대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 2, 219 ~ 236. Jun 2014

삼각형의 합동조건에 대한 교사들의 이해와 개선 방안[1)]

임 해 경*

본 논문은 많은 교사들이 삼각형의 합동 조건에 대하여 불충분하거나 그릇된 이해를 하고 있다는 사실을 감지하고, 그 실태와 원인을 분석하고 대책을 모색하였다. 실태 조사 결과 대다수의 교사들은 삼각형의 합동조건은 세 가지 뿐이며, 두 변과 끼이지 않은 각이 주어졌을 때에는 반드시 삼각형이 하나로 결정되지 않는다는 잘못된 확신을 갖고 있었다. 분석 결과 그 원인은 주로 교과서가 제공하고 있었다. 연구 결과로서 교육과정의 기획과 교과서의 지필, 교사양성에 있어서 수정 보완 방안 일곱 가지를 제안하였다.

I. 서 론

본 연구는 부설초등학교의 한 학생이 가지고 온 질문으로부터 시작되었다. 문제의 발단은 다음의 시험 문제이다.

다음 중 주어진 조건을 가지고 이 삼각형과 합동인 삼각형ㄱㄴㄷ을 그릴 수 없는 것을 한 개 고르시오. ① ㄱㄴ의 길이=5㎝, ㄴㄷ의 길이=7㎝, ㄷㄱ의 길이=6㎝. ② ㄱㄴ의 길이=5㎝, 각ㄱㄴㄷ의 크기=40°, ㄴㄷ의 길이=6㎝. ③ ㄱㄴ의 길이=7㎝, ㄴㄷ의 길이=5㎝, 각ㄴㄷㄱ의 크기=40°. ④ 각ㄱㄴㄷ의 크기=60°, ㄴㄷ의 길이=5㎝, 각ㄴㄷㄱ의 크기=40°.

학생은 문제의 답을 ‘답없음’ 이라고 적었으나 정답은 ③번으로 채점되었고, 학생은 교사의 설명을 납득할 수 없다는 것이었다. 당시 교사의 설명 내용은 다음과 같다. “너의 말대로 ③번도 그릴 수는 있지만 교과서에 나와 있는 세 가지 합동조건에 해당 되지 않는다.”

이후 많은 교사와 교육대학생들이 삼각형의 합동 조건에 대하여 제대로 이해하지 못하고 있음을 확인하게 되었고, 그때부터 본 주제를 연구자의 강의 내용에 추가하게 되었다. 삼각형의 합동조건은 평면도형의 성질을 연역적으로 추론하고 증명하는데 있어서 기본이 되는 평면도형 성질의 가장 바탕이 되는 지식이다. 삼각형 합동조건의 중요성을 고려할 때 다수 교사들의 이러한 그릇된 이해 실태는 매우 심각한 문제라 하지 않을 수 없다. 삼각형의 합동조건에 대한 최근 국내 연구들은 주로 삼각형의 결정조건과 합동조건의 구성과정, 최소조건, 지도 방안에 대한 논의를 하고 있으며, 교사나 학생의 이해 또는 오개념에 관한 연구는 찾아볼 수 없다. 교사의 오개념은 계속해서 다음세대에 그대로 전달될 수밖에 없을 것이다. 우정호(2000)에 의하면 가르친 내용이 목표로 하는 지식을 알게 하는데 실패하는 것은 가르치고자하는 지식의 적절한

---

* 광주교육대학교, hkrim@gnue.ac.kr
1) 이 논문은 2014년도 광주교육대학교 학술연구비 지원에 의한 것임

교수학적 변환이 실패했기 때문이라고 한다(p.454). 일부가 아닌 다수의 교사들이 제대로 이해하지 못하고 있다면 이는 개인적이거나 국소적 문제로 해석될 수는 없을 것이다. 이러한 상황에서 본 연구는 그 원인을 분석하여 대책을 제안하고자 한다. 연구 목적 달성을 위하여 이론적 배경을 바탕으로 다음과 같은 연구 과정을 거친다.

첫째, 삼각형의 합동조건에 대한 교사들의 이해 정도를 분석한다.

둘째, 교육과정과 교과서에서 삼각형의 합동조건을 다루는 방식, 도입배경, 지도체계, 전개과정, 탐구맥락을 분석한다. 특히 두 변과 끼이지 않은 각의 경우(AsS, ASs, ASS)[2]에 대하여 어떻게 다루고 있는지 중점적으로 분석한다.

셋째, 이상의 분석을 바탕으로 삼각형 합동조건에 대한 교사들의 오개념 형성의 원인을 분석하고 대책을 모색한다.

II. 이론적 배경 및 선행연구 고찰

1. 유클리드 원론의 삼각형 합동조건

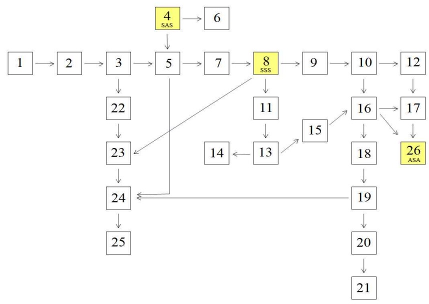
Euclid의『기하학 원론』은 고대 그리스에서 <원론(Elements)>이라고 일컬어지는 저작 중 가장 대표적인 업적이다(Cajori, 1924, p.66). Euclid의『기하학 원론』에서 삼각형의 합동조건은 논리적인 순서에 의해 전개되고 있는 26개의 명제에 포함되어 있다. Euclid 원론 제1권 제1군[3]의 명제1번부터 26번 중에 세 개의 명제가 삼각형의 합동조건인 것이다. 세 개의 명제(명제4번: SAS합동, 명제8번: SSS합동, 명제26번: ASA합동)는 다음과 같다.

