고의 흐름을 반영한 연구가 필요하다.

따라서 본 연구에서는 실제로 학생들이 유추를 이용해 수학을 (재)발견하고 수학문제를 해결하는 과정을 분석한 결과를 토대로 수학교육이라는 차별화된 영역에 적합한 유추 사고과정 모델을 개발하고, 교육적인 시사점을 도출하고자 한다. 구체적으로 본 연구는 다음과 같은 내용으로 구성되어 있다.

첫째, 수학적 문제해결 과정을 고려한 '가설적 유추 사고과정 모델(초안)'을 설계한다. 이를 위해 유추를 사용해 수학적 발견을 시도한 역사적인 사례를 고찰한다.

둘째, 가설적으로 설계한 유추 사고과정 모델을 실제로 검증해보기 위한 교수실험을 실시한다. 실험은 본 연구자가 고안한 유추과제 즉, 피타고라스 정리의 증명을 유추적으로 연결시켜 코사인 법칙을 증명하는 과제를 수학영재들로 하여금 해결하도록 하고, 그 해결과정에서 관찰된 사고의 흐름을 반영하여 가설적 모델을 수정・보완하여 모델을 완성하고 교육적인 시사점을 도출한다.

Ⅱ. 수학사의 사례분석에 의한 가설적 모델의 설계

유추를 이용해 문제해결이 이루어지려면 새로 주어진 표적(target)문제와 과거에 풀어 본 적이 있는 바탕(source)문제가 필요하다(김미현, 2001). 새로운 표적문제를 해결하기 위하여 과거에 경험하였던 유사한 바탕문제를 상기하여 그 해법을 표적문제의 해결에 맞도록 변화, 적용시킴으로써 문제를 해결하는 것을 문제해결 유추(Problem Solving Analogies)라고 한다(Holyoak & Thagard, 1995; English, 2004).
많은 심리학자와 교육학자들은 유추에 의한 문제해결 과정을 다양하게 제시하였다. 이들이 사용한 용어에는 다소 차이가 있으나, 대체적으로 문제해결 유추의 사고과정을 표상(Representation),

<표 Ⅱ-1> 문제해결 유추의 사고 과정

순서	용어	의미
1단계	표상 (Representation)	새롭게 제시된 표적문제를 이해하여 내면화하는 단계, 부호화(encoding)하는 단계
2단계	접근 (Access)	표적문제와 유사성이 있는 과거에 풀어본 경험이 있는 바탕문제의 요소들을 기억에서 인출하는 단계
3단계	사상 (Mapping)	바탕문제와 표적문제를 서로 비교하여 관련성 및 유사성이 있는 요소들을 서로 연결하는 단계
4단계	적용 (Adaptation)	표적문제를 해결하기 위해 바탕문제를 변형 및 수정하여 적용하는 단계
5단계	학습 (Learning)	문제를 해결하고 나서 그 결과를 바탕으로 새로운 규칙이나 기술을 습득(동화)하거나 기존에 가지고 있던 지식의 개념적 표상을 수정(조절)하는 단계, 도식(schema)이 형성되는 단계

접근(Access), 사상(Mapping), 적합(Adaptation), 학습(Learning)의 5단계로 요약해 볼 수 있다(Genter, 1989; Holyoak, 1985; Holyoak & Thagard, 1995; Novick, 1988; Rattermann, 1997; Thagard, 1988; 이종희, 2003).

Gick & Holyoak(1980)는 다음과 같은 바탕문제와 표적문제로 유추실험을 하였다.

바탕(source) - 요새문제

어떤 장군이 요새에 살고 있는 독재자를 무너뜨리기 위해 요새로 진격하던 중 길에 지뢰가 설치되어 있어서 군대를 한 번에 이동시킬 수 없게 되자, 군대를 여럿으로 나누어 사방에서 요새로 집결시켜 독재자를 무너뜨릴 수 있었다.

표적(target) - 종양문제

악성종양이 있는 환자를 치료해야 하는 의사가 있다. 이 환자의 수술은 불가능하다. 그러나 악성종양이 제거되지 않으면 환자는 사망한다. 악성종양을 제거할 수 있는 방사선 치료가 있다. 만일 방사선의 양이 아주 충분하고 강하게 악성종양에 투입하면, 종양이외에도 건강한 세포도 파괴하게 된다. 방사선을 건강한 세포에 해를 미치지 않을 정도로 약하게 하면 방사선 치료는 악성종양에 별 효과를 거둘 수 없다. 악성종양을 제거하면서 동시에 건강한 세포는 상하지 않게 할 방법은 무엇일까?

바탕문제(요새문제)를 사전에 제공받지 못한 채 한 표적문제(종양문제)만을 해결해야 했던 통제집단에서는 전체의 10%만 해결할 수 있었으나, 바탕문제를 접해본 후 표적문제를 해결한 실험집단에서는 전체의 90%가 표적문제를 해결할

<표 Ⅱ-2> Gick & Holyoak가 실험에 사용한 유추문제의 사고과정 분석

<table>
<tr><th>단계</th><th>단계별 과정</th></tr>
<tr><td>표상
(Representation)</td><td>표적문제(종양문제)를 이해하고 내면화한다.</td></tr>
<tr><td>접근
(Access)</td><td>표적문제와 유사한 바탕문제(요새문제)를 기억에서 인출한다.</td></tr>
<tr><td>사상
(Mapping)</td><td>바탕문제와 표적문제를 서로 비교하여 관련성 및 유사성이 있는 요소들을 다음과 같이 서로 연결(대응)한다.
<table>
<tr><th>Source</th><th>사상관계</th><th>Target</th></tr>
<tr><td>독재자</td><td>유사성(제거대상)
←→</td><td>악성종양</td></tr>
<tr><td>군대</td><td>유사성(공격도구)
←→</td><td>방사선</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>적용
(Adaptation)</td><td>표적문제를 해결하기 위해 바탕문제를 변형 및 수정하여 적용하여 해결한다.
<table>
<tr><th>Source</th><th>사상관계</th><th>Target</th></tr>
<tr><td>독재자</td><td>유사성(제거대상)
←→</td><td>악성종양</td></tr>
<tr><td>군대</td><td>유사성(공격도구)
←→</td><td>방사선</td></tr>
<tr><td>군대를 분산 집중</td><td>유사성(공격방법)
←→</td><td>?</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>학습
(Learning)</td><td>“강한 힘을 여러 개의 약한 힘으로 나누어 여러 방향에서 한 곳으로 모으면 그 힘들이 모인 부분의 강도가 최대가 된다.”는 원리를 학습(도식형성)</td></tr>
</table>

수 있었다. 바탕문제의 구조적 유사성이 표적문제에 영향을 주었기 때문이다. 이들이 실험에 사용한 유추문제를 사고과정에 따라 단계별로 정리해보면 <표 Ⅱ-2>와 같이 나타낼 수 있다.

'종양문제'를 '요새문제'와 연결하여 해결하는 과정을 살펴보았듯이 유추에 의한 문제해결과정의 핵심은 유사성에 근거하여 바탕문제와 표적문제의 대상들(objects)간에 일대일 대응 관계가 성립되는 '사상(Mapping)'에 있다(Goswami, 1991). 그런데, 유추를 사용해 수학문제를 해결할 때에는 요새문제에서 '독재자', '군사'와 종양문제의 '악성종양', '방사능' 간의 사상관계를 형성할 때와 미묘한 차이가 있다. 우리가 다루는 수학적 발견의 과정은 문제해결을 통해 해답을 구하는 것이건, 논리적으로 증명하는 것이건 먼저 추측을 하거나 가설을 수립한 이후 그것을 검증하기 위한 수학적 정당화 과정을 거쳐야 된다. 유추를 사용해 수학문제를 해결할 때에도 크게 다르지 않다. 그러므로, 추측하고 이를 정당화하는 과정이 기존의 문제해결 유추과정의 어느 단계에서 수행되는지를 구체적으로 명시해 주는 것이 상대적으로 수학적 특성을 보다 잘 반영하는 것이 될 것이다. 이를 위해 유추를 사용해 창의적으로 문제를 해결한 역사적인 사례를 고찰하여 수학적 특성을 문제해결 유추과정에 반영하고자 한다.

역사적으로 대담한 추측과 유추를 통해 극적인 수학적 발견을 이뤄낸 사례가 있다. 바로 Euler(1707-1783)의 유추적 발견 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ 이다(Hadar & Kleiner, 2009; Polya, 1954). Euler는 무한급수의 합을 구하기 위해 유한차수의 방정식에서 적용되는 근과 계수의 관계와 다항식의 계수비교법을 무한차수의 방정식에서도 성립할 것이라는 유추적인 사고에 의해 해결하였다. 본 연구자는 Euler가 유추를 통해 수학적 발견을 시도한 사례를 가능한 유사하게 추적해보면서 가설적 유추 사고과정 모델(초안)을 구상하였다. 다음은 그 과정이다.

Euler는 먼저 다음과 같은 표현에 주목하면서 유추적 사고를 시작하였을 것이다.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \qquad \to ㉠$$

즉, 사인함수를 맥클로린 급수에 의해 무한차수 다항식으로 나타낼 수 있다는 사실을 내면화하는 단계인 '표상'과정을 거친다. 그리고 식 ㉠의 좌변에 있는 사인함수의 일반해가 $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 이므로, 식 ㉠을 다음과 같이 표현할 수 있었을 것이다.

$$x(x+\pi)(x-\pi)(x+2\pi)(x-2\pi)\cdots$$
$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \qquad \to ㉡$$

결국 식 ㉡에서 알 수 있듯이, 무한차수의 방정식을 인수분해한 꼴로 나타내었고, 이러한 결과는 자연스럽게 유한차수 방정식의 근과 계수의 관계와 계수비교법이 마음속에 떠올랐을 것이다. 즉, 과거에 경험했던 표상들을 머릿속에서 상기되어 인출하는 '접근'단계를 경험하게 되었을 것이다. 이러한 접근을 통해 "유한차수 방정식에서 근과 계수의 관계와 계수비교법을 이용했던 것처럼 무한차수 방정식에서도 이용해 볼 수 있지 않을까? 한번 시도해 보자!"와 같은 추측(혹은 가설설정)을 자연스럽게 하게 되었을 것이다. 따라서 표적문제(무한차수 방정식의 해결)와 바탕문제(유한 차수의 방정식 해결)의 구조적 특성을 서로 비교하여 관련성 및 유사성이 있는 요소들을 서로 연결하는 '사상'단계에 진입하게 되었다. 그리고 추측을 정당화하기 위해 수학적 지식이나 개념, 원리를 사용하는 수학적 추론과정을 통해 자신의 추측을 정당화시키는 과정을 다음과 같이 ㉢에서 ㉧까지 거치게 된다.

