대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 2, 125 ~ 143. May 2014

수학적 토론에서 의사소통적 갈등과 인지 갈등의 관계

오 택 근* · 박 미 미** · 이 경 화***

본 연구에서는 의사소통적 갈등과 인지 갈등의 관계를 확인하기 위해 과학영재학교 3학년 미적분학Ⅱ 수업시간에 이루어진 수학적 토론 및 개별 면담 사례를 분석하였다. 교실에서 수학적 토론은 접촉평면에 관하여 인지 갈등을 보이는 한 학생의 질문에서 시작되었다. 분석 결과 토론 과정에서 사회적으로 구성된 지식을 관습화하여 사용함으로서 의사소통적 갈등이 해소되고 있지만 인지 갈등은 완전히 해소되지 않고 있음을 확인하였다. 또한 토론을 촉발한 학생의 인지 갈등의 원인이 불완전한 유추의 사용에서 비롯되었음을 확인하였으며, 유추 활동에 대한 반성적 담론의 조성이 인지 갈등을 극복하는 학습 기회가 된다는 것을 발견하였다. 본 연구를 통해 인지 갈등이 의사소통적 갈등의 출현을 촉발할 수 있지만, 의사소통적 갈등의 해소가 인지 갈등의 해소를 함의하지는 않는다는 것을 알 수 있다.

Ⅰ. 서 론

전통적인 인지적 혹은 급진적 구성주의 관점에서는 반영적 추상화를 통한 개인의 인지적 변화를 수학 학습으로 설명한다(von Glasersfeld, 1995; Steffe, 1991). 이들은 학습자 개인의 인지 갈등이나 동요를 유발하는 것이 인지적 재구성을 위한 촉매제 역할을 한다고 하면서, 사회적 상호작용에서의 갈등 상황을 인지 갈등의 한 자원으로 설명한다. 하지만 인지적 구성주의 관점이 지식의 객관성에 대한 문제를 충분히 설명하지 못한다고 비판하면서, 사회적 구성주의 관점에서는 수학적 지식 자체를 사회문화적 활동에 의해 구성되는 산물로 간주하며 이 문제를 극복하려고 시도한다(Bauersfeld, 1980; Voigt, 1985; Yackel, Gravemeijer, & Sfard, 2011).

이와 함께 학생들이 수학에 관하여 대화를 나누는 것이 수학 학습을 위한 가장 좋은 방법이라는 주장을 뒷받침하는 연구들이 계속적으로 이어지고 있다(Lampert, 1990; O'Connor, 2001; Richards, 1991; Weber, Maher, Powell, & Lee, 2008). 이 연구들은 공통적으로 수학 학습에서 의사소통의 중요성을 강조하며, 학생들이 집단적인 토론 활동에 참여함으로서 논의 중인 수학적 대상에 관한 개인의 인지적 발달을 가져올 수 있다고 주장한다. 하지만 집단적 활동에 참여하며 수학적인 대화를 수행하는 것이 곧바로 개인의 발달로 이어지는 것은 아니라는 지적도 있다(Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997; Sfard, 2001).

예를 들어, Cobb 외(1997)는 기존 활동을 대상

* 서울대학교 대학원, tech0523@snu.ac.kr (제1 저자)
** 서울대학교 대학원, gump28@snu.ac.kr (교신저자)
*** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr

으로 삼는 반성적인 과정과 관련하여 개인적 수준의 반영적 추상화라는 개념과 집단적 수준의 반성적 담론이라는 개념을 구분하고 있다. 이들은 집단적인 반성적 담론에 참여한다는 것이 곧바로 성공적인 개인의 학습을 보장할 수는 없다고 언급한다. 또한 Sfard(2001)는 효과적이지 않은 의사소통이 이루어지는 대화의 사례를 통해 집단적인 수학적 대화가 반드시 유용한 것은 아니라는 것을 보여주며, 해당 수학적 대상에 관한 담론에 보다 익숙한 전문가의 안내가 중요함을 강조한다. 그녀는 개인이 세계와 조우하면서, 그 세계에 대하여 서로 모순되는 두 신념을 갖게 되는 상황에서 발생하는 갈등을 인지 갈등(cognitive conflict)이라고 정의하고, 어느 것이 옳다고 판단할 수 있는 기준을 갖고 있지 않은 담론들에서 나타나는 갈등을 의사소통적 갈등(commognitive conflict)으로 정의하였다(Sfard, 2008). 이러한 정의에 따르면, 학습자가 자신에게 낯선 담론에 익숙해지는 과정에서 의사소통적 갈등이 필연적으로 수반된다(Sfard, 2001, 2007, 2008).

이처럼 수학교육 연구자들은 심리적 관점과 사회적 관점을 접목하면서 지속적으로 수학 학습에 대한 보다 진전된 설명을 시도해오고 있다. 하지만 인지 갈등에 직면한 학습자가 집단적인 활동에 참여하면서 발생하는 의사소통적 갈등과 자신의 인지 갈등을 어떻게 해소해 나가는지 그 과정을 보여주는 연구는 아직 부족하다. 따라서 본 연구에서는 한 학생의 질문에서 시작된 교실의 수학적 토론에서 의사소통적 갈등이 드러나고 해소되는 과정을 분석하고, 인지 갈등의 해소 여부를 확인함으로서 이들 사이의 관계를 파악하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 토론과 수학 학습

수학 교실에서의 토론 활동은 1982년에 출판된 영국 Cockcroft 보고서의 권고를 통해 본격적으로 강조되기 시작하였다. 이 보고서에서는 수학적인 사고를 표현하고 공표하는데 있어서 언어가 중요한 역할을 하므로 수학적 활동을 하는 학생들이 직접 자신의 행동에 대해서 설명하고 토론하는 것이 장려되어야 한다고 권고한다 (Hoyles, 1985).

수학 교실에서 토론에 대한 관심이 늘어나면서 수학적 토론의 개념을 보다 명확히 정의해야 할 필요성이 증가되고 있다. Pirie와 Schwarzenberger (1988)는 “수학적 주제에 대하여 참여자의 진술한 의견이 개진되고 다른 참여자들과 상호작용하는 공통의 목표를 가진 의도적 대화”(p.461)로, Bartolini Bussi(1996)는 “수학적 대상(mathematical object)—수학에 관한 신념, 생각, 구조, 절차, 문제, 개념 등—에 대하여 대등하게 표현된 다양한 목소리의 폴리포니(polyphony)[1]”(p.16)로 수학적 토론을 정의하였으며, Soucy McCrone(2005)는 형식적이거나 비형식적인 용어를 사용하여 수학적

1) 폴리포니(polyphony)란 음악에서 ‘여러 가지 멜로디가 각자 독립성을 유지하면서도 전체적으로 조화를 이루는 음악형식’을 일컫는 용어로 사용되며, 문학에서 Mikhail Bakhtin에 의해 ‘저자가 특권적 위치를 차지하지 않고, 등장인물과 동등한 입장에서 대화적으로 상호작용하는 방식’의 소설을 의미하는 용어로 사용된다. Sfard(2012)는 Bakhtin의 영향을 받아, 세계 자체에 대한 단선적 목소리(monologues)로서 연구자의 내러티브를 취급하는 전통적 접근과 달리, 다성적인 목소리(multivocality)의 원리에 토대를 둔 의사소통적 연구(commognitive research)를 주창한다. Bartolini Bussi(1996)가 수학적 토론을 정의하면서 이 용어를 사용한 이유는 참여자들의 대등한 관계와 다양한 목소리의 조화를 동시에 표현하기 위한 것으로 보인다. 폴리포니(polyphony)를 우리말로는 다성음악(多聲音樂), 다성적 소설 또는 다성(多聲) 등으로 번역되는데 본 연구에서는 갈등관계에 있는 다양한 목소리의 대등한 관계와 조화를 동시에 나타내기 위해 번역하지 않고 폴리포니라고 표기한다.

인 사고와 정보를 교환하는 것을 의미하는 수학적 담론의 한 형태로서 “수학 문제의 이해를 목적으로 하는 소집단 또는 교실 전체 토론의 특징을 기술하기 위한 용어”(p.112)라고 수학적 토론을 정의하였다. 이 연구들은 수학적 토론을 정의함에 있어 특정한 수학적 주제나 대상에 관하여 참여자들(학생들)의 솔직하고 다양한 의견이 제시되고 조화되는 협력적인 대화과정을 강조하고 있다.