명제 4 : 두 삼각형에서 두 변의 길이가 각각 같고 그 두 변이 만드는 각의 크기가 같다면, 그 두 삼각형은 밑변의 길이가 같고 삼각형도 서로 같다. 그리고 나머지 각, 즉 길이가 같은 각들과 마주보는 각도 서로 각각 같다.

명제 8 : 두 삼각형의 두 변의 길이가 각각 같고 그 삼각형은 밑변도 서로 같으면, 그 삼각형은 길이 같은 변이 만드는 각의 크기도 서로 같다.

명제 26 : 두 각의 크기가 서로 각각 같고 한 변의 길이가 같은 즉, 같은 각과 인접하는 변의 길이가 같거나 같은 각 중의 하나와 마주보는 변의 길이가 같은 두 삼각형이 있다면 그 두 삼각형의 나머지 변의 길이는 같고 나머지 각의 크기도 같다.

Euclid 원론의 명제 번호는 앞의 명제가 뒤 명제를 증명하는 데 이용되는 철저한 연역적 전개 방식으로 되어 있다. 제1권 제1군 26개 명제의 논리적 순서는 [그림I-1]과 같다. 화살표는 그 명제를 증명하는데 필요한 명제, 즉 먼저 증명되어야 하는 순서를 표시하고 있다.



[그림 I-1] Euclid 원론 제1권 제1군 명제의 논리적 순서. (손소현, 2009. p.11)

오늘날의 교육과정에서 삼각형의 합동조건을 모아서 다루는 것과는 다르게 Euclid 원론에서 삼각형의 합동에 관한 명제들은 다른 명제들을 증명하기 위해 증명해야했던 명제들 중의 하나

2) AsS(=SsA)는 두 변과 긴 변의 대각이 주어진 경우를 의미하며, ASs(=sSA)는 두 변과 짧은 변의 대각이 주어진 경우, ASS(=SSA)는 두 변과 끼이지 않은 한 각이 주어진 일반적인 경우를 의미한다.

3) Euclid원론 제I권의 명제는 문제와 정리로 이루어져 있으며, 다음 세 개의 군으로 구별된다. 제1군(명제1~26): 각과 삼각형, 제2군(명제27~32): 평행선, 제3군(명제33~48): 평행사변형 성질.

로 등장한다. 즉 삼각형의 합동조건을 하나의 주제로 여기지 않았다는 것을 알 수 있다. [그림 I-1]에서 알 수 있듯이 명제 8번(SSS합동)의 증명을 위해서는 반드시 명제 4번(SAS합동)이 필요하며, 명제 26번(ASA합동)을 증명하기 위해서는 명제 4번과 명제 8번을 필요로 하고 있다. 명제 4번은 1,2,3번의 도움 없이 증명됨을 알 수 있는데, 두 변의 길이와 그 두 변이 만드는 각의 크기가 같으므로 포개면 나머지 한 변을 이루는 두 꼭지점이 위치가 같고 따라서 나머지 한 변의 길이와 두 각의 크기가 같아진다는 '중첩의 원리'를 펼치고 있다. 증명에 '중첩의 원리'를 사용하다는 점은 오랜 기간 논란이 되었는데(Shibli, 1932, pp.103-105), 그 예로 Smith(1923)는 선의 중첩과 도형의 중첩이 논증의 방법으로 자유롭게 사용될 수 있다면 기하는 이러한 증명으로 가득 차게 될 것이라고 비판하였으며, Klein(1939)은 Euclid가 그의 기하학에서 운동 개념을 제거하려고 시도하였으나, 삼각형의 합동을 중첩의 원리에 의하여 증명하는 등 암묵적으로 운동의 개념을 사용하였다며 논리적 결함을 비판하였다(pp.188-190). 이러한 문제를 인식한 Hilbert는 SAS 합동을 공준화하여 중첩의 문제를 피하였다(Greenberg, 1990, pp62-63).

2. 클레로의 기하학 원론의 삼각형 합동조건

역사-발생적 접근방법을 대표하는 기하 교재인 Clairaut(1713~1765)의 《기하학 원론》에서 삼각형의 합동조건은 제1부(토지를 측량하기 위해 사용한 가장 자연스러운 방법)의 32개 명제 중에 포함되어 있다. Clairaut의 《기하학 원론》은 그 이전의 명제들의 증명 여부가 이후 내용 전개에 영향을 미치지 않으며, 기본적인 원리를 익힌 후 자연스럽게 알고 싶어지는 내용의 순서로 전개되어있다. 삼각형의 합동에 관한 명제는 제1부의 26번(SSS 합동), 28번(SAS합동), 30번(ASA합동)에 위치하고 있다.

명제 26 : 삼각형의 세 변을 알 때 그것과 합동인 삼각형 그리기.

명제 28 : 어떤 각과 같은 각을 그리는 방법-두변과 그 끼인각이 주어지면 삼각형이 결정된다.

명제 30 : 두 각과 한 변은 삼각형을 결정한다.

그는 바로 앞의 25번에서 합동인 삼각형의 필요성을 다음과 같이 설명하고 있다.

명제 25 : 측정하려는 밭이나 안마당에 측정을 방해하는 장애물이 있을 때, 평평한 땅을 골라 그 위에 합동인 삼각형을 그리자.