식 ㉡에서 양변을 x 로 나누면

$(x+\pi)(x-\pi)(x+2\pi)(x-2\pi)\cdots$

$$=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \quad \rightarrow ㉢$$

$$\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \quad \rightarrow ㉣$$

$$\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \quad \rightarrow ㉤$$

식 ㉤에서 좌변을 모두 전개하지 않고 x^2항에 초점을 두고 전개하여 계수비교를 하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)x^2+(\cdots)x^4-(\cdots)x^6+\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \quad \rightarrow ㉥$$

$$\therefore \quad -\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{3!} \quad \rightarrow ㉦$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi^2}{6} \quad \rightarrow ㉧$$

이처럼 ㉢에서 ㉧까지의 과정을 거쳐야 비로소 자신의 추측을 정당화하고 결과물을 도출하게 된다. 즉, 사상을 완성하게 된다. 그러므로, 수학에서는 단번에 사상하기 어렵다. 실제로 Euler도 자신의 추측을 10년이 지난 후 정당화를 완성시켰다. 그만큼 수학적 유추과정에서 추측과 정당화는 수학적 유추의 주요 특징이라 말할 수 있을 것이다. 그런데, 식 ㉢에서 ㉣로 넘어가는 단계에 주목해 보자. 일반적으로 n차 방정식 $f(x)=0$의 근이 $a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n$이라 할 때, $f(x)$를

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n) \rightarrow ㉨$$

으로 나타낼 수 있지만, 상수항이 1인 경우에는 $f(x)$를

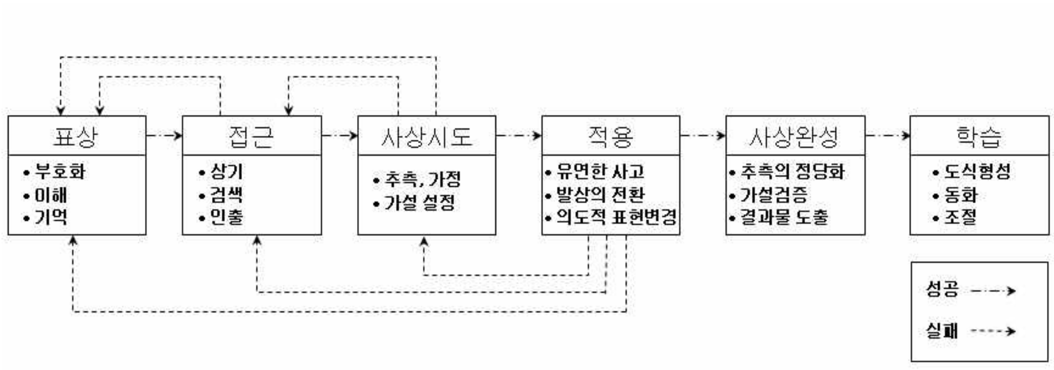
$$f(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\left(1-\frac{x}{a_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)$$

$\rightarrow$ ㉩

의 형태로 나타낼 수 있다. 식 ㉨은 친숙한 표현이지만, 이 표현을 식 ㉩처럼 나타낸다는 것은 결코 쉬운 일이 아니다. 왜냐하면 Bernoulli (1654-1705)도 제곱수의 역수의 합을 구하기 위해 다양한 노력을 시도해보았으나 실패하였고, Euler만이 이러한 표현의 변형을 통해 해결할 수 있었다는 사실에서 그 어려움을 짐작할 수 있다. 식 ㉨을 식 ㉩처럼 수정해서 사용한 것은 바탕영역과 표적영역 사이의 사상을 완성시키기 위해 융통성을 발휘하여 새롭게 적용하였다고 풀이할 수 있다. 이와 같이 '적용'단계는 고정된 사고에서 벗어나 좀 더 유연한 사고로 조건이나 표현을 수정하고 변경해야 한다.

Euler가 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$의 합을 유추를 사용해 발견하는 과정에서 주목할 점은 바탕문제(유한차수 방정식)와 표적문제(무한차수 방정식)를 서로 유사성 및 관련성(근과 계수의 관계와 계수비교법)을 찾아가는 사상과정에 있다. 사상과정을 살펴보면, 먼저 추측이나 가설설정(즉, "유한차수 방정식에서 근과 계수의 관계와 계수비교법을 이용했던 것처럼 무한차수 방정식에서도 이용해 볼 수 있지 않을까?"와 같은 생각)을 한 후, 적용단계에서 융통성과 유연한 사고를 통해 표현을 수정(구체적으로 식 ㉨을 식 ㉩처럼 적용)하고, 수학적 정당화 과정을 거쳐서 사상을 완성하였다.

이와 같이 역사적인 사례에서 확인해 본 것처럼 수학에서의 유추 사고과정은 먼저 추측하고 가설을 수립한 후, 그 추측과 가설을 검증하기 위한 수학적 정당화 과정을 거치고 있음을 확인할 수 있다. 그러므로 수학에서 '사상'단계는 '사



[그림 Ⅱ-1] 가설적인 유추적 사고과정 모델

상시도'단계와 '사상완성'단계로 구분해 주는 것이 더 수학적인 특성을 반영하는 것으로 볼 수 있다. '사상시도'단계는 바탕영역과 표적영역의 요소들이 서로 유사성이 존재하여 일대일사상이 가능할 것이라는 '추측하기' 혹은 '가설설정'을 하는 단계이며, '사상완성'단계는 그 추측을 수학적 지식과 개념을 사용해 '정당화'하고 '가설을 검증'하여 '결과물을 도출'하는 단계로 구분할 수 있다. 이렇게 사상단계를 구분해줌으로써 수학에서의 유추는 추측하고 그 추측을 정당화하는 개연적 추론(Polya, 1954)임을 보다 분명히 하였다. 따라서 수학에서 유추적 사고 과정을 도식화하면 [그림Ⅱ-1]과 같이 나타낼 수 있다.

본 연구자는 이와 같이 수정한 유추 사고과정을 '가설적인 유추 사고과정 모델'이라고 부르고, 실증적으로 학생들이 유추과제를 해결하는 과정에서 나타나는 사고과정의 특징을 반영하여 2차에 걸쳐 가설적 모델을 수정・보완하였다.

Ⅲ. 실험을 통한 모델의 수정・보완

1. 연구대상

본 실험에 참여하게 되는 대상은 연구목적에 맞는 풍부한 반응을 보여줄 것으로 기대되는 학생들로서 과학고등학교에 재학 중인 1학년 학생들이다. 이들은 과학고 입학 당시 수학 및 과학 과목 성적이 또래 연령의 상위 3%이내에 속하며, 과학고에서 실시한 적합한 절차에 따라 선발되었다. 실험은 2차에 걸쳐 실시하였으며 1차 활동은 1학년 전체 91명을 대상으로 실시하였다. 1차 활동을 성공적으로 수행한 학생들(34명/91명) 중 자발적으로 2차 활동에 참여하기를 희망하는 15명을 선정하여 실시하였다. 선발된 15명은 모두 수학적 재능이 탁월하고 평소 도전적이며 새로운 수학문제해결을 즐기는 성향을 보이는 학생들이다. 이들의 개인별 활동지 및 면담과정에서 얻은 정보들을 기반으로 세부적으로 분석하는 질적 연구를 진행하였다.

2. 1차 활동 반응분석과 모델의 1차 수정

1학년 전체 91명을 대상으로 실시한 1차 활동에서 학생들은 바스카라가 제시한 피타고라스 정리 증명법(바탕문제)을 유추를 사용해 코사인 법칙을 증명하는 활동(표적문제)을 수행하게 된다. 피타고라스 정리는 수학적 가치뿐만 아니라 다양한 증명 과정에 내재된 수학적 아이디어로 인해 교육적 측면에서도 비중있게 다루어왔다. 본 연구에서는 피타고라스 정리의 증명을 이해하는 것에 만족하는 것이 아니라 그 속에 함축되어 있는 중요한 수학적 아이디어를 유추적인 사고로 연결하여 코사인 법칙을 증명하게 된다.

1단계 : 바탕문제 해결 - [그림 Ⅲ-1]과 같이 학생들은 바스카라의 피타고라스 정리 증명법을 제공받고 그 증명과정을 이해하는 활동을 실시한다.

다음은 바스카라가 제시한 피타고라스 정리의 증명방법이다. 증명과정을 이해하여라.