한편 국내 연구에서는 토의와 토론의 개념을 구분하면서 수학적 토론이 갖는 대립적인 측면을 강조하고 있다. 예를 들어, 황혜정(2002)과 지정은(2006)은 두 사람 이상이 모여서 주어진 문제의 해결을 모색하는 협력적인 성격의 의사소통 활동을 토의로 정의하고, 제시된 의견에 관하여 상반된 입장에서 자신의 입장을 주장하고 상대의 입장을 논박하는 대립적인 성격의 의사소통 활동을 토론이라고 정의하였다. 즉 이들은 수학적 토론을 정의함에 있어 서로 다른 의견이 충돌하며 갈등을 일으키는 상황을 강조한다.

이와 같이 수학적 토론의 개념은 연구자의 관점에 따라 협력적인 측면 또는 대립적인 측면이 강조되면서 진술되고 있다. 이러한 차이에도 불구하고 수학 학습에서 토론을 강조하는 연구들에서는 공통적으로 학생들이 수학적 토론을 통해 특정한 수학적 대상에 대하여 수행했던 행동, 암묵적으로 가정되었던 근거, 추론 과정 등을 반성적으로 검토하고 논의의 대상으로 삼는 메타 담론을 형성하며, 다양하고 발전적인 논증으로 확장하는 등 새로운 학습기회를 만나게 된다고 설명한다(Cobb 외, 1997; Sfard, 2001; Weber 외, 2008).

기존 지식에 대한 과정 및 활동을 대상으로 삼는 반성적 과정은 개인적 혹은 집단적 수준에서 지식의 발달을 설명함에 있어 아주 중요한 특징이다. Piaget(1972)는 개인이 특정한 대상에 대하여 취했던 행동을 사고의 대상으로 삼아 반성하는 활동을 반영적 추상화라는 용어로 개념화하였다. Freudenthal(1973)은 과정을 대상으로 변환함으로서 수학적 발달이 이루어진다는 것을 강조하였다. 즉 한 수준에서 분석의 수단 또는 조작적 도구였던 활동이 한 단계 높은 수준에 대한 분석의 대상이 되면서 수준의 향상이 이루어진다는 것이다. Sfard(1994)는 한 수준에서 수학적 대상에 대하여 취했던 일련의 조작적 행동의 과정이 다음 수준에서 대상이 되면서 마치 구조적 개념처럼 진화하는 수학의 역사적 발달 과정을 장기간에 걸친 물화의 과정으로 설명한다. 즉 추상적이고 복합적인 수학적 개념은 한 수준의 물화가 끝나는 곳에서 새로운 수준이 추가되면서 여러 층들이 겹겹이 쌓여가면서 만들어진다. 그녀는 수학 학습을 특정한 수학 공동체의 구성원이 되는 것과 동의어로 간주하며 수학적 담론이 발달하는 것을 수학 학습의 결과로 설명한다(Sfard, 2012). Cobb 외(1997)는 교실의 집단적 수준에서 이루어지는 반성적 활동을 반성적 담론(reflective discourse)이라는 용어로 정의하면서, 개인이 참여하고 있는 공동체의 수학적 관행을 확립하고 발전시켜 나가는 과정으로 수학 학습을 설명한다. 이러한 관점에서는 수학 수업에서 이루어지는 사회적 상호작용이 인지 갈등을 위한 단순한 촉매제의 역할이 아닌 수학 학습의 핵심적인 과정이자 결과로 간주된다 (Bauersfeld, 1980; Voigt, 1985; Yackel 외, 2011).

본 연구에서는 선행 연구들을 종합하여 수학적 대상에 관한 참여자들의 의견이 서로 대립되는 상황에서 발생하는 갈등과 이 갈등의 해소를 위해 공통의 목표를 향해 지속적으로 대화를 수행하는 협력적인 측면을 포괄하여 다음과 같이 수학적 토론의 개념을 정의한다. 수학적 토론이란 동일한 수학적 대상(Bartolini Bussi, 1996)에 관하여 참여자 사이의 갈등(Sfard, 2008)을 일으

키는 서로 다른 의견이 제시되고, 이 의견들이 집단적으로 검토되면서 갈등의 해소라는 공통의 목표(Pirie & Schwarzenberger, 1988)를 위해 상호 작용하는 반성적인 담론(Cobb 외, 1997)이다.

2. 인지 갈등과 의사소통적 갈등

개인의 인지적 재구성을 수학 학습으로 개념화한 급진적 구성주의 관점에서는 개인들 사이의 상호작용 과정에서 발생하는 사회적 갈등을 인지 갈등의 한 자원으로 간주하며, 사회적 갈등이 인지적 재구성을 위한 촉매 역할을 한다고 설명한다(von Glasersfeld, 1995; Steffe, 1991). 이러한 관점에서는 사회적 갈등과 심리적 갈등의 구분이 그 원인에 있기보다는 갈등이 드러나는 양상－개인 간 갈등과 개인 내 갈등－에 있는 것으로 설명된다.

이와 달리 Sfard(2008)는 갈등의 원인 및 그 해소과정, 그리고 수학 학습 과정에서 갈등의 역할이라는 측면에서 인지 갈등과 의사소통적 갈등의 개념을 구분하였다. 인지 갈등과 의사소통적 갈등의 특징을 비교하여 요약하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

Sfard(2008)에 따르면, 인지 갈등은 세계의 사태와 개인의 신념 사이의 불일치에서 비롯되는 것이며, 사회적 양상으로 나타나더라도 그 갈등이 세계에 대해 개인들이 서로 다른 신념을 갖고 있기 때문에 발생하는 것이라면 인지 갈등으로 간주할 수 있다. 인지 갈등의 해소는 서로 모순되는 신념들을 비교할 수 있는 공통의 기준을 토대로 세계와 보다 일치하는 신념을 선택하는 합리적 재구성을 통해 이루어진다. 그 결과 비교된 신념 중 적어도 하나는 세계의 사태와 부합하지 않다는 것이 확인되며 개인에 의해서 폐기되거나 수정된다. 반면, 의사소통적 갈등이란 참여자들이 서로 다른 메타규칙(meta-rule 혹은 meta-discursive rule)에 따라 행동하는 상황에서 발생하는 갈등이다[2]. 즉 의사소통적 갈등은 세계에 대한 서로 다른 신념 때문에 발생하는 것이 아니라 세계와 관련하여 참여자들이 서로 다른 담론의 규칙에 따라 행동하기 때문에 발생하는 것이다. 의사소통적 갈등을 유발하는 행동의 규칙들은 서로 모순되어 보이지만 양립 가능하며 어느 것이 옳고 그른 것인지 비교할 수 없다.

<표 Ⅱ-1> 인지 갈등과 의사소통적 갈등의 비교

	인지 갈등 (cognitive conflict)	의사소통적 갈등 (commognitive conflict)
갈등의 원인	세계에 대한 서로 다른 신념 (개인의 신념 vs 세계)	세계에 대한 서로 다른 담론 (타인과의 상호작용)
내러티브의 특징	서로 공존할 수 없는 내러티브 (양립 불가능)	서로 다른 담론에 근거한 내러티브 (비교 불가능)
학습에서의 역할	오개념 극복 위한 선택적 과정	메타수준 학습의 필연적 과정
갈등의 해결	부적절한 신념 수정	타인의 담론 수용(관습화)

2) Sfard(2008)는 메타규칙을 대상 수준 규칙(object-level rule)과 비교하면서 설명하고 있다. 대상 수준 규칙이란 담론의 대상 자체의 규칙성에 대한 내러티브이다. 이와 달리 메타규칙은 대상 수준 규칙을 만들어 내고 구체화하는 유형화된 활동에서 비롯되는 규칙이다. 즉, 수학적 대상 자체에 대한 설명이 아니라 대상과 관련한 참여자의 규칙적인 행동에 대한 설명이다.

의사소통적 갈등의 해소는 참여자들이 서로의 담론 규칙을 이해하고 수용하면서 자신의 메타 규칙을 확장하고 변화시킴으로서 이루어질 수 있다. 특히 메타규칙의 변화를 일으키는 메타수준의 학습에서 의사소통적 갈등의 출현은 필연적인 과정이다. Sfard(2007)는 참여자들이 스스로 자신의 메타규칙을 변화시키는 것은 거의 불가능하다고 언급하면서 메타수준의 학습을 위해서 담론 참여자들이 연대감을 확립하기 위해 서로의 행동을 모방하는 관습화(ritualization) 과정이 필요하다고 설명한다. 그녀는 관습화 과정에서 형성되는 관습적 루틴을 사회적 관점에서 재해석하며 학생들이 수학적 대상에 대한 탐구적 루틴을 형성하기 전에 필연적으로 겪을 수밖에 없는 과정으로 간주하였다.