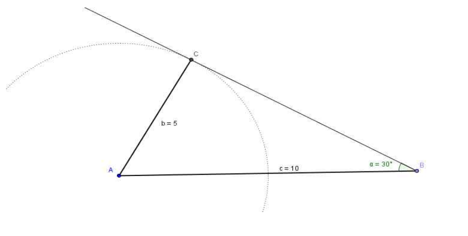
삼각형의 합동에 관한 명제에 있어서 클레로의 《기하학 원론》의 『Euclid 원론』과 가장 큰 차이점은 바로 이 도입배경이다. 『Euclid 원론』에서는 합동임을 증명하는 반면 클레로의 《기하학 원론》은 작도로써 합동을 입증하고 있다는 점과 클레로의 《기하학 원론》의 삼각형 합동 제시 순서(SSS→SAS→ASA)는 현재 우리나라 초등, 중등학교 교과서가 하고 있는 것과 동일하다. 현 중학교 기하교재는 그 내용적 근원을 고전적 원론에 두고 있는 동시에, 다양한 측면에서 역사-발생적 원론의 특성을 수용하고 있다. 곧, 현재의 중학교 기하교재는 나름대로 고전적 원론과 역사-발생적 원론의 이념을 수용하고, 이를 통합하려는 역사적 발전의 산물로 나타난 것으로 볼 수 있다(우정호, 권석일, 2006, p.18).

3. 선행연구 분석

삼각형의 합동조건과 관련한 선행 연구들은 결정조건과 합동조건의 구성과정과 최소조건에 대한 논의(Eggleton, 2001; 최노성, 2002; 박선용, 권석일, 2004; 임재훈, 2005; 김수현, 최윤상, 2007; 손소현, 임재훈, 2009), 지도 방안에 대한 논의(강정미, 2005; 김구슬, 2005; 최지현, 2009;

이선희, 2012), 공학적 도구의 활용에 대한 논의(고상숙, 정승진, 2001), 외국의 교과서 비교 논의(한인기, 2005) 등이 있다. 그 중에서 특히 본 연구의 논점과 밀접한 AsS조건에 관한 논의는 최노성(2002), 김수현, 최윤상(2007), 고상숙, 정승진(2001) 등이다. 연구들은 공통적으로 '현행 교과서들이 삼각형의 합동조건을 학생들 스스로 추측하고 구성하는 본격적인 탐구 과정이 없다는 점, 기성의 지식을 간단한 확인 활동만을 거쳐 받아들이게 한다는 점, 단순히 작도 순서만을 암기하도록 하는 문제점'을 지적하고 있다.

김수현, 최윤상(2007)은 '세 선분의 길이가 주어질 때, 두 선분과 그 끼인각이 주어질 때, 한 선분과 그 양 끝 각이 주어질 때, 두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때' 이 네 개의 명제가 삼각형을 결정하기 위한 필요충분조건이며 따라서 삼각형의 합동조건을 위 네 가지라고 주장하고 있다. 이는 현재 다수 교사들의 AsS 합동에 대한 그릇된 이해 상황을 감안할 때 긍정적으로 볼 수 있다. 그런데 이 네 가지 외에도 유일한 삼각형이 결정되는 경우를 살펴보자. 예를 들어서 두 선분과 짧은 선분의 대각이 AB의 길이=10, AC의 길이=5, 각ABC=30°로 주어졌다고 하자.



그림에서 볼 수 있듯이 주어진 조건으로 유일한 삼각형이 결정됨을 확인 할 수 있다. 이 경우는 두 선분과 짧은 선분의 대각이 주어졌을 때에도 유일한 삼각형이 결정될 수 있음을 보여주는 예 중의 하나이다. 이것은 두 선분과 짧은 선분의 대각으로서 {AB의 길이=c, AC의 길이=b=c*sinα, 각ABC=α}인 경우의 구체적인 한 가지 예에 불과하다. 즉 '두 선분과 짧은 선분의 대각이 주어졌을 때'도 유일한 삼각형이 결정되는 경우가 (무수히) 존재 한다는 것이다. 따라서 결국 AsS(두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때)의 경우를 삼각형의 결정조건에 추가시킨다고 해도 그 역시 충분조건에 불과하다.

한인기(2005)는 러시아의 기하 교과서와 한국의 교과서의 차이점을 분석하였다. 그는 러시아 교과서가 삼각형의 합동조건을 결정조건에 의해서 유도하지 않고 엄밀한 증명으로써 정당화하며, 합동 조건 제시 순서가 SAS→ASA→SSS이라는 점(우리나라 교과서는 SSS→SAS→ASA), 삼각형의 합동을 다룬 후에 작도문제를 해결한다는 점이 우리나라 교과서와 다른 점이라고 한다.

III. 연구 방법

본 연구에서 교사들의 삼각형 합동조건에 대한 이해 정도 조사는 10여 년 동안 이루어졌다. 조사의 대상은 예비초등교사인 G교육대학교 학부생, 초등교사인 G교육대학교 대학원생과 연수원에서 연수를 받던 초•중등교사로 이루어졌다. 교사들의 이해 정도를 분석하고 그것을 토대로 오개념을 바로잡고 제대로 이해시키기 위하여 연구자가 맡은 학부, 대학원, 연수원 강의에서 매번 동일한 패턴의 6단계 수업이 다음과 같이 이루어졌다. 첫째, <선다형문제1>과 <선다형문제2>를 각각 풀어보도록 한 후 답안지를 수거한다. 둘째, <서술형문제>를 해결하도록 한다. 셋째, <서술형문제>를 가지고 문제해결 수업을 진행한다. 넷째, 그동안 각자가 가지고 있던 오개념은 어디서부터 왜 생긴 것인지 스스로 분석하게 한다. 다섯째, <탐구형 문제>를 해결하도록 한다. 여섯째, <탐구형 문제>를 GSP 또는 Geogebra를 활용하여 탐구하고 확인하게 한다.