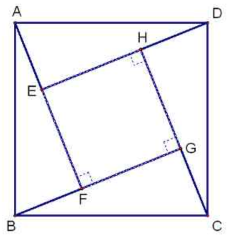
$\overline{\mathrm{AD}}=c$, $\overline{\mathrm{AE}}=b$, $\overline{\mathrm{DE}}=a$ 라고 하면,

$\square\mathrm{ABCD}=\square\mathrm{EFGH}+4\triangle\mathrm{ABC}$이므로

$$c^2=(a-b)^2+4\times\frac{1}{2}ab$$

$$=(a^2-2ab+b^2)+2ab$$

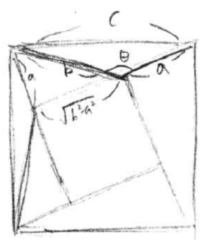
$$=a^2+b^2$$



[그림 Ⅲ-1] 바스카라의 피타고라스 정리 증명

2단계 : 표적문제 해결 - '바스카라의 피타고라스 증명법'을 터득한 후, [그림 Ⅲ-2]와 같이 코사인 법칙을 학생 스스로 증명하는 활동(표적문제)을 실시한다. 이 때 학생들은 바탕문제와 유사성 및 관계성을 유추적으로 사상시켜 표적문제를 해결한다.

바스카라의 피타고라스 정리 증명법을 참고하여 코사인 법칙을 증명해보아라.



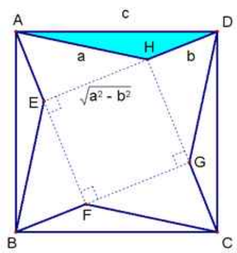
$$c^2=4\left(\frac{1}{2}a^2\right)+4\left(\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-a^2}\right)+(b^2-a^2)$$

$$=2a^2+2a\sqrt{b^2-a^2}+b^2-a^2$$

$$=a^2+b^2+2a\sqrt{b^2-a^2}$$

$$=a^2+b^2+2ab\underbrace{\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)}_{\to -\cos\theta}$$

$$=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$



$\square\mathrm{ABCD}=\square\mathrm{EFGH}+4\triangle\mathrm{ADH}+4\triangle\mathrm{AEH}$ 이므로

$$c^2=(a^2-b^2)+4\times\left(\frac{1}{2}b\cdot b\right)+4\times\left(\frac{1}{2}b\cdot\sqrt{a^2-b^2}\right)$$

$$=a^2+b^2+2b\sqrt{a^2-b^2}$$

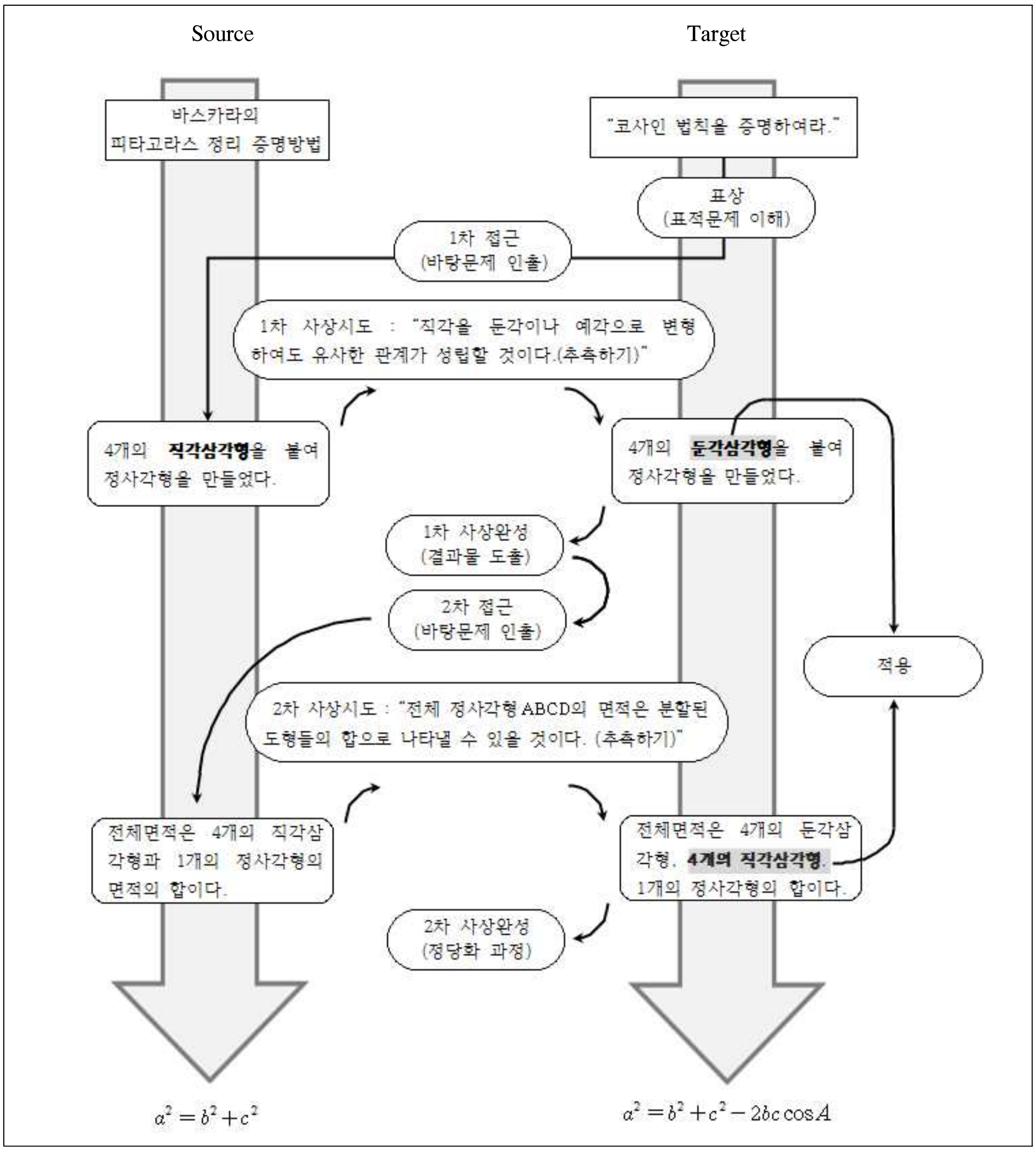
$$=a^2+b^2+2ab\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$

$$=a^2+b^2+2ab\cos(\pi-\mathrm{H})$$

$$=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{H}$$

[그림 Ⅲ-2] 바스카라 증명법을 이용해서 코사인법칙의 증명하기

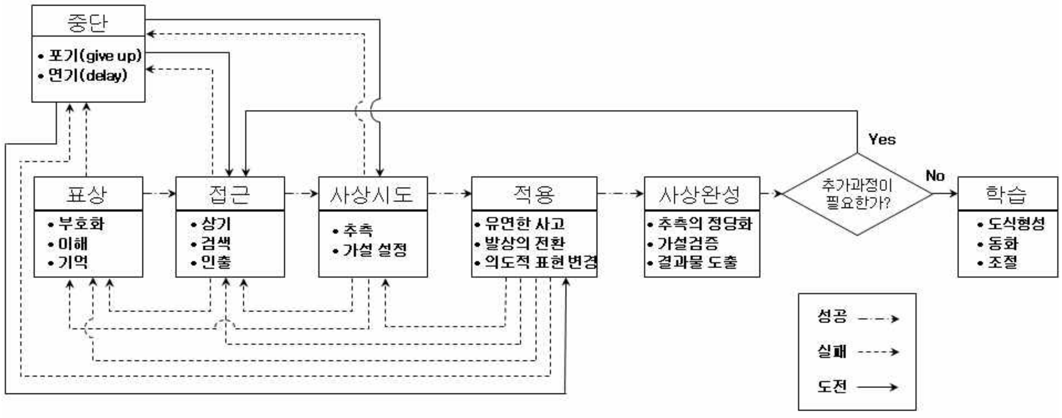
이러한 활동을 통해 학생들은 스스로 유추적 사고의 의미와 가치를 음미하게 하는 한편, 연구자는 학생들의 사고과정을 분석하여 모델을 수정・보완하고자 한다. 학생들이 수행할 활동을 2



[그림 Ⅲ-3] 유추적 사고 과정 분석

단계로 나눠 살펴보면 [Ⅲ-1], [Ⅲ-2]와 같다.

1차 활동에서 코사인법칙을 증명해 낸 학생은 전체 91명 중 35명이었다. 1차 활동에서 표적문제를 해결한 35명의 학생들의 유추적 사고과정을 분석해 본 결과, 바탕문제에서 "합동인 4개의 직각삼각형을 붙여 정사각형ABCD를 만들었다([그림 Ⅲ-1] 참조)"는 속성에 '접근(Access)'해서 표적문제의 "4개의 둔각삼각형을 붙여 정사각형ABCD를 만들었다([그림 Ⅲ-2]참조)"라는 속성으로 '사상(Mapping)'시켰다. 그리고 다시 바탕문제에서 "전체면적(c^2)은 분할된 4개의 직각삼각형과 1개의 정사각형EFGH의 넓이의 합이다



[그림 Ⅲ-4] 유추적 사고 과정 모델의 1차 수정

([그림 Ⅲ-1] 참조)"는 속성에 '2차 접근'하여 표적문제의 "전체면적(c^2)은 분할된 4개의 둔각삼각형, 4개의 직각삼각형, 그리고 1개의 정사각형 EFGH의 넓이의 합이다([그림 Ⅲ-2] 참조)"라는 속성으로 '2차 사상'시켰다. 전체적인 유추적 사고 과정을 사상과정에 초점을 두어 도식화하면 [그림 Ⅲ-3]과 같다.

이와 같이 학생들의 유추반응을 살펴본 결과, 사상과정은 '접근→사상시도→사상완성'으로 일회적이기 보다는 '1차 (바탕문제로) 접근→1차 사상시도(추측하기)→1차 사상완성→2차 (바탕문제로) 접근→2차 사상시도(추측하기)→2차 사상완성→…'과 같이 유한회수를 반복해서 사상과정이 진행되었다. 즉, 한 과정의 사상이 완료되어 도출된 결과물은 또 다른 사상을 시도하기 위한 자료로 재사용될 수 있으며, 이러한 반복적인 사상과정을 통해 축적된 결과물들을 종합하여야 비로소 최종 결과물을 도출될 수 있었다. 이와 같은 결과를 반영하여 유추적 사고과정 모델을 [그림 Ⅲ-4]와 같이 1차 수정하였다.