의사소통적 갈등의 대표적인 사례로 Sfard (2007)는 삼각형을 식별하는 활동에서 구체적인 대상을 통해 도형을 직접 식별하는 규칙을 가진 학생들과, 도형의 정의를 바탕으로 구성요소인 변의 개수를 셈으로서 그 도형을 식별하는 규칙을 가진 교사의 대화를 제시한다. 이때, 주어진 도형이 "삼각형처럼(세모 모양으로) 보이기 때문에 삼각형이다."라고 주장하는 학생들의 내러티브와 "변의 개수가 세 개이므로 삼각형이라고 부를 수 있다."라고 설명하는 교사의 내러티브는 동일한 기준에 따라 서로 비교할 수 없다. 또한, 제시된 도형의 외형적인 특징에 대한 직접적인 인식을 통해 삼각형을 식별하는 메타규칙을 가진 학생들이 용어의 정의에 입각한 매개적 인식을 통해 삼각형을 식별하는 메타규칙을 따를 수 있도록 담론의 규칙을 변화시키는 것이 메타수준의 학습의 목적이다. 이러한 변화가 나타나기 위해서는 새로운 담론 규칙을 모방하는 관습화 단계가 필요하고, 그 과정에서 의사소통적 갈등이 수반된다고 말할 수 있다.

본 연구에서도 Sfard(2008)의 구분에 따라 인지갈등과 의사소통적 갈등을 개념화한다. 특히 앞절에서 수학적 토론의 개념을 정의할 때 진술했던 참여자 사이의 갈등의 개념을 의사소통적 갈등으로 제한하여 사용한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 수업 개관

본 연구에서는 수도권의 한 과학영재학교에서 운영되는 미적분학Ⅱ 과목 수업 중에서 공간 곡선에 관한 주제로 2013년 2월 25일부터 3월 12일까지 진행된 총 9차시의 수업을 관찰하였다. TNB 프레임[3] 관련 수업 계열은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

참여 교실에서는 수업에서 다룰 수학적 주제에 관한 학생들의 질문을 기반으로 교실 전체 토론을 수행하는 수업이 운영되었다. 매주 월요일 2시간, 화요일 1시간으로 3차시의 수업이 실시되었으며, 교사는 학생들이 수업에서 논의할 수학 주제들을 개별적으로 수업 전에 미리 정리하고, 이해되지 않는 부분에 대한 질문 목록을 작성하여 해당 주제에 관한 수업이 실시되기 전주 금요일까지 제출하도록 하였다. 교사는 학생들이 제출한 기록물에 대한 검토를 통해 수업 중에 논의할 주제들을 선정하였다. 한 차시 수업

3) 공간 곡선을 따라 운동할 때, 이 운동을 서술하기 위해 i, j, k의 일차결합으로 표현되는 Cartesian 좌표계는 운동의 특징을 설명하기에 부족한 부분이 있다. 이 단점을 보완하기 위해 곡선의 진행방향인 단위접선벡터(the unit tangent vector; 이하 T), 곡선의 진행경로가 변화하는 방향인 단위주법선벡터(the principal unit normal vector; 이하 N), 곡선이 순간적으로 놓여 있는 접촉평면(the osculating plane)에 수직인 종법벡터(the unit binormal vector $B = T \times N$; 이하 B)의 일차결합을 이용하여 곡선 위의 입자의 운동에 대해 설명하는 것을 *TNB 프레임* 또는 *Frenet 프레임*이라고 부른다. 즉, 세 벡터 T, N, B는 3차원 공간에서 곡선 위의 점을 따라 서로 직교하며 이동하면서 오른손 벡터 프레임을 형성한다(Thomas 외, 2010).

<표 Ⅲ-1> TNB 프레임 관련 수업 계열

차시	수업일(교시)	수업 주제	수업 진행 방법
1	2013.2.25.(6)	호의 길이와 정적분	개별 예습/전체 토론
2	2013.2.25.(7)	재매개화와 단위접선벡터(T)	전체 토론
3	2013.2.26.(5)	호의 길이관련 응용문제해결	전체 토론
4	**2013.3.04.(6)**	**곡률과 주단위법선벡터(N)**	**개별 예습/전체 토론**
5	2013.3.04.(7)	열률과 종법벡터(B)	전체 토론
6	2013.3.05.(5)	곡률과 열률 관련 응용문제해결	전체 토론
7	2013.3.11.(6)	TNB 프레임 모형 제작발표	조별 활동 및 발표(수행평가)
8	2013.3.11.(7)	TNB 프레임 모형 제작발표	조별 활동 및 발표(수행평가)
9	2013.3.12.(5)	TNB 관련 응용문제해결	개별 예습/전체 토론

은 50분이며, 한 차시 동안 2~3개의 주제에 관하여 교실 전체 토론이 진행되었다. 학생들이 수업 중에 다룰 수학적 대상에 대하여 미리 읽어보도록 한 것은 토론에서 개별 학생들의 활발한 참여를 보장하기 위함이었다.

3차원 공간을 운동하는 곡선을 이해하기 위한 접근은 한 점 근방에서의 국소적 성질을 이해하는 접근과 곡선 전체의 성질을 파악하는 대역적 접근으로 구분할 수 있다(박진석, 표용수, 김향숙, 2010). 이 중 곡선의 국소적 성질은 벡터 개념을 사용하는 해석기하적 접근을 통하여 주로 분석된다(Thomas, Weir, Hass, & Giordano, 2010). 참여 교실의 수업에서는 공간 곡선의 국소적 성질을 이해하기 위한 방법으로 TNB 프레임을 다루고 그 과정에서 파생하는 곡선의 중요한 성질로 곡률(curvature)과 열률(torsion) 개념을 다루었다. 특별히 본 연구에서는 의사소통적 갈등이 출현하고 이를 해소하기 위한 논의가 진행되었던 4차시 수업에 주목한다. 이 수업에서는 삼차원 공간을 운동하는 곡선의 접촉평면에 대한 수학적 토론이 이루어졌다.

2. 연구 참여자

참여 교실의 학생들은 미적분학Ⅱ 과목을 수강한 27명의 3학년 학생들 중에서 12명(남학생 10명, 여학생 2명)이다. 이 과목의 수강을 위해서 학생들은 2학년에 필수과목으로 개설되는 기초 미적분학과 미적분학Ⅰ 과목을 반드시 먼저 수강해야 했다. 또한 이 과목은 심화 선택과목으로, 상대적으로 수학에 대한 흥미가 높고 수학 성적이 우수한 학생들이 수강하는 경향이 있었다. 본 연구에서 주목한 수학적 토론이 시작하는 계기를 제공한 영준[4]은 한국수학올림피아드에서 금상을 수상한 경험이 있는 학생으로, 동료 학생들에게서 가장 우수한 수학 실력을 지니고 있다고 인정받고 있었다. 영준은 전체 토론 상황에서 항상 자신의 아이디어를 자신 있게 표현하였고, 영준이 제시하는 설명 과정에 비약이 있는 경우에도 다수의 학생들은 그의 권위를 인정하며 받아들이곤 하였다. 따라서 영준이 접촉평면을 이해하는 과정에서 다른 학생들과 달리 인지 갈등을 나타내는 상황은 교사와 연구자의 관심을 끌기에 충분하였다. 한편 접촉평면에 대한 형식적

4) 앞으로 제시되는 학생들의 이름은 모두 가명이다.

인 정의를 제시하며 영준의 문제를 해결하려고 시도한 희수와 민국은 교재에 주어진 정의에 입각하여 새롭게 접하는 수학적 대상의 의미를 빠르게 파악하는 능력을 갖고 있었다. 토론 과정에서 영준과 민국의 갈등 상황을 해소하기 위한 대안을 제시하였던 지훈은 매주 제시되는 예습 활동에 가장 성실하게 임하면서 많은 분량의 과제물을 제출하고, 엄밀한 증명과 논증을 통해 참여 학급의 수학적 토론을 주도한 학생이고, 기광은 직관적인 아이디어를 바탕으로 다양한 추측을 자주 제시하며 많은 학생들이 흥미롭게 전체 토론에 참여할 수 있도록 기여하였다.