<선다형 문제1> <선다형 문제2> <서술형 문제> <탐구형 문제>는 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<선다형 문제1>은 삼각형의 세 가지 합동 조건(SSS, SAS, ASA) 이외의 다른 조건에 대해 조금이라도 관심을 기울이는지 알아보기 위하여 의도적으로 매우 단순하게 출제하였다. <선다형 문제2>는 <선다형 문제1>과 결국은 같은 내용으로 볼 수 있는데 연구 대상자들의 이해 정도를 분석하는데 신뢰성과 객관성을 확보하기 위하여 표현을 다르게 출제하였다.

<서술형 문제>는 <선다형문제1>에 두 가지(ASs, ASS)경우를 추가하였고, 번호 순서를 바꾸었다. 번호를 바꾼 이유는 연구 대상자들이 ASs-AsS-ASS의 순서로 탐구하도록 하기 위해서이다. 선다형 문제의 경우는 AsS에 관심을 기울이는지 확인을 하기 위한 것이었으므로 AsS인 경우 하나만을 배치한 반면 서술형 문제에서는 ASs, AsS, ASS의 차이를 인지하는지 알아보기 위함이었다. 답안지에 작도가 가능한 경우는 작도를 하고 가능하지 않은 경우는 그 이유를 구체적으로 쓰도록 하여, 연구대상자들이 문제 해결에 적극적으로 참여하며 탐색의 기회를 가지도록 안내하였다. 작도 내용과 구체적인 이유로부터 그들의 인지 정도를 일차적으로 분석하고

<표 Ⅲ-1>

<선다형 문제1> 다섯 명의 친구들은 각각 주머니 속에 삼각형을 한 개씩 가지고 있다. 친구들은 각각 자기가 가지고 있는 삼각형의 정보를 다음과 같이 알려주었다. 이 정보를 가지고 친구가 가지고 있는 삼각형과 합동인 삼각형을 단번에 그릴 수 있는 것을 모두 고르시오.
(각도기, 자, 컴퍼스 등 모든 도구 사용 가능)(편의상 삼각형ABC라고 하자.)
① AB의 길이=5㎝, BC의 길이=6㎝, CA의 길이=7㎝.
② AB의 길이=5㎝, 각ABC=40°, BC의 길이=6㎝.
③ AB의 길이=7㎝, BC의 길이=5㎝, 각BCA=40°.
④ 각ABC=60°, BC의 길이=5㎝, 각BCA=40°.
⑤ 각ABC=60°, 각BCA=45°, 각CAB=75°.

<선다형 문제2> 다음 조건을 가지고 두 개의 삼각형(삼각형ABC와 삼각형A’B’C’)이 합동이라고 판단되는 것을 모두 고르시오.
① AB의 길이=A‘B’의 길이=5㎝, BC의 길이=B‘C’의 길이=6㎝, CA의 길이=C‘A’의 길이=7㎝.
② AB의 길이=A‘B’의 길이=5㎝, 각ABC=각A‘B’C‘=40°, BC의 길이=B’C‘의 길이=6㎝.
③ AB의 길이=A‘B’의 길이=7㎝, BC의 길이=B‘C’의 길이=5㎝, 각BCA=각B‘C’A‘=40°.
④ 각ABC=각A‘B’C‘=60°, BC의 길이=B’C‘의 길이=5㎝, 각BCA=각B’C‘A’=40°.
⑤ 각ABC=각A‘B’C‘=60°, 각BCA=각B’C‘A’=45°, 각CAB=각C‘A’B‘=75°.

<서술형 문제> 다음 중 주어진 조건을 가지고 유일한 삼각형의 작도가 가능한 경우는 작도를 하고, 가능하지 않은 경우는 그 이유를 구체적으로 쓰시오.
① AB의 길이=5㎝, BC의 길이=6㎝, CA의 길이=7㎝.
② AB의 길이=5㎝, 각ABC=40°, BC의 길이=6㎝.
③ AB의 길이=5㎝, BC의 길이=7㎝, 각BCA=40°.
④ 각ABC=60°, BC의 길이=5㎝, 각BCA=40°.
⑤ 각ABC=60°, 각BCA=45°, 각CAB=75°.
⑥ AB의 길이=7㎝, BC의 길이=5㎝, 각BCA=40°.
⑦ AB의 길이=6㎝, BC의 길이=6㎝, 각BCA=50°.

<탐구형 문제> 두 선분과 짧은 선분의 대각이 주어졌을 때는 유일한 삼각형이 결정되는 경우는 존재하지 않는가?

자 하였다.

삼각형의 합동조건에 대한 교사의 이해 정도를 알아보기 위한 또 한 가지의 방법으로 EBS의 한 동영상 강의[4]를 분석하였고, 교사들의 그릇된 이해의 원인을 찾기 위하여 수학과 교육과정, 초등학교 5학년 교과서, 25개의 중1 교과서와 교사용 지도서를 비판적으로 분석하였다.

Ⅳ. 연구결과

1. 삼각형의 합동조건에 대한 교사들의 이해

다음 <표 Ⅳ-1>은 가장 최근에 조사한 학부 38명, 대학원 16명, 연수 초등교사 32명, 연수 중등교사 31명의 <선다형 문제1> 답안지 결과이다.