3. 2차 활동 반응분석과 모델의 2차 수정

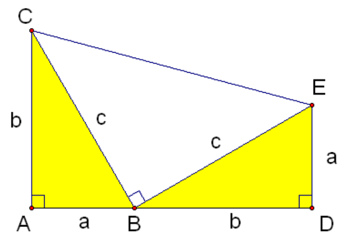
1차 활동을 성공적으로 해결한 35명의 학생들 중 자발적으로 참여하기를 희망하는 15명을 선정하여 2차 활동을 실시하였다. 15명의 학생들에게 추가로 제시한 피타고라스 정리의 증명방법은 중학교 교과서에 수록된 '가필드의 증명법',

다음은 가필드가 제시한 피타고라스 정리의 증명방법이다. 증명과정을 이해하여라.

$$\square ADEC = \triangle ABC + \triangle BCE + \triangle BDE$$

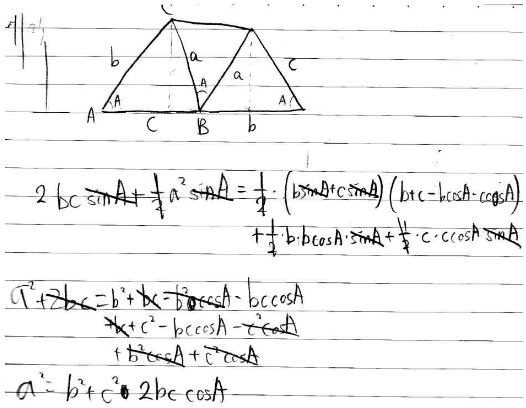
$$\therefore\ \frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2}ab$$

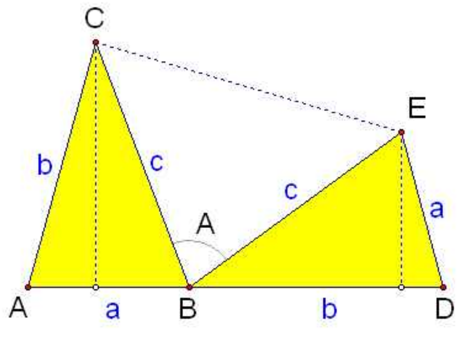
$$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2$$



[그림 Ⅲ-5] 바탕문제로 제시한 가필드의 증명법

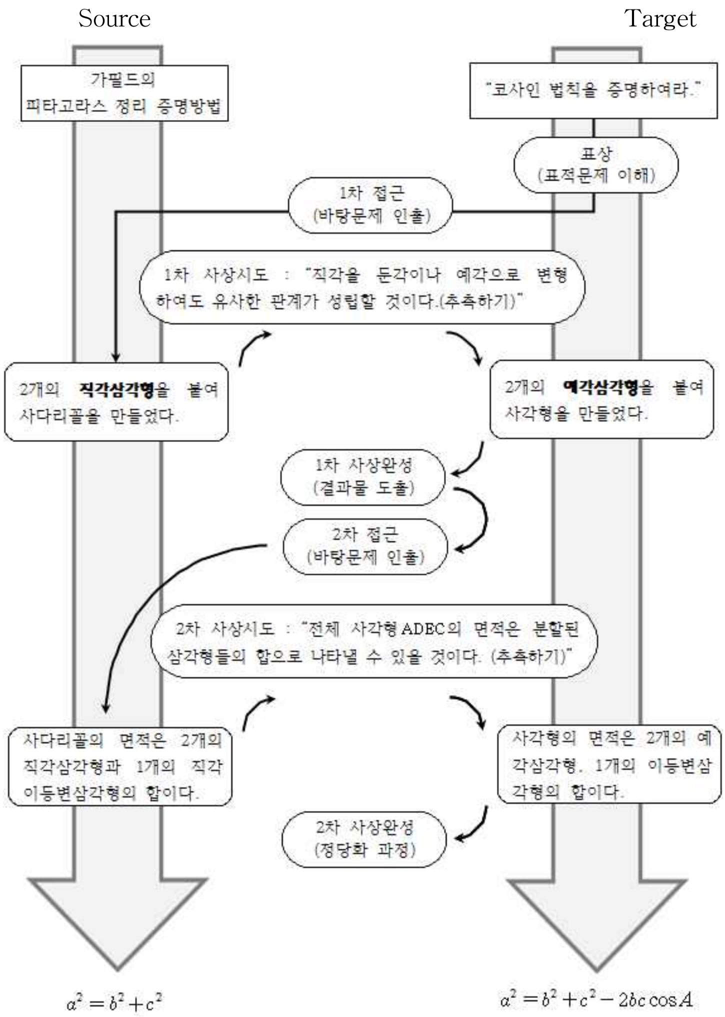
가필드의 피타고라스 정리 증명법을 참고하여 코사인 법칙을 증명해보아라.





$S_{\mathrm{ADEC}} = S_{\mathrm{ABC}} + S_{\mathrm{BCE}} + S_{\mathrm{BDE}}$ 이용

[그림 Ⅲ-6] 표적문제 해결 : 가필드의 증명법을 이용한 코사인 법칙의 증명



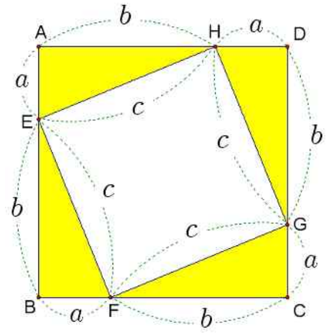
[그림 Ⅲ-7] 가필드의 증명법에 관한 유추적 사고과정 분석

다음은 피타고라스가 제시한 피타고라스 정리의 증명방법이다. 증명과정을 이해하여라.

$$\square \mathrm{ABCD} = \square \mathrm{EFGH} + 4 \times (\triangle \mathrm{AEH})$$

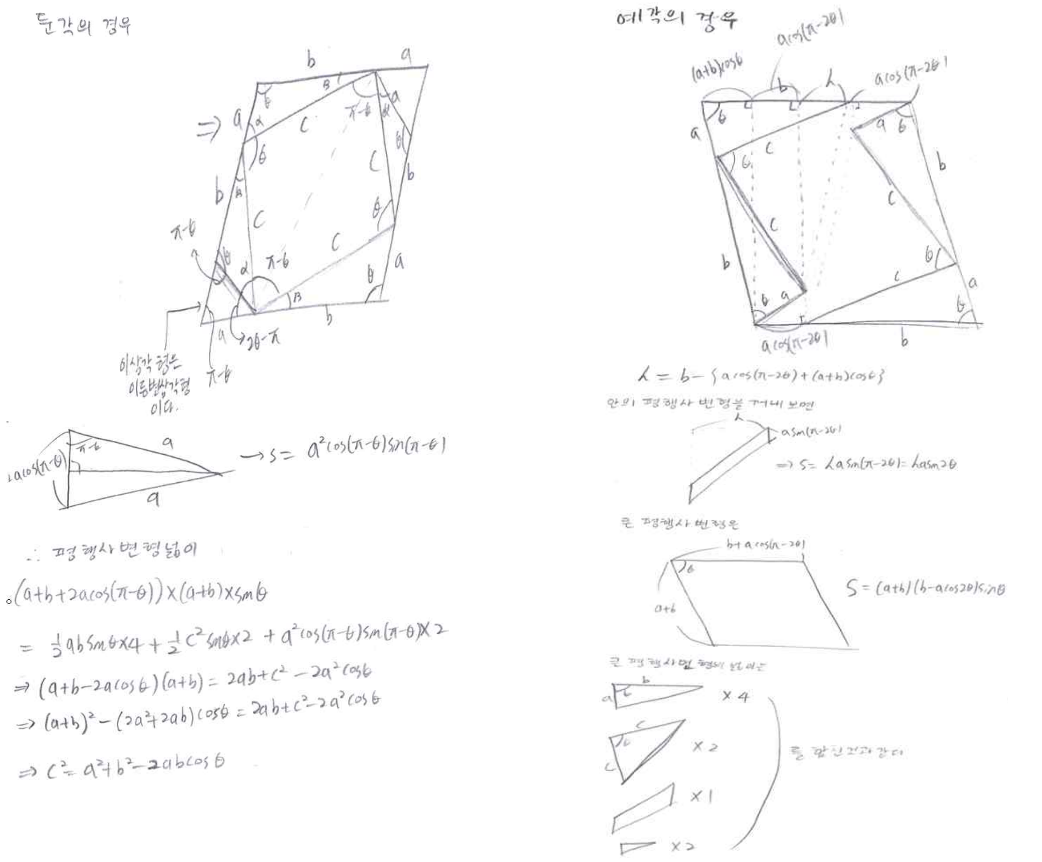
$$\therefore \ (a+b)^2 = c^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$\therefore \ a^2 + b^2 = c^2$$



[그림 Ⅲ-8] 바탕문제로 제시한 ‘피타고라스의 증명법’

피타고라스가 제시한 피타고라스 정리 증명법을 참고하여 코사인 법칙을 증명해보아라.



[그림 Ⅲ-9] 표적문제 해결 : 피타고라스의 증명법을 이용한 코사인 법칙의 증명

‘레오나르도 다빈치의 증명법’, ‘피타고라스 증명법’을 바탕문제로 제공하였다. 본 연구자는 ‘가필드의 증명법’과 ‘레오나르도 다빈치의 증명법’을 바탕문제로 제공하였을 때 코사인법칙을 유도한 사고과정을 서로 대비시켜 분석하고자 한다. 두 증명법을 대비시켜 분석하고자 하는 이유는 ‘적용(Adaptation)’단계의 유무(有無)를 명확히 드러내 주고 있기 때문이다. 먼저, 학생들에게 제시한 가필드의 증명법(바탕문제)은 [그림 Ⅲ-5]와 같다.