참여 교실의 교사는 수업 중에 학생들이 자유롭게 자신의 의견을 제시하고, 제시된 의견에 대해서는 누구든지 질문을 하거나 자신의 해석에 근거한 의견을 편안하게 표현할 수 있도록 장려하였다. 교사의 노력과 학생들의 참여가 조화를 이루면서, 교실에서는 논의 중인 수학적 대상에 관하여 자신의 생각 말하기, 동료의 발언에 대하여 궁금한 사항이 있으면 이해될 때까지 질문하기, 동료의 질문에 대해 구체적으로 설명해주기, 자신의 의견을 정당화하기 등의 사회적 규범(Cobb & Bauersfeld, 1995; Cobb & Yackel, 1996)과, 수학적으로 다른 해석 공유하기, 수학적으로 보다 효율적인 풀이방법 추구하기 등의 사회수학적 규범(Cobb & Yackel, 1996; Yackel & Cobb, 1996)이 확립되었다. 교사는 자신의 학창시절 경험과 교사로서의 경험을 토대로 다른 사람의 설명을 듣는 것보다는 다른 사람에게 설명하기 위해 준비하고 말하는 과정에서 수학적 발달을 이룰 수 있다는 신념을 갖고 있었다. 에피소드 Ⅲ-1에서와 같이, 학기 초 수업에 대한 안내 시간에 교사는 수학 학습에 대한 자신의 신념을 직접적으로 언급하면서 학생들의 적극적이고 자발적인 참여를 강조하였다.

<에피소드 Ⅲ-1. 수학 학습에 대한 교사의 신념>

교사 : 선생님이 이렇게 하는 이유는 다른 게 아니고, 선생님이 교사 생활 하면서 가르치고 하면서 느낀 건데, 선생님이 강의를 열심히 하고 나면 선생님만 실력이 늘더라고요.

학생들 : 하하(웃음)

교사 : 듣는 사람들은 계속 보고만 있는 거니까. 선생님의 목표는 여러분의 실력이 느는 겁니다. 여러분의 실력! 선생님이 안내하는 방식이 반드시 옳은 건지는 내가 확실히는 잘 모르겠지만, 최소한 여러분이 직접 정리하고 예습하고 고민하는 요 순간에, 문제를 푸는 순간에 실력이 늘지, 와서 들을 때 실력이 느는 것은 아니라는 것이에요.

참여 교실의 교사는 2012년 9월부터 12월까지 약 3개월간 연구자와 함께 매주 서로의 수업을 참관하고 학생들의 효과적인 학습을 위한 방법에 대해 논의하는 교사학습공동체에 참여하면서 교수자의 강의 중심으로 진행하던 자신의 수업 방법을 변화시키려고 노력하고 있었다. 본 연구에서 관찰한 수업은 교사의 수업 방법 개선을 위한 노력의 과정이자 결과로 볼 수 있다.

3. 자료의 수집 및 분석

교실에서 일어나는 상호작용을 분석하고 이해하는 것을 목적으로 하는 많은 연구들은 연구자가 자신이 보고, 알고, 이해한 것을 독자들이 함께 보고, 알고, 이해할 수 있도록 하는 것이 중요하다고 강조하며 질적 연구 방법을 따르고 있다(우정호 외, 2006; Cresswell, 1994; Merriam, 1998). 본 연구는 영재학교의 수학 수업에서의 수학적 토론을 관찰하고 분석하기 위한 것이므로, 질적 연구의 분석 방법 중 사례 연구 방법을 적용하였다. 연구 현장을 한 교실로 선정하고 인지 갈등을 보여주고 있는 한 개인에게 초점을 맞춘 것은, 특정 사례에 집중함으로서 파악하고

<표 Ⅲ-2> 의사소통의 효과성 분석을 위한 Sfard의 초점분석틀

표명된 초점 (pronounced focus)	수반된 초점 (attended focus)	의도된 초점 (intended focus)
대화자가 직접 언급하며 사용하는 단어	대화자들이 발언과 행동을 하면서 주목하는 것	대화자의 말과 행동이 의도하고 있는 무형의 개체

자 하는 현상의 특징에 대한 요소들 사이의 상호작용을 밝힐 수 있고 그 사례가 속한 교실 집단의 특징적인 양상을 설명할 수 있기 때문이다(우정호 외, 2006). 본 연구에서는 접촉평면에 대한 개인의 인지 갈등과 집단의 의사소통적 갈등이 출현하고 갈등을 해결해 나가는 과정에 초점을 두기 위하여, 수집한 자료들 중에서 접촉평면과 관련된 자료들을 분류하여 선정하였다. 이에 따라 분석 자료는 전체 토론 및 개별 면담에 대한 비디오 자료와 오디오 자료, 학생들의 활동지 및 과제들이었다. 또한 수학적 토론 과정에서 의사소통의 효과성을 분석하기 위해서 삼면적 초점분석(Sfard, 2001; Sfard & Kieran, 2001)을 적용하였다. 초점분석은 <표 Ⅲ-2>에 제시된 세 가지 초점을 바탕으로 대화를 분석하는 방법이다.

여기서 표명된 초점은 공적인 것이고 의도된 초점은 사적인 것이다. 이 두 초점을 매개하는 것은 수반된 초점이다. Sfard와 Kieran(2001)은 대화자들이 외견상으로는 같은 단어를 말하거나 동일한 대상을 주목하면서도 효과적인 의사소통을 이어나가지 못하는 경우를 제시하면서, 이를 의도된 초점의 차이로 인한 의사소통의 불일치로 설명한다. 이와 같이 본 연구에서도 초점분석을 통해 수학적 토론 과정에서의 의사소통의 효과성을 평가함으로서, 외견상 효과적으로 보이는 의사소통일지라도 참여자 사이의 의도된 초점의 차이로 인한 의사소통적 갈등이 완전히 해소되지 않고 남아 있다는 것을 파악고자 하였다. 이를 위해 연구자들은 개별적으로 초점분석을 수행한 후 공동 검토를 통해 잠정적인 분석 결과를 도출하였으며, 이에 대한 참여자 검토를 통해 분석 결과의 타당성을 확보하였다.

Ⅳ. 연구 결과

본 장에서는 접촉평면에 대한 수학적 의사소통 과정에서 출현한 의사소통적 갈등을 해소하기 위해 반성적이고 협력적인 상호작용을 수행하는 수학적 토론을 분석한다. 그리고 영준과의 면담을 통해 영준의 인지 갈등의 원인이 불완전한 유추에서 비롯되었음을 확인하고, 유추 활동을 반성할 수 있는 발문을 통해 영준의 인지 갈등이 해소되는 과정을 기술한다.

1. 의사소통적 갈등의 출현

접촉평면에 대한 수학적 토론 과정은 인지 갈등의 공표, 의사소통적 갈등의 출현 및 갈등 해소를 위한 상호작용, 의사소통적 갈등의 해소로 이루어졌다.

가. 인지 갈등의 공표

수학적 토론의 시작은 접촉평면의 직관적 의미에 대한 영준의 문제제기에서 비롯되었다. 곡률원에 대한 논의가 이루어지는 도중에 영준은 접촉평면의 개념에 대한 자신의 인지 갈등을 교실 공동체에 공표하였다.

<에피소드 Ⅳ-1. 영준의 인지 갈등 공표>

[1] 영준 : 이 평면이 도대체 어떻게 결정되는 거야?

[2] 희수 : 그 평면?

[3] 정민 : 그 곡률원의 중심은 다 그 축에 있는 거 아냐? 그렇게 해서 따라 올라가는 거 아냐?

[4] 영준 : 그러니까 그건 알겠는데, 그 나선이 이렇게 올라갈 때 감아 올라가는 방향이 좀 뭔가 이 운동한다는 평면의 개념이 좀 이상하지 않아? 난 정확히 직관적으로 이해가 안 돼.

나. 의사소통적 갈등의 출현 및 갈등 해소를 위한 상호작용

영준의 인지 갈등이 공표되자 교실 공동체의 대화의 초점은 곡률원에서 접촉평면으로 바뀌었고, 학생들은 접촉평면에 대한 자신들의 의견을 제시하였다. 제일 먼저 희수는 접촉평면을 단위 접선벡터 둘을 동시에 포함하는 평면으로 설명하였다.