결과는 연구대상자 중 학부와 대학원생의 경우에 매번 연구자가 우려하고 예상했던 그대로였다. 거의 모든 답안지는 정답으로 ①②④을 채택하였고 스스로 선택한 답에 대해 확신에 차 있었다. 연구대상자 중 연수중이던 초등 교사들의 경우는 정답인 ①②③④을 선택한 몇 명의 답안지가 발견되었다. 정확한 답을 적은 교사들은 면담 결과 모두가 학부 또는 대학원에서 본 연구자의 강의를 수강한 경험이 있어서 내용을 잘 알고 있거나 기억을 더듬어 생각해 냈다고 진술하였다. <선다형 문제2>의 결과 역시 <선다형 문제1>과 다르지 않았다. 이로써 연구대상자들 중 대부분(최근 조사 결과로는 92.3%)이 삼각형의 합동조건은 세 가지 조건 뿐(SSS, SAS, ASA)인 것으로 확신을 하고 있으며, 그 외에 다른 조건에는 특별한 관심을 기울이지 않고 있다는 결론을 내렸다.

<서술형 문제>의 답안지 결과는 다음 <표 Ⅳ-2>와 같이 네 가지로 분류할 수 있었다.

한 부류는 합동의 세 가지 조건(SSS, SAS, ASA)에 대한 강한 확신으로 인하여 다른 조건에 대해서 전혀 관심을 두지 않은 경우이다. 이 경우는 ①②④외에는 모두 작도가 불가능하며

<표 Ⅳ-1>

	①②④ 로 답한 수	①②③④ 로 답한 수	기타	계
학부	37(97%)	0	1	38
대학원	15(94%)	1	0	16
연수 초등교사	29(91%)	3	0	32
연수 중등교사	27(87%)	4	0	31

<표 Ⅳ-2>

답	이유	정답여부
①②④	나머지는 삼각형 ‘합동조건 세 가지에 해당하지 않기 때문’ ③⑥⑦이 정답이 아닌 이유는 ‘끼인각이 아니므로’	오답
①②④	③⑥⑦은 두 개의 삼각형이 그려진다.	오답
①②③④⑥⑦	③⑥⑦ 도 작도가 가능하다	오답
①②④⑥⑦		정답

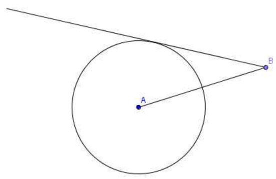
4) http://www.youtube.com/watch?v=XiPrD4HcrZw

그 이유는 ‘나머지는 삼각형 합동조건 세 가지에 해당하지 않기 때문’으로 기술하고 있으며, ③⑥⑦이 정답이 아닌 이유는 대부분이 ‘끼인각이 아니므로’라는 표현을 하고 있었다. 두 번 째 부류는 ①②④을 답으로 작은 것은 첫 번째 부류와 동일하나, ASS, AsS, ASs의 세 조건을 구분하지 못하고 동일한 조건으로 보는 경우이다. ③번이 두 개의 삼각형이 그려진다는 사실을 확인한 후 ⑥⑦번도 같은 경우라고 판단해버리는 경우이다. 세 번째 부류는 ①②③④⑥⑦을 답으로 적은 경우인데, ③번을 자와 각도기, 컴퍼스를 사용하여 작도한 결과 미처 두 점에서 만나는 것을 확인하기 전에 한 점에서 만나는 것으로 만족하여 작도가 가능하다고 생각한 경우이다. 그런 후 역시 ⑥⑦번도 같은 경우라고 판단해버리는 경우이다. 마지막으로 정답을 도출해내는 경우이다.

문제해결 수업을 진행한 후에, 각자가 가지고 있었던 오개념은 어디서부터, 왜 생긴 것인지 스스로 분석하여 기록하도록 하였다. 다음은 그 내용의 일부를 그대로 옮긴 것이다.

‘이러한 결과가 나오는 것을 보고 충격을 먹었다. 지금까지 10여 년 동안 당연하게 알고 있었던 법칙에 어긋나는 것이 있었던 것이다.’
‘그럼 그동안 저희가 배운 것이 틀린 것인가요?’
‘이게 잘못된 고정관념인가?’
‘공식을 받아들였을 뿐 의심하지 않았다. 공식이 잘못되었다. 난 뭘 알고 있었을까?’
‘당연히 SSS, SAS, ASA를 생각하고 다른 것이 틀렸다는 것을 증명해 보이려다보니 한 가지만 나오는 것이 있어서 ‘이상하네’ 라고 생각하였다. 너무 맹신하고 있었다. ㅠㅠ‘
‘분명 그렇게 알고 있었는데 어디서 잘못 되었을까요?’

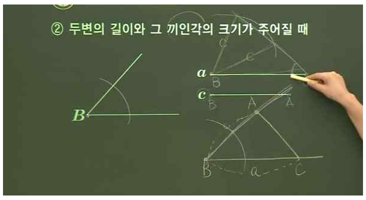
<탐구형 문제>를 지필환경에서 컴퍼스, 각도기, 자 등을 사용하여 해결해 보도록 하면 대부분의 연구대상자들은 문제 해결이 쉽지 않고 막연하다며 의욕을 보이지 않는다. 이 때 연구자는 두 선분과 짧은 선분의 대각의 특별한 예로 AB의 길이=10, AC의 길이=5, 각ABC=30°를 제공하고 작도해 보도록 한다. 지필환경에서 컴퍼스, 각도기, 자 등 도구들을 사용하여 작도해보지만 작도만으로는 한 점에서 만나는지, 두 점에서 교차하는지, 만나지 않는지 정확한 판단을 할 수는 없다.