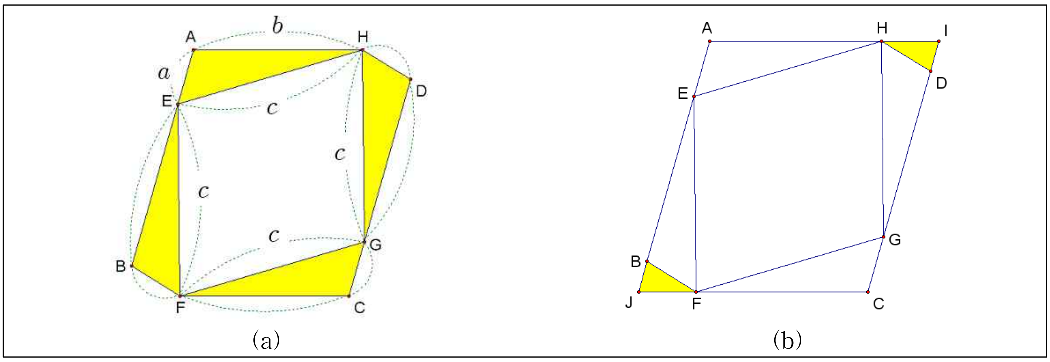
이 증명법을 이용해 코사인 법칙을 증명(표적문제)해 낸 학생은 15명 중 15명이었다. [그림 Ⅲ-6]은 표적문제를 해결한 15명 중 한 학생(M1)의 반응이다.

이 과제에서 15명 전원이 해결할 수 있었던 이유는 2차 실험에 참여한 15명은 1차 활동에서 모두 성공했던 학생들이기 때문일 수도 있겠지만, 무엇보다도 M1학생의 반응에서 볼 수 있듯 피타고라스 정리에서 직각조건을 예각조건에 해당하는 도형들로 변경시키면 피타고라스 정리를 증명할 때 사용했던 넓이의 합을 이용한 방법을 큰 어려움 없이 이용할 수 있었기 때문이다. 즉, [그림 Ⅲ-5]에서 $S_{\text{ADEC}} = S_{\text{ABC}} + S_{\text{BCE}} + S_{\text{BDE}}$)와 [그림 Ⅲ-6]에서 $S_{\text{DECB}} = S_{\text{DAE}} + S_{\text{ABD}} + S_{\text{ABC}}$를 사상시키면 해결할 수 있었다. 따라서 이 증명과정에서는 기존의 사고의 틀에서 벗어나 좀 더 융통성을 발휘하는 ‘적용’단계를 거치지 않았다고 볼 수 있다. 이러한 주장은 ‘피타고라스 증명법’을 이용하여 코사인법칙을 증명하는 과제를 해결한 학생의 반응을 살펴보면 더 분명해질 것이다. 다음은 ‘피타고라스의 증명법’을 바탕문제로 이용하여, 표적문제를 해결한 학생들의 사고과정을 분석한 자료이다. 먼저, 학생들에게 제시한 바탕문제 ‘피타고라스 증명법’은 [그림 Ⅲ-8]과 같다.

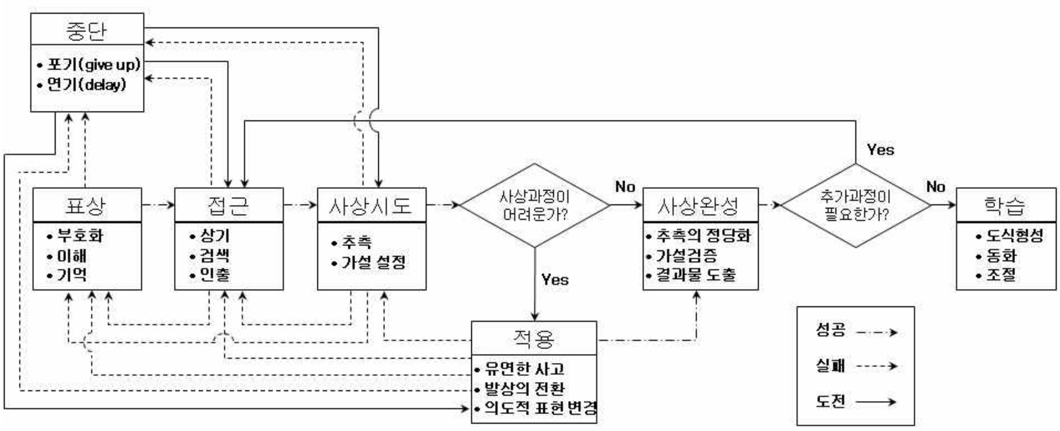
이 증명법으로 이용해 표적문제를 해결한 학생 수는 15명중 6명이었다. 학생들에게 제시한 과제 중 가장 적은 인원이 해결하였다. 표적문제를 해결하는데 성공한 6명중 한 학생(M2)의 반응을 살펴보면 [그림 Ⅲ-9]와 같다.

그런데, 9명의 학생들이 이 과제에서 코사인 법칙을 유도해내지 못했다. 이들은 [그림 Ⅲ-8]의 직각 $\angle\text{HAE}$를 둔각으로 변경하면 정사각형 ABCD는 [그림 Ⅲ-10a]와 같이 육각형 ABFCDH가 변형시켜서 $S_{\text{ABFCDH}} = 4\times(S_{\text{AEH}}) + S_{\text{EFGH}}$을 이용하고자 하지만 원하는 결과를 얻지 못했다.

이러한 상황에서 M2는 다른 학생들과 달리 기존의 고정된 사고에서 탈피해 융통성을 발휘하여 어려운 난관을 극복하였다. 즉, M2는 [그



[그림 Ⅲ-10] 사상관계가 성립될 수 있도록 융통성있게 변형시키기(적용)



[그림 Ⅲ-11] 유추 사고과정 모델(2차 수정)

림 Ⅲ-10b]처럼 육각형ABFCDH에 이등변삼각형HDI와 BJF를 첨가하여 평행사변형AJCI가 되도록 변형시켜, 바탕문제에서 해결한 방법([그림Ⅲ-8]에서 $S_{\mathrm{ABCD}}=4\times(S_{\mathrm{AEH}})+S_{\mathrm{EFGH}}$)과 표적문제에서 해결한 방법([그림 Ⅲ-10b]에서 $S_{\mathrm{AJCI}}=4\times(S_{\mathrm{AEH}})+S_{\mathrm{EFGH}}+2\times(S_{\mathrm{HDI}})$)을 서로 사상(Mapping)시켜 원하는 결과를 도출하였다.

이와 같이 '가필드 증명법'을 이용하여 코사인법칙을 유도할 때에는 이미 경험하여 친숙했던 '바스카라의 증명법'을 이용하여 해결했던 방법을 사용하면 해결할 수 있었기 때문에 '적용'단계를 거치지 않아도 사상시킬 수가 있었지만, '피타고라스 증명법'을 이용해 코사인법칙을 유도할 때는 기존의 고정된 사고에서 벗어나 융통성을 발휘해 적절히 표현을 변형시켜야 사상을 완성시킬 수 있다. 따라서 이러한 '적용'단계의 유무(有無)로 인해 '가필드 증명법'을 이용할 때와 '피타고라스 증명법'을 이용할 때의 유추성공률이 차이가 난 것으로 해석해 볼 수 있다.

그러므로 유추 사고과정에 있어서, 바탕문제와 표적문제 사이의 '유사성'이나 '관계성'을 찾는 과정이 문제를 해결하는 당사자에게 어렵지 않으면 '적용'단계를 거치지 않아도 사상을 완성시킬 수 있지만, 문제가 복잡하거나 난이도가 높아 '유사성'이나 '관계성'을 찾아내기가 어려울 때에는 융통성 있는 사고의 전환을 통해 바탕문제를 적절하게 수정하는 '적용'단계를 거쳐야 비로소 사상을 완성시킬 수 있음을 보여주었다. 이러한 결과를 반영하여 유추 사고과정 모델을 2차 수정하면 [그림 Ⅲ-11]과 같다.

마지막으로 세 번째 과제 '레오나르도 다빈치의 증명법'을 이용하여 표적문제를 해결한 학생들의 사고과정을 분석하고자 한다. 이 과제는 15명 중 9명이 표적문제를 해결하였다. [그림 Ⅲ-12]는 학생들에게 제시한 바탕문제와 표적문제를 해결한 학생의 반응이다.

학생들의 반응을 분석해보면, 바탕문제에서 직각([그림 Ⅲ-14a]의 $\angle\mathrm{ACB}=90^{\circ}$)을 표적문제에서는 일반각([그림 Ⅲ-14b]의 $\angle\mathrm{ACB}=$ 예각)으로 변경시킨 후, 바탕문제에서 '삼각형이 서로 합동이다(즉, [그림 Ⅲ-14a]에서 $\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{ICJ}$)'와 표적문제에서 '삼각형의 넓이가 서로 같다(즉, [그림 Ⅲ-14b]에서 $S_{\mathrm{ICJ}}=\frac{1}{2}ab\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 이고 $\mathrm{S_{ABC}}=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 이므로 $S_{\mathrm{ABC}}=S_{\mathrm{ICJ}}$이 성립)'가 서로 사상된다. 바탕문제에서 '사각형이

다음은 레오나르도 다빈치가 제시한 피타고라스 정리의 증명방법이다. 증명과정을 이해하여라.