<에피소드 Ⅳ-2. 접촉평면에 대한 희수의 설명>

[5] 희수 : 시간이 티(t)일 때 단위접선벡터하고, 시간이 티 플러스 디티($t+dt$)일 때 단위접선 벡터, 두 개의 약간 비슷한 벡터가 있는데, 걔네 둘을 동시에 포함하는 평면.

영준의 질문에 대한 위와 같은 희수의 설명은 상대방의 질문에 대해 응답을 해준다는 교실 사회적 규범에 비추었을 때 적절한 반응으로 해석된다. 특히 이들의 대화는 표면적으로 접촉평면의 개념을 묻고 답하는 효과적인 의사소통처럼 보인다. 그러나 <표 Ⅳ-1>에 제시된 의사소통의 효과성에 대한 초점분석을 통해 알 수 있듯이, 영준과 희수의 의사소통은 의도된 초점에서 차이가 있었다.

영준은 곡선의 한 점에서 접하는 수많은 평면(이하 접평면)과 구분되는 접촉평면만의 특징을 직관적으로 이해하고자 하였으나, 희수는 영준이 말한 '직관적으로 이해'한다는 것의 의미를, 접촉평면의 정의에 입각하여 그것을 구성하는 성분들을 통해 설명하는 방식으로 해석하고 응답하였다. 영준은 접촉평면을 용어의 정의에 의해 인식하기보다는 접평면이라는 자신에게 익숙한 직관적인 대상의 특징과 비교하면서 이해하려는 규칙을 따르고 있으며, 희수는 접촉평면의 정의를 통한 매개적인 담론의 규칙을 따르려고 한다는 점에서 이들의 대화는 의사소통적 갈등을 보여주고 있다. 이와 같이 의도된 초점에서의 차이로 인해 영준과 희수의 의사소통은 효과적으로 이루어지지 않았다.

교사는 영준과 희수의 대화를 한 걸음 물러나서 관찰할 수 있었고, 그 결과 이들의 의사소통이 효과적이지 않음을 인식하였다. 따라서 영준에게 질문을 명확하게 진술하도록 요구하였다. 이러한 교사의 개입을 시작으로, 이 후 토론에서는 영준의

<표 Ⅳ-1> 영준과 희수의 의사소통에 대한 초점분석

영준			희수		
표명된 초점	수반된 초점	의도된 초점	표명된 초점	수반된 초점	의도된 초점
[4] **운동한다는 평면**, (중략) **직관적**으로 이해가 안 돼.	운동 평면(접평면 또는 접촉평면)	직관적으로 확인 가능한 접촉평면의 특징			
			[5] 두 개의 약간 비슷한 벡터가 있는데, **걔네 둘을 동시에 포함하는 평면.**	T(t), T(t+dt)로 구성된 접촉평면	구성요소들로 설명되는 접촉평면의 형식적 정의

질문 명료화, 학생들의 의견제시 및 반박, 교사의 정리라는 세 요소로 이루어진 의사소통 패턴(하위 토론)이 총 세 번 나타났다(이하, 각 하위 토론을 토론 1, 토론 2, 토론 3으로 지칭한다).

토론 1에서는 T벡터와 N벡터가 생성하는 평면으로서의 접촉평면에 대한 논의가 이루어졌다. 토론 1은 교사의 요구에 따라 자신의 의문점을 명확히 한 영준으로부터 비롯되었다.

<에피소드 Ⅳ-3. 토론 1에서의 영준의 질문 명료화>

[6] 영준 : 만약에 평면상에서 보면요. 곡선이 이렇게 있으면 이거에 접하는 직선은 말 그대로 접하는 거고, 그리고 뭐 원이 있으면 이렇게 접하는 건데, 그걸 나선을 이렇게 한 번 생각을 해보면 당연히 여기 위에서 접한, 이 점에 대해서 접하는 직선은 그거에 따라서 이렇게 쭉 직선을 그으면 될 테지만, 접하는 평면을 생각을 할 때는, 이렇게 된 거에 이것도 접하고, 이것도 접하고 다 접하는데 그 곡선에, 대체 뭐가 곡선에 접한다는 평면을(...) 그러니깐 한 마디로 법선 벡터를 어떻게 결정할 수 있는지.

영준의 설명에 대하여 민국은 접하는 평면들은 접촉평면이 아니라고 반박하면서 접촉평면의 정의를 제시하였으며, 용어의 정의를 통한 수학적 대상을 이해하는 메타규칙으로의 전환을 시도하였다. 하지만 영준은 민국의 설명을 직관적으로 받아들일 수 없다고 주장하면서, 수학적 대상을 그 용어의 정의에 입각하여 이해하고 분석하는 담론 규칙을 받아들이려 하지 않았다. 영준은 계속적으로 접평면과 비교하여 접촉평면의 성질을 이해하려는 규칙을 고수하고 있었다.

<에피소드 Ⅳ-4. 토론 1에서의 민국의 의견제시 및 영준의 반박>

[7] 민국 : 접촉평면이 아닌 거 아니에요. 저게?

[8] 영준 : 그니까 접촉평면이라는 게 뭔데?

[9] 민국 : T랑 N으로 이루어진 평면.

[10] 학생들 : 허허

[11] 영준 : 그거는 마치 그냥 수학을 기호로 정의해 놓고 그거에 이름을 붙인 거나 다름없는데? 진짜 우리가 곡률이 나오는 그 원리가 ‘재가 얼마나 휘어져 있는지’를 알고 싶은 건데, 그러면 ‘얼마나 휘어져 있는지’를 수학적인 정의를 해놓고 ‘이게 얼마나 휘어져 있는 거다’라고 정의한 거나 다름없잖아? 그게 왜 ‘얼마나 휘어져 있는지’는 그 이유가 직관적으로 표현이 안 되잖아.

접촉평면이 무엇인지를 묻는 영준에게([8]) 접촉평면의 형식적 정의를 제시하는 민국의 응답

<표 Ⅳ-2> 민국과 영준의 의사소통에 대한 초점분석

민국			영준		
표명된 초점	수반된 초점	의도된 초점	표명된 초점	수반된 초점	의도된 초점
			[8] 그니까 접촉평면이라는 게 뭔데?	접촉평면, 접평면	접평면과 비교했을 때 접촉평면만이 가지는 특징
[9] T랑 N으로 이루어진 평면	T, N으로 구성된 접촉평면	구성요소들로 설명되는 접촉평면의 형식적 정의			
			[11] 그 이유가 직관적으로 표현이 안 되잖아.	접촉평면, 접평면	접평면과 비교했을 때 접촉평면만이 가지는 특징

([9])은 표면적으로는 효과적인 의사소통처럼 보인다. 그러나 <표 Ⅳ-2>와 같이 이들의 발언의 초점을 분석해보았을 때, 용어의 정의에 입각하여 수학적 대상의 의미를 설명하려는 민국의 초점은 접촉평면을 접평면과의 비교를 통해 이해하고자 하는 영준의 초점과 차이가 있었다. 이러한 의도된 초점의 차이는 의사소통적 갈등이 계속되고 있다는 것을 보여준다.

앞서 살펴본 바와 같이 접촉평면을 접평면과의 비교를 통하여 이해하려는 영준의 의도는, 정의에 입각하여 접촉평면을 이해하려는 희수나 민국의 의도와 차이가 있었다. 영준은 새로운 수학적 대상의 의미를 이해할 때, 이미 알고 있는 다른 대상과의 비교를 통해 그 대상의 의미를 이해한다는 메타규칙을 가지고 있었고, 토론에 참여하면서도 기존에 가지고 있던 메타규칙을 바꾸지 않았다. 따라서 정의에 입각하여 접촉평면을 이해하는 메타규칙을 사용하는 학생들의 주장은 영준과의 의사소통에서 그다지 효과적이지 못했다. 민국은 영준이 접촉평면에 대한 형식적 정의를 받아들이지 않자, 앞선 대화에서 제시된 희수의 설명을 반성하면서 접촉평면, 특별히 N벡터의 직관적 의미를 설명하려고 노력하였고, 이러한 민국의 설명을 교사가 정리하는 것으로 토론 1이 마무리 되었다.

<에피소드 Ⅳ-5. 토론 1에서의 민국의 재설명과 교사의 정리>

[12] 민국 : N이 dS분에 dT로 정의가 된 거니까, 그게 N 자체가 T가 휘어지는 방향이라는 걸 포함하고 있는 거 아니야? (...) 아닐 수도 있겠다.