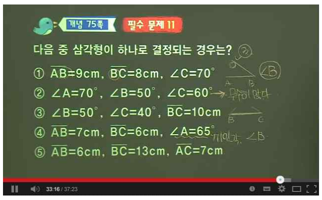


다만 조건이 30°라는 특수각이기 때문에 주어진 조건으로 삼각형이 한 개로 결정됨을 알 수 있을 뿐이다. 그러나 이 예로써 ‘두 선분과 짧은 선분의 대각으로도 유일한 삼각형이 결정되는 경우가 존재한다.’는 사실을 알게 된다. GSP 또는 Geogebra를 활용하도록 하면, 도형을 움직이면서 관찰하고 탐구할 수 있으므로 특수한 경우 외에도 많은 예들을 스스로 찾을 수 있게 된다.

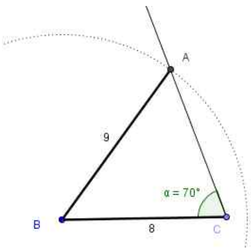
다음은 EBS의 한 동영상 강의[5]를 살펴보기로 한다. 교사는 삼각형의 결정조건 중 ‘②두선분의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때’를 설명하면서 ‘끼인각이 아닌 경우는 두 개가 생길 수 있기 때문’이라며 예를 들어 보이고 있다(아래 사진). 그리고는 꼭 ‘끼인각’이어야 함을 거듭 강조하고 있다. 그러나 ‘끼인각이 아닌 경우에도 유일하게 작도가 가능한 예가 있음’에 대해서는 언급이 없다. 뿐만이 아니다. 설명에 이어 제시한 문제는 다음과 같다.

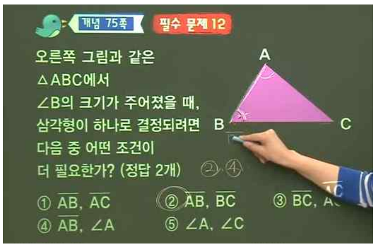
5) http://www.youtube.com/watch?v=XiPrD4HcrZw





교사는 풀이를 설명하면서 ①번의 경우 끼인각인 각B가 주어져야만 삼각형이 하나로 결정된다고 설명하고 있다. ④번 역시 '끼인각이 아니므로......' 라고 설명하고 있다. 그러나 ①번은 끼인각이 아니지만 '두 선분과 긴 선분의 대각'이 주어진 경우로서 아래 그림처럼 유일한 삼각형이 결정 되는 경우이다. 교사의 AsS조건에 대한 이해의 부족은 또 다음과 같은 문제로 이어진다.





교사는 정답을 ②,④번으로 설명하고 있지만 ①번 역시 정답에 포함되어야 한다는 사실을 모르고 있는 것이다.

2. 교육과정과 교과서의 분석

앞에서 살펴본 바와 같이 삼각형의 합동 조건에 대한 교사들의 이해 정도는 매우 심각하다고 하지 않을 수 없다. 이러한 이해 부족의 원인을 찾기 위해 교육과정과 교과서를 상세히 분석해보자. 교육과정은 교과서를 통하여 학습자에게 전달된다. 교사와 학생에게 교과서는 수업목표, 수업내용, 전개과정 등 수업의 전반적인 기준과 틀을 제공하는 지침서이다. 교과서의 내용과 목표설정은 교육과정을 벗어나서는 안 된다.

우리나라의 현행 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서 삼각형의 합동조건은 [초등학교 5~6학년군]과 [중학교 1~3학년군]에서 다루고 있다.

[초등학교 5~6학년군]

(나) 도형

1 합동과 대칭

① 구체적인 조작 활동을 통해 도형의 합동의 의미를 알고, 합동인 도형을 찾을 수 있다.

② 합동인 두 도형에서 대응점, 대응변, 대응각을 각각 찾고, 그 성질을 이해한다.

[중학교 1~3학년군]

(마) 기하

2 작도와 합동

① 삼각형을 작도할 수 있다.

② 삼각형의 합동 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 합동인지 판별할 수 있다.

여기서 주목할 만한 것은 지난 제7차 수학과 교육과정과 달라진 점이다. 제7차 교육과정에 제시된 <5-가 단계>의 도형 영역에 삼각형 합동조건에 대한 언급은 다음과 같다.

< 5-가 단계 >

① 직육면체, 정육면체의 구성 요소, 성질, 전개도

② 평면도형에서 선대칭과 점대칭

③ 합동인 도형 식별, 자와 컴퍼스로 삼각형 그리기

1945년 우리나라 교육과정이 생긴 이래 제7차 교육과정[6]에 이르기까지 우리나라 초등학교 5학년 수학 교과서에서는 ‘합동인 삼각형 그리기’를 해 오고 있다. 이는 일본의 초등학교 교과서와 흡사하다. 그런데 현행 교육과정[7]에서는

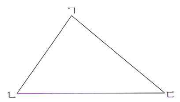
② 합동인 두 도형에서 대응점, 대응변, 대응각을 각각 찾고, 그 성질을 이해한다.

로 표현하고 있는 것으로 보아 현재 집필 중인 초등학교 5~6 학년군 교과서[8]에는 ‘합동인 삼각형 그리기’가 포함되지 않을 것으로 짐작된다.