$\overline{AC} \,//\, \overline{FD}$, $\overline{BC} \,//\, \overline{EF}$ 가 되게 하면

$\triangle ABC \equiv \triangle ICJ \equiv \triangle DEF$

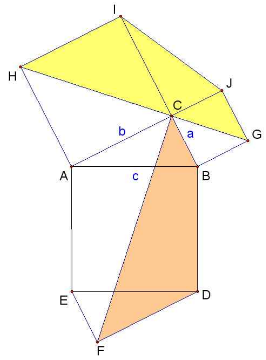
$\square HIJG \equiv \square HABG \equiv \square CAEF \equiv \square FDBC$

$\therefore$ ⬡$ABGJIH \equiv$ ⬡$CAEFDB$

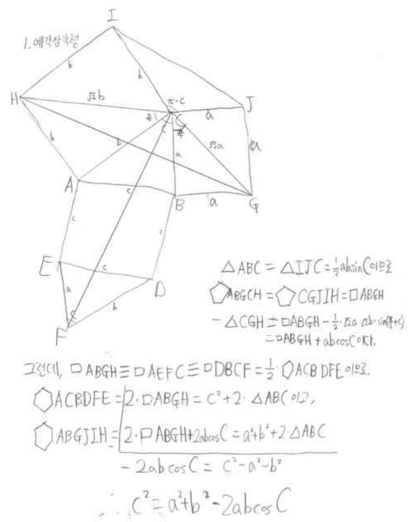
$\therefore$ ⬡$ABGJIH - 2\triangle ABC =$ ⬡$CAEFDB - 2\triangle ABC$

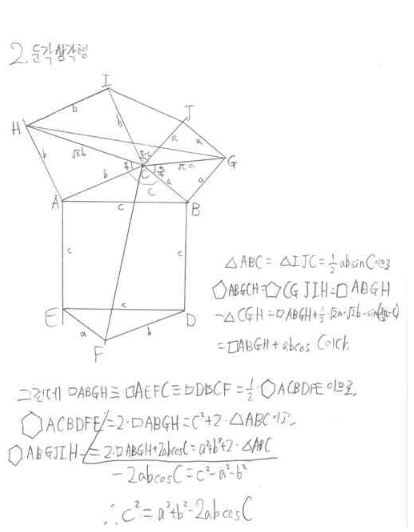
$\therefore \square CBGJ + \square ACIH = \square AEDB$

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$



레오나르도 다빈치가 제시한 피타고라스 정리 증명법을 참고하여 코사인 법칙을 증명해보아라.



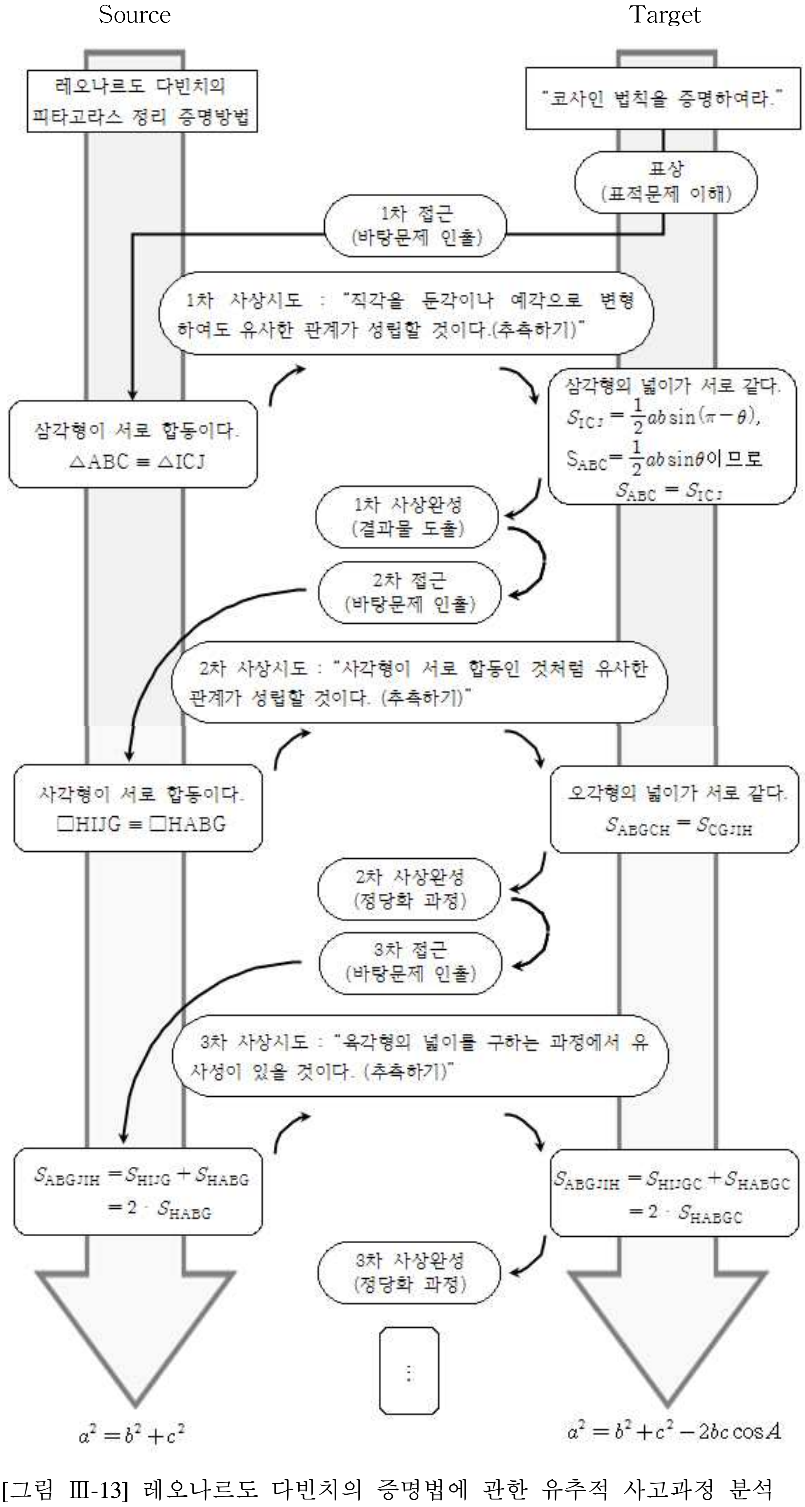


[그림 Ⅲ-12] '레오나르도 다빈치의 증명법'을 이용한 코사인 법칙의 증명

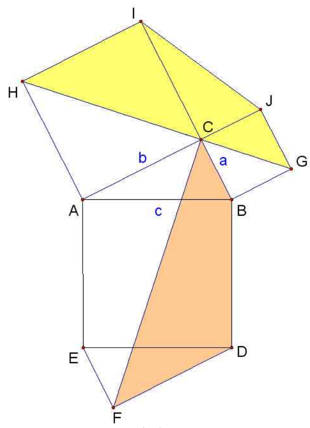
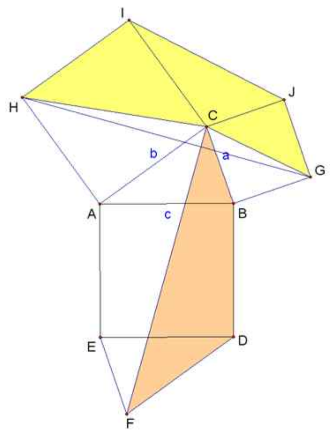
서로 합동이다(즉, [그림 Ⅲ-14a]에서 $\square HIJG \equiv \square HABG$)'와 표적문제에서 '오각형의 넓이가 서로 같다(즉, [그림 Ⅲ-14b]에서 $S_{ABGCH} = S_{CGJIH}$)'가 서로 사상된다. 또한, 바탕문제에서 '육각형 $ABGJIH$ 의 넓이를 구하는 과정(즉, [그림 Ⅲ-14a]에서 $S_{ABGJIH} = S_{HIJG} + S_{HABG} = 2 \cdot S_{HABG}$)'과 표적문제에서 '육각형 $ABGJIH$ 의 넓이를 구하는 과정(즉, [그림 Ⅲ-14b]에서 $S_{ABGJIH} = S_{HIJGC} + S_{HABGC} = 2 \cdot S_{HABGC}$)'이 서로 사상된다. 전체적인 유추적 사고과정을 도식화하면 [그림 Ⅲ-13]과 같다.

즉, 레오나르도 다빈치의 피타고라스 정리 증명법(바탕문제)을 이용해 코사인 법칙을 증명(표적문제)하는데 있어 사상관계가 보다 잘 드러나도록 재진술하면 다음과 같다.

[그림 Ⅲ-14]에서 보는 것처럼, 바탕문제와 표적문제 사이의 관계적 유사성을 발견해내기가 쉽지 않은 경우에는 유연한 사고와 융통성을 발휘해 바탕문제를 적절히 수정하고 변경하는 '적용'단계를 거쳐야 하며, 바탕영역과 표적영역 사이에 구조적인 사상관계를 발견해내기가 수월하