(중략)

[13] 민국 : 근데 T가 변하는 방향은 하나밖에 없잖아. 꼭 T랑 수직인 게 N이 아니라, T가 변하는 방향이 그니까 그걸 가리키는 게 N인데, 걔가 이제 T랑 수직이 되는 거고, 애초에 T랑 수직인 것 중에 거기 거 뭐 그 중에서 뽑은 게 아니라.

[14] 교사 : 어, 민국의 얘기는 이거군요. 그러니까 T랑 수직인 것들 중에 하나를 고른 게 아니고, 그치?

[15] 학생들 : 네

[16] 교사 : T를 휘어지게 하는, 방향을 움직이게 해주는, 어떤 힘이 작용하는 방향이 N인데, 걔가 T랑 수직이더라. 이 얘기지?

토론 2도 역시 자신의 질문을 명확히 하는 영준의 설명에서 시작되었다. 토론 2에서는 태훈이 제기한 '미소 곡선'[5]에 대하여 논의가 이루어졌으며, 교사가 정리하는 것으로 마무리 되었다. 접촉평면의 의미와 관련한 두 차례의 토론에서 여전히 자신의 의문점을 해결하지 못한 영준은 세 번째로 자신의 문제를 명료화하는 발언을 하였고 토론 3이 시작되었다. 영준은 접촉평면이라는 용어의 정의 자체가 아니라 접평면과 비교되는 접촉평면의 독특한 성질이 무엇인지 궁금하다는 것을 다시 한 번 분명하게 표현하였다. 이러한 영준의 문제제기에 대하여 지훈은 새로운 의견을 제시하였다. 지훈은 공간 곡선의 한 점에서 곡선이 휘어지도록 작용하는 힘에 대하여, 이 힘을 곡선의 접선 방향과 법선 방향으로 분할하는 의견을 제시하면서 T벡터와 N벡터 및 접촉평면의 의미를 물리적인 상황과 연결하여 해석하였다. 이러한 지훈의 설명은 접촉평면을 그 형식적 정의에 입각하여 설명하고자 하는 민국과 희수의 담론 규칙과 형식적인 정의에서 벗어나 접평면과 비교되는 직관적인 설명을 요구하는

5) 태훈은 손가락으로 허공에 두 점을 찍어 연결하는 모양을 만들며 접촉평면을 "t일 때 좌표랑, $t+dt$일 때 좌표를 이은 곡선 있잖아요. 그걸 포함하는 평면"이라고 설명하지만, "그거는 약간 좀 정의하기가 어렵지 않나? 잘 정의하기가"라면서 민국이 반박을 하자 더 이상 자신의 의견을 제시하지 않았다. 태훈이 표현한 '미소 곡선'이란 충분히 작은 양수 dt에 대하여 $[t+dt]$ 위에서 정의된 곡선을 의미하는 것이다.

영준의 담론 규칙 사이에서 발생한 의사소통적 갈등을 중재하는 역할을 하였다.

<에피소드 Ⅳ-6. 토론 3에서의 지훈의 의견제시>

[18] 지훈 : 어떤 임의의 곡선 $r(t)$가 있을 때, 입자에 적용하는 힘을 입자에 적용하는 힘의 방향을 이제 어떤 방향으로 나눌 수 있잖아요. 이제 그거를 우리가 T는 정의 했으니까, 운동하는 방향으로 정의했으니까 T로 나누고 나서, 다른 방향을 정의할 때, 다른 방향의 힘이 또 다른 방향으로 또, 두 수직인 벡터의 합으로 나눈다고 한다면, T하고 T에 수직인 방향으로 힘을 나눌 때, 그 나머지, T말고 나머지 수직인 방향을 T에 수직이면서 T와 어떤 벡터를 임의의 어떤 벡터로 나누어지는 그 벡터의 방향으로 단위벡터를 결국에는 T하고 N하고 방향으로 나눠지잖아요. 결국에는.

[19] 교사 : 그렇죠. 결국 그렇게 되죠.

[20] 지훈 : 그러니까 T와 T에 어떤 수직인 벡터로 T를 표현 하는 게 나머지 T에 수직인 방향의 벡터… 그 벡터의 방향을 말하는 게 아닐까요?

다른 수업에서도 직관적인 예시를 자주 제안했던 학생인 기광 역시 접촉평면에 대한 물리적 해석을 제시한 지훈의 의견을 지지하면서 토론에 참여하였다. 기광은 접촉평면이란 '힘의 방향과 속도 방향을 포함한 평면', N벡터는 '힘의 방향과 속도 방향을 포함한 평면에 포함되면서 속도랑 수직한 것'이라고 설명하면서 지훈의 설명을 보충하였다.

다. 의사소통적 갈등의 해소

토론 3의 후반부에 교사는 접촉평면의 의미에 대한 학생들의 의견을 종합하면서 각 학생들이 제시한 아이디어에 대하여 자신이 이해한 바를 정리하고 토론을 마무리하였다. 교사는 물리적인 상황을 도입하여 접촉평면의 의미에 대한 직관적인 설명을 시도한 해석과 접촉평면의 정의에 포함된 T벡터와 N벡터를 이용하여 그 의미를 설명하는 해석을 서로 연결함으로서, 영준으로 하여금 용어의 정의에 입각하여 수학적 대상의 의미를 이해하는 메타규칙을 받아들 수 있도록 유도하였다.

접촉평면에 대한 교사의 정리 발언을 통해 교실 공동체는 접촉평면의 의미에 대하여 잠정적으로 합의된 결론을 갖게 되었다. 접촉평면의 직관적인 의미에 대하여 처음 문제를 제기했던 영준도 교실 공동체에서 합의한 결론을 받아들이고 있었다. 이는 다음 수업시간에 N벡터를 사용하면서 열률[6]의 개념을 설명하는 영준의 모습에서 확인할 수 있었다.

<에피소드 Ⅳ-7. 새로운 메타규칙을 수용한 영준>

[21] 영준 : 그리고 이제 딱히 이제 열률이 뭐냐고 저한테 설명하라 그러면은, 저 자세히는 모르겠는데, 이게 이렇게 말하죠. 평면이 얼마나 뒤틀리는지, 이거를 N에 대비를 시키면 N이 T가 얼마나 바뀌는지 변하는 건데, 근데 그거에 대해서 그니까 N으로 정의되는 그러니까 T가 변하는 방향이죠. 얘가 변하는 방향이고, N으로부터 정의되는 게 이제 곡률이죠.

6) 열률(torsion)은 3차원 공간을 운동하는 곡선이 얼마나 비틀리면서 움직이는지를 나타내주는 값으로 접촉평면의 법선벡터인 B벡터의 호의 길이에 대한 변화를 나타내는 벡터인 $\frac{dB}{ds}$에 의해 결정된다. 실제로 열률(τ)은 주단위법선벡터 N과 $\frac{dB}{ds}$의 내적을 이용하여 $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$로 정의된다(Thomas 외, 2010).

영준이 접촉평면의 정의에 포함된 T벡터와 N벡터를 이용하여 열률의 개념을 설명하고 있다는 것은 이전 수업에서 사회적으로 합의된 결론을 수용하고 있음을 보여준다. 영준의 이러한 행동은 Sfard(2008)가 의사소통적 갈등의 해소를 위한 초기 단계에서 필연적으로 나타난다고 말했던 관습화 단계와 유사하다. 따라서 교실에 나타났던 의사소통적 갈등은 해소된 것으로 보였다.

2. 인지 갈등의 해소

가. 인지 갈등의 미해결 확인

교실에서 합의된 결론을 수용한 것처럼 보인 영준은 수학적 토론이 마무리되는 시점에도 여전히 접촉평면에 대한 불완전한 이해를 보이고 있었다. 영준의 예는 의사소통적 갈등을 해소하면서 사회적으로 구성된 지식을 사용할 수 있다고 하여 학생의 인지 갈등이 해소되었다고 보기 힘들다는 주장의 사례가 된다. 달리 말하면, 인지 갈등이 충분히 해소되지 않더라도 학생들은 사회적으로 구성된 지식을 관습화하여 사용할 수 있다는 것을 보여준다.

<에피소드 Ⅳ-8. 접촉평면에 대한 영준의 불완전한 이해>

[22] 영준 : 아 뭐 정리가 안 된 건 아니고요.