여기서는 현재 초등학교 5학년이 사용하고 있는 2007교육과정에 따른 교과서 5-1의 내용을 분석하기로 한다. 초등학교 교과서에서 합동의 도입은 완전히 겹쳐지는 도형 찾기를 한 후 ‘모양과 크기가 같아서 포개었을 때, 완전히 겹치는 두 도형을 서로 합동’이라고 {약속}으로써 정의하고 있다. 대응점, 대응변, 대응각을 역시 {약속}으로써 정의 한 후 ‘합동인 삼각형 그리기’로 들어간다. 세 변의 길이가 주어진 삼각형과 합동인 삼각형, 두 변의 길이와 그 사이에 있는 각의 크기가 주어진 삼각형과 합동인 삼각형, 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어진 삼각형과 합동인 삼각형의 순서로 그리기 활동을 한다. 이는 『Euclid 원론』에서 간격을 두고 세 개의 명제가 등장하는 것과는 다르며, 클레로의《기하학 원론》에서 세 가지 방법을 한꺼번에 도입하는 방식과 바슷하다.

그런데 초등학교 교과서에서 세 가지의 주어진 조건을 가지고 삼각형 작도 활동 후 바로 이어지는 문제는 다음과 같다.

❺ 삼각형 ㄱㄴㄷ과 합동인 삼각형을 그리려고 합니다. 알아야 할 최소한의 조건을 모두 말해 보시오.



여기서 ‘최소한의 조건’이라는 용어가 등장 한다. 합동인 삼각형 그리는 조건이 어떻게 하여 생기게 되었는지, 왜 세 가지 조건을 제시한 것인지에 대한 설명도 탐구도 없는 체 세 가지 방법으로 그리는 활동을 한 후 제시하고 있는 이 문제는 학생들에게 이미 제시한 세 가지 방법만을 정답으로 받아들이도록 강요하고 있는 것이나 다름이 없다. 게다가 이 상황에서 어떤 설명이나 과정 없이 갑작스럽게 등장하는 ‘최소한의 조건’이라는 용어는 학생의 수준에 적절하다고 볼 수 없다.

다음으로 중학교 교과서를 살펴보자. 본 연구의 대상이 된 교과서는 25개의 중1수학 교과서이다. 삼각형의 합동은 모든 교과서에서 동일하게 삼각형의 결정조건으로부터 도입하고 있다. 중학교 교과서에서는 삼각형의 작도에 앞서 간단한 작도와 수직이등분선의 작도, 크기가 같은 각의 작도를 학습한다. 이는 초등학교 교과서에서 준비 없이 합동인 삼각형의 작도를 다루는 것과는 차이가 있다. 모든 교과서가 합동인 삼각형 작도의 필요성이나 동기에 대해서는 언급이 없으며, 대동소이하게 세 가지의 주어진 조건(SSS, SAS, ASA)을 순서대로 작도 활동을 거친 후 삼각형의 결정조건을 세 가지로 확정하고 있다. 세 가지 조건으로 확정을 짓기 까지는 탐구과정이나 사고 활동을 거치는 것이 아니고 설명의 형식을 취하고 있다. 주어진 조건 세 가지의 경우에 삼각형이 유일하게 작도되므로 결정조건

6) 2007교육과정
7) 2009교육과정
8) 2009교육과정에 따른 교과서

은 다음의 세 가지라고 정당화 하고 있다.

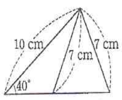
지금까지의 활동에서 알 수 있듯이 다음의 세 가지 경우 삼각형은 모양과 크기가 하나로 결정된다. 이것을 삼각형의 결정조건이라고 한다.

삼각형의 결정조건

1. 세 변의 길이가 주어질 때
2. 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
3. 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어질 때

세 가지 조건 이외의 다른 조건은 왜 결정 조건에 포함되지 않는지에 대하여 어떻게 다루고 있는지 살펴보기로 하자. 앞 절에서 살펴본 교사들의 AsS조건에 대한 그릇된 이해의 원인을 찾기 위하여 '두 변과 끼이지 않는 각'에 관점을 두고 살펴보기로 한다. 분석 대상인 23개의 중1 수학 교과서 중 9개의 교과서는 세 가지 조건(SSS, SAS, ASA)외에 다른 조건에 대해서 전혀 다루지 않고 있다. 다음으로 11개의 교과서는 ASs인 경우는 언급하고, AsS인 경우는 언급하지 않고 있다. 그리고 나머지 3개의 교과서는 ASs를 취급하면서 AsS에 대한 여지를 보이고 있다. ASs를 다루는 교과서들의 도입 방법은 세 가지 유형으로 분류할 수 있다. ASs를 다루고 있는 교과서에서 이를 도입, 전개하는 과정을 자세히 들여다보기로 하면, 첫째 (교과서에 따라) 수학 쓰기, 발전문제, 생각넓히기, 토론하기, 호기심실험실, 의사소통, 사고력기르기 등의 코너를 이용하여 다음과 같이(김종해 외, 2011) 구체적인 예를 그림과 함께 제시하면서 문제 제기를 하는 방법이다.

❷ 한 각의 크기가 40°이고 두 변의 길이가 각각 10 cm, 7 cm인 삼각형은 하나로 결정되는가? 그렇지 않다면 그 이유를 말해 보아라.



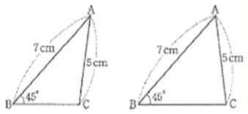
또 하나는 다음와 같이(정상권, 2011) 구체적인 예를 들었지만 그림은 보여주지 않은 경우이다.