[그림 Ⅲ-13] 레오나르도 다빈치의 증명법에 관한 유추적 사고과정 분석

바탕문제	표적문제
 (a)	 (b)

c^2+2S_{ABC}	$\overleftrightarrow{\text{사상1}}$	c^2+2S_{ABC}
$=S_{\mathrm{ABDE}}+S_{\mathrm{ABC}}+S_{\mathrm{EFD}}$	$\overleftrightarrow{\text{사상2}}$	$=S_{\mathrm{ABDE}}+S_{\mathrm{ABC}}+S_{\mathrm{EFD}}$
$=S_{\mathrm{ACBDFE}}=2S_{\mathrm{AEFC}}=2S_{\mathrm{ABGH}}$	$\overleftrightarrow{\text{사상3}}$	$=S_{\mathrm{ACBDFE}}=2S_{\mathrm{AEFC}}=2S_{\mathrm{ABGH}}$
$=S_{\mathrm{ABGJIH}}$	$\overleftrightarrow{\text{사상4}}$, 적용	$=2(S_{\mathrm{ABGCH}}-S_{\mathrm{HGC}})=2S_{\mathrm{ABGCH}}-2S_{\mathrm{HGC}}=S_{\mathrm{ABGJIH}}-2S_{\mathrm{HGC}}$
$=S_{\mathrm{BGJC}}+S_{\mathrm{ACIH}}+S_{\mathrm{ABC}}+S_{\mathrm{CJI}}$	$\overleftrightarrow{\text{사상5}}$, 적용	$=(S_{\mathrm{BGJC}}+S_{\mathrm{ACIH}}+S_{\mathrm{ABC}}+S_{\mathrm{CJI}})-2S_{\mathrm{HGC}}$
$=a^2+b^2+S_{\mathrm{ABC}}+S_{\mathrm{CJI}}$ $=a^2+b^2+2S_{\mathrm{ABC}}$	$\overleftrightarrow{\text{사상6}}$, 적용	$=\left(a^2+b^2+2S_{\mathrm{ABC}}\right)-2S_{\mathrm{HGC}}$ $=\left(a^2+b^2+2S_{\mathrm{ABC}}\right)-2\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\,a\cdot\sqrt{2}\,b\sin(90^\circ+C)\right)$ $=\left(a^2+b^2+2S_{\mathrm{ABC}}\right)-2ab\cos C$
$\therefore\ c^2=a^2+b^2$	$\overleftrightarrow{\text{사상7}}$	$\therefore\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

[그림 Ⅲ-14] '레오나르도 다빈치의 증명법'을 이용한 코사인 법칙의 증명

다면 '적용'단계를 거치지 않아도 사상을 완성할 수가 있음을 재차 확인하였다. 결국, 2차 수정한 유추 사고과정 모델에 맞춰 '레오나르도 다빈치의 증명법'을 이용한 코사인 법칙의 증명을 시도한 학생의 반응을 검토해 본 결과, 모델은 수정할 필요가 없었으며 모든 과정이 적합하였다.

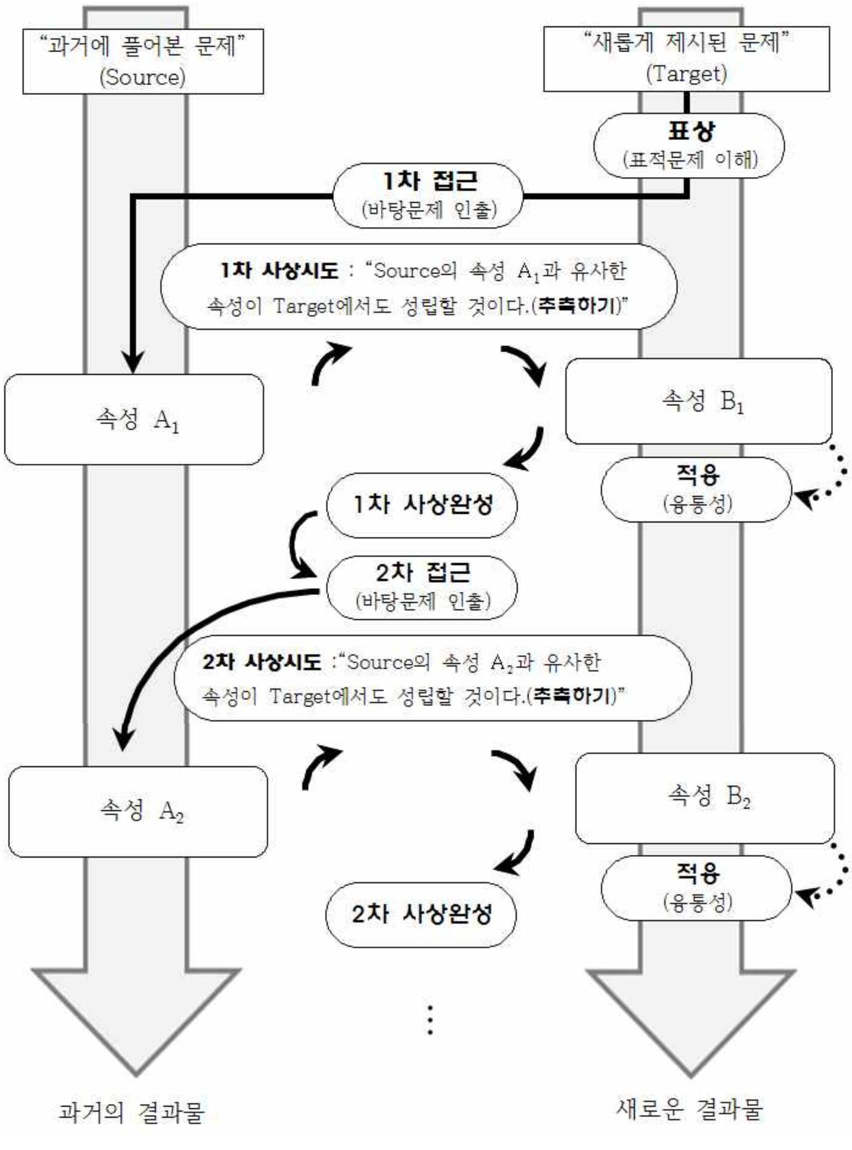
Ⅳ. 결론 및 시사점

기존의 문제해결 유추의 사고과정에 관한 연구는 심리학과 인지과학 분야에 기반을 두고 있으며, 그 과정은 표상, 접근, 사상, 적용, 학습의 5단계로 요약된다. 이러한 일반적인 문제해결 유추의 사고과정에 토대로 본 연구에서는 수학교육이라는 특수성이 반영된 유추 사고과정 모델을 개발하여 궁극적으로 학생들이 더 많이 유추를 사용할 수 있도록 도움을 주고자 하였다. 개발 과정은 먼저 Euler가 유추를 사용해 수학적 발견을 시도한 역사적인 사례를 분석하여 가설적 유추 사고과정 모델을 설계한 후, 실제로 유추과제로 실험을 실시하여, 학생들의 유추 사고

과정 반응분석을 통해 모델을 2차에 걸쳐 수정, 보완하였으며 그 결과 [그림 Ⅲ-11]과 같은 유추 사고과정 모델을 완성하였다.

본 연구를 통해 얻은 결과는 다음과 같다.

기존의 유추과정에서 사상단계를 '사상시도'단계와 '사상완성'단계로 양분하여 '사상시도'단계와 '사상완성'단계의 특성을 구체적으로 명시하였다. 즉, '사상시도'단계에서는 표면적으로 서로 관련이 없어 보이는 개념과 개념 사이의 구조적 관계를 연결시키기 위한 시도로 '추측하기'나 '가설 설정하기'가 진행되며, '사상완성'단계에서는 설정한 가설 혹은 추측의 모호했던 구조적 관계를 수학적 정당화 과정을 통해 검증을 실시하여 투명하게 드러내는 단계로 구분하였다. 예



[그림 Ⅳ-1] 수학에서 문제해결 유추(Problem Solving Analogies)의 사고 과정

를 들어 Euler가 "유한차수 방정식의 근과 계수의 관계(바탕문제)를 이용했던 것처럼 무한차수 방정식에서도 근과 계수의 관계(표적문제)를 사용할 수 있지 않을까?"라고 생각한 것과 본 실험에서 "중학교에서 배운 피타고라스 정리(바탕문제)와 고등학교에서 배운 코사인 정리(표적문제)가 서로 관계가 있지 않을까?"라고 생각하는 것이 곧 추측과, 가설을 수립하는 '사상시도'단계이며, 이렇게 추측한 바탕문제와 표적문제 사이의 관계를 수학적 정당화 과정을 통해 구조적 관련성이 도출하는 단계가 '사상완성'단계이다.

수학적 유추과정에서 '적용'단계는 '접근→사상시도→적용→사상완성'과 같이 '사상시도'단계와 '사상완성'단계 사이에서 발생하며, 바탕영역이 표적영역 사이의 구조적인 사상관계를 발견해내기 어렵다면 발상의 전환, 융통적인 사고, 유연한 사고를 통해 바탕영역을 수정해야 비로소 사상을 완성시킬 수가 있으며, 바탕영역과 표적영역 사이에 구조적인 사상관계를 발견해내기가 수월하다면 '적용'단계를 거치지 않아도 사상을 완성할 수가 있다.

수학적 유추과정에서 사상과정은 '접근→사상시도→사상완성'으로 일회적일 때도 있지만 '1차 접근→1차 사상시도→1차 사상완성(1차 결과물 도출)→2차 접근→2차 사상시도→2차 사상완성(2차 결과물도출)→…'와 같이 반복적으로 사상이 시도되는 경우로 보는 것이 더 적절하다고 판단된다. 이러한 반복적인 사상과정을 통해 축적된 결과물들을 종합하여야 비로소 최종 결과물을 도출된다. 이러한 이유에서 수학문제를 해결하는 것이 다른 문제를 해결하는 것보다 더 어려운 원인으로 해석된다. 이러한 결과들을 도식화하면 [그림 Ⅳ-1]과 같다.

마지막으로 본 연구를 통해 얻은 시사점을 서술하고자 한다. 본 연구에서 수학적 특수성을 반영하여 설계한 '유추 사고과정 모델'은 유추를 사용해 수학적 발견이나 문제를 해결하고자 하는 학생들의 반응을 보다 분석적으로 판단할 수 있게 해 줄 것이며, 그에 따라 적절한 교수학적 처치도 제공해 줄 수 있을 것이다. 예를 들어 <표 Ⅳ-1>과 같이 '사상시도', '적용', '사상완성' 단계의 특징에 맞는 사고전략을 학생들이 할 수 있도록 독려해 주어 더 많이 유추를 사용해 문제를 해결할 수 있도록 도와줄 수 있을 것이다. 이 부분에 대한 별도의 교수실험을 실시해보는 추가적인 연구가 요구된다.