[23] 교사 : 납득이 아직 안 가는 거지 지금.

[24] 영준 : 아니 납득이 안 간 건(...) 저 말 다 이해갔는데.

[25] 교사 : 어.

[26] 영준 : 이제 그냥 제가 방금 말씀 드린 대로, 그거는 모르겠다 이거에요. 그러니까 이거와 이거의 기하적인 차이, 이거와 이거의 기하적인 차이가 뭔지는 모르겠고, 그냥 민국의 말이 무슨 말 하는지도 알고, 그 접평면을 어떻게 결정하는지도 이제 그건 무슨 말인지 알았는데.

나. 인지 갈등의 원인 확인 및 해소

영준의 예를 통해 수학적 토론 과정에서 합의된 것처럼 보이는 지식을 사용할 수 있는 것이 인지 갈등 해소의 충분조건으로 볼 수 없다는 것을 확인한 연구자는 영준이 겪고 있는 갈등의 해결을 위한 실마리를 찾기 위해 영준과 면담을 두 차례 수행하였다. 1차 면담에서 연구자는 영준의 인지 갈등이 이차원 곡선의 접선 개념으로부터 삼차원 곡선의 접평면 개념으로 대응시키려는 시도에서 비롯되었다는 것을 확인하였다.

<에피소드 Ⅳ-9. 영준의 인지 갈등의 원인 확인>

[27] 영준 : 접하는 이 평면하고, 이차원에서 곡선에 대해서 접선이라는 개념이 이렇게 대비되는 거잖아요. 비슷한 것이잖아요.

[28] 연구자 : 접평면과 접선?

[29] 영준 : 예, 삼차원에서는 접평면, 이차원에서는 접선 (중략)

[30] 연구자 : 곡선은 그대로 곡선이야?

[31] 영준 : 그것도 잘 모르겠네. 곡선은 그대로(..) 곡선이 아니어야 될 것 같다는 느낌이 들어요.

[32] 연구자 : 대응시킨다면?

[33] 영준 : 예.

[34] 연구자 : 그럼 뭐가 되어야 할까?

[35] 영준 : (고개를 끄덕이며) 곡면이 되어야 할 것 같아요.

이전 토론에서 지속적으로 접평면 개념을 통해 접촉평면을 이해하려고 했던 영준은 이차원 곡선에서 성립하는 성질로부터 삼차원 곡선에서 성립하는 성질을 유추하고자 했으나, 그 적절한 대응을 완성하지 못했던 것이다. 부적절한 유추를 통해 인지 갈등이 비롯되었다고 판단한 연구자는 영준이 스스로 자신의 유추를 반성할 수 있게 하는 발문을 제시하였다. 그것은 영준이 2차원에서의 접선을 3차원에서의 접평면으로 확장한 반면, 그에 대응하는 곡선은 확장하지 않은

것에 대한 질문이었다.

영준은 자신의 유추에 대해 반성하면서 접평면에 대응하는 것은 곡선이 아니라 곡면임을 확인하였으며, 따라서 같은 곡선에 대해서 접선과 접평면을 대응시키는 것이 문제가 있다는 것을 알게 되었다. 다음으로 연구자는 접평면과 비교하여 접촉평면이 가지는 직관적인 특징을 확인할 수 있도록 영준이 사용한 '접한다'는 표현을 스스로 수정해보도록 하였다.

<에피소드 Ⅳ-10. 접평면과 접촉평면의 개념 차이 인식>

[36] 연구자 : 아무튼, 이제 저 T와 N이 이루는 평면이 어떤 역할을 하는지 알겠어?

[37] 영준 : 예. 어떤 역할을 하는지는 이제...

[38] 연구자 : 접한다는 개념보다는 평면이 곡선을?

[39] 영준 : 포함한다. (고개를 끄덕임)

영준은 곡선에 접하는 직관적인 이미지로부터 곡선이 운동하고 있는 평면, 즉 곡선을 순간적으로 '포함하는' 평면이라는 직관적인 이미지로 접촉평면의 의미를 파악할 수 있게 되었다. 영준에게는 T벡터와 N벡터로 이루어진 평면이라는 형식적인 정의보다는 기하학적 관점에서 접촉평면을 이해하는 것이 도움이 됨을 확인할 수 있다.

다. 반성적 담론을 통한 새로운 유추

1차 면담 이후 6주 만에 이루어진 2차 면담에서 영준은 접촉평면이 곡선을 포함하는 평면이라는 것은 이해하고 있었지만 접촉평면을 형식적인 정의와 연결해서 충분히 설명하지는 못하고 있었다. 이에 연구자는 접촉평면의 형식적인 정의에 포함된 T벡터와 N벡터를 영준의 직관적인 이해와 연결하기 위한 비유를 떠올리도록 하였다.

<에피소드 Ⅳ-11. 접촉평면 개념 이해를 위한 새로운 유추>

[40] 연구자 : 그럼 그 접촉평면이 어떤 의미를 가지는 것 같아?

[41] 영준 : 자기가 운동하고 있는 그 평면이죠.

(중략)

[42] 연구자 : 다른 비유를 들 수 있을까?

(중략)

[43] 영준 : 자기가 이동하는 방향과 바로 그다음 순간에서 이동하는 방향을 모두 포함하는 평면

[44] 연구자 : T와 N을 표현해보자면?

[45] 영준 : T는 한 점과 그 다음 점을 연결한 선.

[46] 연구자 : 그치? 그니까 점이 이제 두 개인 거지? 한 점과 그 다음 점.

[47] 영준 : 예, 그게 T죠.

(중략)

[48] 연구자 : 그럼 N은 뭐야?

[49] 영준 : 아, N은... 아하. 그럼 이렇게 생각하면 되겠네요. 접촉평면은 그 점과 그 다음 순간, 그리고 또 그 다음 순간을 지나는 평면이라고 생각하면 되겠네요.

[50] 연구자 : 그러니까 접촉평면은 점이 몇 개?

[51] 영준 : 세 개가 나오죠.

영준은 스스로 이차원 곡선에서의 접선을 '할선의 극한', 즉 곡선 위의 인접한 두 점을 잇는 직선의 극한으로 해석하는 상황을 삼차원으로 확장하여, 삼차원 곡선에서의 접촉평면을 곡선 위의 인접한 세 점을 지나는 평면의 극한으로 유추하였다.

영준이 스스로 불완전한 유추 과정을 반성하고, 이를 해결하기 위해 새로운 유추를 시도함에 따라 영준은 그동안 가지고 있었던 인지 갈등을 극복하고 마침내 접촉평면을 대상화할 수 있었다.

<에피소드 Ⅳ-12. 접촉평면에 대한 대상화>

[52] 영준 : 운동하는 물체가 그 순간 운동을 하고 있는 평면, 그게 가장 직관적인 표현이고 그리고 어떤 곡선을 주고 접촉평면에 가까운 평면을 찾으라고 하면 내가 최대한 가까이

찍을 수 있는 점 세 개를 잡아서 그 세 점을 지나는 평면을 찾으면 될 것 같아요.

[53] 연구자 : 응, 그것은 사실 근사적인 것이지?

[54] 영준 : 네, 실질적으로 찾을 때는 그렇게 하고. 만약 수식으로 정확한 식을 구하고 싶다면 T와 N을 구하여 그것을 포함하는 평면을 찾으면 돼요.

수학적 토론을 촉발시킨 영준의 접촉평면의 직관적 이해에 대한 의문은 이차원에서 삼차원으로의 확장이라는 유추 아이디어에서 비롯된 것이다. 하지만 영준의 인지 갈등의 원인이 되었던 유추 아이디어는 이에 대한 반성적 활동을 통해 보다 적절한 대응관계를 찾아냄으로서 직관적인 이해를 가능하게 하는데 기여하고 있었다. 즉, 자발적으로 만들어낸 유추에서 대응되는 대상을 명료하게 하고, 자신이 가지고 있는 지식을 바탕으로 이를 더 높은 차원으로 유추하게 하는 발문에 따라 활동하면서, 영준은 접촉평면의 직관적인 의미와 형식적인 정의를 서로 연결할 수 있었고, 비로소 접촉평면의 정의에 입각한 메타규칙을 사용하는 담론을 자신의 담론으로 만들 수 있게 되었다.