본 연구에서 학생들이 표적문제였던 코사인법칙을 다양한 방법으로 증명할 수 있었던 것은 학생 스스로 피타고라스 정리와 코사인 법칙 사이의 구조적 유사성을 연결하였기 때문이다. 만약 피타고라스 정리의 증명법을 사전에 바탕문제로 제공하지 않았다면, 수학적 재능이 우수한 수학영재들이라도 본 실험에서 나타난 것처럼 다양한 방법으로 코사인 법칙을 증명해 낼 수 없었을 것이다. 이것이 유추의 힘이다. 유추는 새로운 수학적 지식이나 개념(Target)을 기존에 형성된 개념(Source)과 유의미한 통합이 가능하게 도와준다. 학생들은 수학적 지식들 사이의 관계를 서로 연결하는데 어려움을 느낀다. 학생들은 개념을 '개별화(구획화)'하려는 경향이 있다. 즉, 개념들이 서로 충돌하지 않도록 개념들 사이에 칸막이를 설치하여 개념을 개별화하는 경향이 있다(Hiebert & Lefevre, 1987, 나귀수, 2011 재인용). 유추는 이러한 개념들 사이를 개별화하려는 학생들의 성향을 극복시킬 수 있는 대안으로 활용가치가 있다고 판단된다. 그러므로 교사는 학생들에게 새로운 수학적 지식이나 내용을 지도하고자 할 때, 그것과 구조적으로 유사한 바탕영역에 해당하는 자료를 끊임없이 발견하고 구상하여 학생들에게 제공할 필요가 있다. 이러한 노력이 학생 스스로 개념과 개념을 서로 연결하고 통합하도록 도와줄 수 있기 때문이다. 그

<표 Ⅳ-1> 유추 사고과정의 단계별 사고전략의 예

단계	사상 단계별 의미와 학생들에게 제시 가능한 사고전략의 예
사상시도 (Try Mapping)	새롭게 제시된 표적문제를 서로 비교하여 관련성 및 유사성이 있는 요소를 서로 연결하기 위해 추측(가정)하는 단계
	- 표적문제의 어떤 특정한 요소(표현, 속성, 성질 등)와 바탕문제의 어떤 특정한 요소가 서로 관계가 있을지 생각해보아라. - 표적문제의 무엇이 바탕문제 무엇과 유사성이 있을 것이라고 추측을 해보아라. - 바탕문제의 어떤 요소가 표적문제의 어떤 요소와 관계가 있을 것이라고 가설을 설정하여라.
적용 (Adaptation)	융통성을 발휘해 바탕문제와 표적문제 사이에 사상이 성립될 수 있도록 의도적으로 조건, 표현, 속성, 성질 등을 적절히 변형 및 수정하여 적용하는 단계
	- 융통적인 사고력을 발휘하여 바탕문제를 변형하여라. - 발상의 전환이 필요하니 유연하게 사고하여라. - 기존의 사고의 틀에서 벗어나라. - 표현을 변경하고, 수정하여라.
사상완성 (Complete Mapping)	수학적 정당화 과정을 통해 추측을 검증하고 사상을 완성하는 단계이며, 결과물을 도출하는 단계
	- 수학적 지식, 개념, 원리를 이용하여 추측을 정당화시켜라. - 수학적 추론을 사용하여 가정을 검증하여라.

러면서 점진적으로 바탕영역에 해당하는 자료를 학생 스스로 발견하여 표적영역과 연결하게 해야 할 것이다.

유추 사고과정에서 '적용'단계는 문제를 기존의 사고방식에서 벗어나 새로운 시각으로 접근하는 발상의 전환이 필요한 단계인 만큼 문제를 해결하는 당사자의 창의적인 능력이 표출되는 단계로 볼 수 있다. 실제로 '가필드 증명법'을 이용할 때와는 달리 '피타고라스 증명법'을 유추적으로 연결하여 표적문제를 해결할 때에는 수학영재들도 기존의 사고의 틀에서 벗어나 새롭게 접근하는 적용단계를 어려워하였으며, 소수의 학생(6명/15명)만이 고정관념에서 탈피해 융통성을 발휘하는 창의적인 발상으로 조건이나 표현을 새롭게 변경해서 적용시켜야 사상을 완성할 수 있었다. 그러므로, 서로 연결시킬 수 없을 것 같은 독립된 개념과 개념, 혹은 서로 관계가 없을 것 같은 내용과 내용이더라도 스스로 유연한 사고와 발상의 전환을 통해 문제의 조건이나 표현을 의도적으로 변경(이경화, 2009b)하여 창의적으로 연결시켜보는 '적용'단계를 더 많이 경험할 수 있는 교수·학습과정을 설계하거나 유추 문항을 개발하여 활용하는 것이 학생들을 더 높은 지적수준으로 유도하게 해 줄 것으로 판단된다.

Ⅳ. 참고 문헌

김미현(2001). **바탕문제 학습 조건이 자발적 유추전이에 미치는 효과**. 고려대학교 대학원 박사학위 논문.

나귀수(2011). **기하와 증명 교수학습이론**, 예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구, 182-253. 서울:경문사.

우정호(2002). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교 출판부.

이경화(2009a). **영재아들의 세 유형의 유추 과제 해결**. 수학교육학연구, 19(1), 45-61.

이경화(2009b). **수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할**. 수학교육학연구, 19(3), 335-369.

이신자(2009). **초등학교 4학년 학생의 수학 문제 해결에서 나타나는 유추적 사고과정 분석**. 경인교육대학교 대학원 석사학위 논문.

이승우·우정호(2002). **학교수학에서의 유추와 은유**. 수학교육학연구, 12(4), 523-542.

이종희(2003). **수학문장제 해결과 유추**. 교과교육학연구, 7(2), 63-79.

이종희·김선희(2002). **인수분해 문제해결과 유추**. 학교수학, 4(4), 581-599.

유상휘, 송상헌(2013). **사다리꼴 넓이 구하기 활동에서 나타나는 수학적 의사소통과 유추적 사고 과정 분석**. 수학교육학연구, 23(2), 253-267.

Alexander, P. A., White, C. S. & Daugherty, M. (1997). Analogical Reasoning and early mathematical learning. In L.D. English(Ed), Mathematical reasoning: Analogies, Metaphors, and Images (pp117-147). Lawrence Erlbaum. Associates Publishers.

English, L. D. (1997). Analogies, Metaphors, and Image: Vehicles for Mathematical Reasoning, In L.D. English(Ed), Mathematical reasoning: Analogies, Metaphors, and Images (pp3-18). Lawrence Erlbaum. Associates Publishers.

English, L. D. (2004). Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood. In L.D. English(Ed), Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners. (pp. 1-22). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gentner, D. (1989). The Mechanism of analogical reasoning. In S. Vosniadou & A. Ortony(Eds.) *Similarity and Analogical Reasoning* (pp. 199-241). Cambridge: Cambridge University Press.

Gentner, D., Holyoak, K. J. & Kokinov, B. N. (Eds.)(2001). The analogical mind: Perspective from cognitive science. Cambridge, MA: MIT Press.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J.(1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12, 306-355.

Goswami, U. (1991). Analogical reasoning: What develop? A review of research and theory. Child Development, 62, 1-22.

Goswami, U. (2004). Commentary: Analogical Reasoning and Mathematical Development. In L.D. English(Ed), Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners. (pp. 169-186). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hadar, N. & Kleiner, I.(2009). Intellectual Courage and Mathematical Creativity. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 31-50). Rotterdam; Boston; Taipei: Sense Publishers.

Holyoak, K. J. & Thagard, P. (1995). Mental Leaps: Analogy in creative thought. Cambridge, MA: MIT Press.

Klauer, K.J. & Phye, G.D. (2008). Inductive Reasoning. A Training Approach. Review of Educational Research, 78, 85-123.

Koestler, A. (1964). The act of creation. New York: Macmillan.

Novick, L. R.(1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. Journal of Experimental Psychology; Learning, Memory, and Cognition, 17, 398-415.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning I: Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rattermann, M. J.(1997). Commnetary: Mathematical Reasoning and Analogy, In L.D. English(Ed), Mathematical reasoning: Analogies, Metaphors, and Images (pp.246-262). Lawrence Erlbaum. Associates Publishers.

Thagard, P(1988). Dimensions of analogy. In D.H. Helman(Ed.), Analogical reasoning: Perspectives of artifical intelligence, cognitive, and philosophy(pp. 105-124), Dordrecht, The Netherland: Kluwer.

Tzuriel. D. & George. T. (2009). Improvement of Analogical Reasoning and Academic Achievements by the Analogical Reasoning Programme, Educational & Child Psychology, 26(3), 71-94.

Weisberg, R. W. (2006). Creativity: Understanding Innovation in Problem Solving, Science, Invention, and the Arts. NJ: John Wiley & Sons. (김미선 역). 서울: 시그마프레스.

Development of a Model for the Process of Analogical Reasoning

Choi, Nam Kwang (DaeJeon Science High School)
Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)

The process of analogical reasoning can be conventionally summarized in five steps : Representation, Access, Mapping, Adaptation, Learning. The purpose of this study is to develop more detailed model for reason of analogies considering the distinct characteristics of the mathematical education based on the process of analogical reasoning which is already established. Ultimately, This model is designed to facilitate students to use analogical reasoning more productively. The process of developing model is divided into three steps. The frist step is to draft a hypothetical model by looking into historical example of Leonhard Euler(1707-1783), who was the great mathematician of any age and discovered mathematical knowledge through analogical reasoning. The second step is to modify and complement the model to reflect the characteristics of students' thinking response that proves and links analogically between the law of cosines and the Pythagorean theorem. The third and final step is to draw pedagogical implications from the analysis of the result of an experiment

* Key Words : Analogical reasoning(유추), the process of analogical reasoning(유추적 사고과정), Pythagorean theorem(피타고라스 정리), the law of cosines(코사인 법칙)

논문접수 : 2014. 3. 15
논문수정 : 2014. 4. 22
심사완료 : 2014. 4. 24