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구에서는 동일한 수학적 대상에 관하여 참여자 사이의 갈등을 일으키는 서로 다른 의견들이 제시되고, 이 의견들이 집단적으로 검토되면서 갈등의 해소라는 공통의 목표를 위해 상호작용하는 반성적 담론을 수학적 토론으로 정의하였다. 특히 서로 다른 메타규칙이 사용되는 집단적 의사소통 과정에서 나타나는 의사소통적 갈등이 참여자들의 협력적인 상호작용을 통해 해소되어가는 과정을 분석하였다. 분석 결과 인지 갈등의 원인이 충분하게 파악되지 않은 채 이루어진 집단적 의사소통을 통해 의사소통적 갈등은 해소되었지만 인지 갈등은 해소되지 않고 있음을 발견하였다. 또한 수학적 토론 과정에서 참여자들에 의해 의사소통적 갈등이 인식되면서 질문의 명료화, 의견제시 및 반박, 교사의 정리라는 세 요소로 이루어진 의사소통 패턴이 나타나는 것을 확인하였다. 한편, 불완전한 유추 활동으로부터 인지 갈등이 비롯되었다는 것과 유추 활동을 스스로 반성하게 하는 발문을 통해 학습자가 적절한 대응 관계를 발견할 수 있다는 것을 확인하였다. 이러한 분석 결과를 통해 다음과 같은 세 가지 시사점을 제시할 수 있다.

첫째, 인지 갈등과 의사소통적 갈등은 개념적으로는 구분되지만 서로 무관한 것은 아니다. 특히 인지 갈등의 공표는 의사소통적 갈등의 출현을 촉진시킨다. 급진적 구성주의 관점에서는 인지 갈등을 유발하기 위한 한 자원으로 사회적 상호작용에서의 갈등 상황을 제시해왔다(von Glasersfeld, 1995; Steffe, 1991). 그러나 본 연구 결과에 따르면, 인지 갈등이 공동체에 공표되고 그 문제를 해결하는 과정에서 참여자들 사이에 서로 다른 메타규칙이 표면으로 드러나게 됨으로서 의사소통적 갈등이 출현하고 있었다. 이러한 결과는 사회적 상호작용을 수학 학습의 과정이자 결과로 간주하는 사회문화적 관점과 연결된다(Bauersfeld, 1980; Voigt, 1985; Yackel 외, 2011).

둘째, 의사소통적 갈등의 해소를 위해서는 참여자들이 의사소통적 갈등의 출현을 인식할 수 있는 기회가 주어져야 한다. 대화에 참여하는 당사자들은 의사소통적 갈등의 존재 여부를 인식하지 못하는 경우가 많다(Sfard, 2008). 본 연구에서 교사는 대화를 주도하기보다는 학생들의 대화를 관찰하며 조율하는 역할을 하고 있었다. 따라서 교사는 학생들 사이의 의사소통이 효과적이지 않은 상황을 인식할 수 있는 기회를 가질

수 있었다. 의사소통이 효과적이지 않음을 인식한 순간에 교사는 학생들에게 자신의 의견이나 질문의 의미를 상대방이 이해할 수 있도록 명확하게 표현할 것을 요구하며 대화에 개입하였다. 이러한 교사의 개입은 교실 공동체의 전체 토론 과정에서 드러나는 동료의 표면화된 발언 및 그 의도에 대하여 집단적인 반성을 촉진하는 역할을 하였다(Cobb 외, 1997). 즉 교사의 개입은 학생들이 당면한 의사소통적 갈등의 존재를 인식할 수 있도록 도와주었으며, 그 결과 의사소통적 갈등의 해소를 위한 대안적인 의견이 출현하는 계기를 제공하였다.

셋째, 의사소통적 갈등의 해소가 인지 갈등의 해소를 함의하는 것은 아니다. 본 연구에서는 접촉평면의 의미에 관하여 인지 갈등을 겪고 있는 학생이 수학적 토론을 통해서 접촉평면의 형식적 정의를 관습화하여 사용할 수 있게 됨을 확인하였다. 이러한 관습화는 Sfard(2008)의 관점에서 의사소통적 갈등의 해소를 위한 필연적 단계이다. 하지만 타인의 담론을 받아들여 사용할 수 있게 됨으로서 의사소통적 갈등이 해소된다고 하더라도 그것이 개인의 인지 갈등을 해소하지 못하고 있음을 확인하였다. 인지 갈등의 해소를 위해서는 그 원인을 정확히 파악하고, 스스로 반성해보는 기회가 주어져야 한다.

본 연구에서와 같이 불완전한 유추 때문에 인지 갈등이 발생한 경우에는, 대응되는 유사한 대상들과 그 관계를 명료화하는 유추 교정 기회가 제공되어야 한다는 제언을 할 수 있다. 유추는 수학적 발견의 유용한 도구이지만(Polya, 1954), 이를 성공적으로 활용하기 위해서는 대응되는 대상의 표면적인 유사성을 파악하는 것뿐만 아니라 대상들 사이의 대응을 모호성 없이 인식하여(English & Sharry, 1996) 구조적인 유사성을 파악할 수 있어야 한다. 수학의 역사에서 뛰어난 수학자들에게도 유추가 오류와 오개념의 원천이 될 수 있었던 것처럼(이경화, 2009), 수학 학습 상황에서 학생이 불완전한 유추로 인지 갈등이 발생하는 기회가 많다는 것을 교사는 인식해야 하며, 학생의 불완전한 유추를 교정해줄 수 있는 반성적 질문을 제시할 수 있어야 한다. 유추 교정을 위한 이러한 교사의 반성적 담론 조성 노력에 대해서는 심층적인 분석이 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

박진석, 표용수, 김향숙(2010). **Mathematica를 활용한 미분기하학 개론**. 서울: 경문사.

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈(2006). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

이경화(2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. **수학교육학연구, 19**(3), 355-369.

지정은(2006). **수학 교실의 토의 담화 분석**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

황혜정(2002). 수학 교과에서의 집단탐구식 수업방법에 관한 고찰. **수학교육학연구, 12**(1), 1-16.

Bartolini Bussi, M. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1-2), 11-41.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 23-41.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 258-277.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspective in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3/4), 175-190.

Cresswell, J. C. (1994). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Thousand Oaks, California: Sage.

English, L. D., & Sharry, P. V. (1996). Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. *Educational Studies in Mathematics, 30*(2), 135-157.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Hoyles, C. (1985). What is the point of group discussion in mathematics?. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 205-214.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass.

O'Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 143-185.

Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology*. New York: Basic Books.

Pirie, S. E. B., & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 459-470.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning Ⅰ: Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ : Princeton University Press.

Richards, J. (1991). Mathematical discussion. In E. von Glasersfeld. (Ed.) *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 44-55.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 13-57.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 567-615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse－Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51*, 1-9.

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76.

Soucy McCrone, S. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning,* 7(2), 111-133.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2010). *Thomas' calculus early transcendentals.* Pearson.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en didactique des mathématiques, 6*(1), 69-118.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning. Studies in mathematics education series: 6.* Washington D.C.: The Falmer Press.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 247-261.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

Yackel, E., Gravemeijer, K., & Sfard, A. (2011). *A journey in mathematics education research.* Dordrecht, The Netherlands: Springer.

The Relationship between Cognitive Conflicts and Commognitive Conflicts in Mathematical Discussion

Oh, Taek Keun (Graduate School, Seoul National University)
Park, Mimi (Graduate School, Seoul National University)
Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)

In this study, we analyzed a mathematical discussion in the Calculus Ⅱ course of the Gifted Science Academy and individual interviews to determine the relationship between cognitive conflicts and commognitive conflicts. The mathematical discussion began with a question from a student who seemed to have a cognitive conflict about the osculating plane of a space curve. The results indicated that the commognitive conflicts were resolved by ritualizing and using the socially constructed knowledge, but cognitive conflicts were not resolved. Furthermore, we found that the cause of the cognitive conflict resulted from the student's imperfect analogical reasoning and the reflective discourse about it could be a learning opportunity for overcoming the conflict. These findings imply that cognitive conflicts can trigger the appearance of commognitive conflicts, but the elimination of commognitive conflicts does not imply that cognitive conflicts are resolved.

* Key Words : mathematical discussion(수학적 토론), commognitive conflict(의사소통적 갈등), cognitive conflict(인지 갈등), analogical reasoning(유추적 사고)

논문접수 : 2014. 3. 18
논문수정 : 2014. 4. 30
심사완료 : 2014. 4. 30