의사소통 • 두 변의 길이가 각각 3 cm, 4 cm이고, 그 끼인 각이 아닌 한 각의 크기가 45°인 삼각형은 그 크기와 모양이 하나로 결정되는가? 하나로 결정되지 않는다면 서로 다른 삼각형을 그려 보아라.

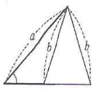
마지막 하나는 다음과 같이(류희찬, 2011) 구체적인 예를 그림으로 설명(단정)을 하는 부류이다.

조건 ❷ 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 한 각의 크기가 주어질 때

두 변 AB, AC의 길이가 각각 7 cm, 5 cm이고 ∠B=45°일 때, ∠B는 끼인각이 아니므로 오른쪽 그림과 같이 하나로 결정되지 않는다.

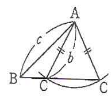


그런데 여기서 주목할 것은 설명에서 '∠B는 끼인각이 아니므로' 라고 잘못된 설명을 하고 있다는 것이다. 끼인각이 아니더라도 긴 선분의 대각인 경우는 하나로 결정이 된다는 사실을 간과 한 것이다. 또 다른 교과서(윤성식, 2011; 이강섭 외, 2011)의 설명(단정)와 교사용지도서(정상권, 2011b; 박종률, 2011b)를 살펴보기로 하자.



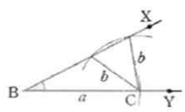
위의 예제 1, 2, 3에서와 같은 조건들이 주어지면 삼각형은 그리는 사람에 상관없이 오직 하나로 결정된다. 그러나 두 변의 길이와 그 끼인 각이 아닌 한 각의 크기가 주어지면 왼쪽 그림과 같이 삼각형은 하나로만 결정되지 않는다

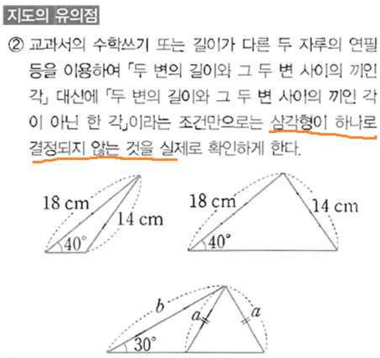
주의 두 변 b, c의 길이와 그 끼인 각이 아닌 ∠B의 크기가 주어질 때, 일반적으로 삼각형 ABC는 하나로 결정되지 않는다.



지도의 유의점

❶ **지도 가이드** 삼각형의 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 주어지면 삼각형이 한 가지로 결정된다는 것을 알게 한다. 예를 들어, 다음 그림과 같이 주어진 각이 주어진 두 변의 끼인 각이 아닌 경우, 즉 선분 a, b를 두 변으로 하고 두 변의 끼인 각이 아닌 ∠B의 크기가 주어지면 점 C를 중심으로 반지름의 길이가 b인 원을 그릴 때 반직선 BX와는 일반적으로 두 점에서 만나게 되어 2개의 삼각형을 만들 수 있음을 주의시킨다.

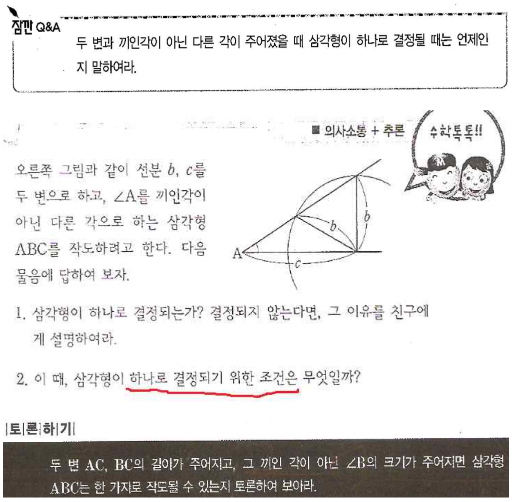



지도의 유의점

② 교과서의 수학쓰기 또는 길이가 다른 두 자루의 연필 등을 이용하여 「두 변의 길이와 그 두 변 사이의 끼인 각」 대신에 「두 변의 길이와 그 두 변 사이의 끼인 각이 아닌 한 각」이라는 조건만으로는 삼각형이 하나로 결정되지 않는 것을 실제로 확인하게 한다.

이렇듯 잘못된 표현을 하고 있는 교과서나 지도서를 찾아보기란 그리 어려운 일이 아니다. 이들은 두 변과 끼이지 않은 각이 주어졌을 때에는 반드시 삼각형이 하나로 결정되지 않는다는 잘못된 확신을 주게 된다.

다음은 ASs를 취급하면서 AsS에 대한 여지를 보이고 있는 3개의 교과서(이영하 외, 2011; 김부윤 외, 2011; 신항균, 2011)를 살펴본다.


잠깐 Q&A

두 변과 끼인각이 아닌 다른 각이 주어졌을 때 삼각형이 하나로 결정될 때는 언제인지 말하여라.

■ 의사소통 + 추론

오른쪽 그림과 같이 선분 b, c를 두 변으로 하고, $\angle A$를 끼인각이 아닌 다른 각으로 하는 삼각형 ABC를 작도하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 삼각형이 하나로 결정되는가? 결정되지 않는다면, 그 이유를 친구에게 설명하여라.

2. 이 때, 삼각형이 하나로 결정되기 위한 조건은 무엇일까?

|토|론|하|기|

두 변 AC, BC의 길이가 주어지고, 그 끼인 각이 아닌 $\angle B$의 크기가 주어지면 삼각형 ABC는 한 가지로 작도될 수 있는지 토론하여 보아라.

이 세 교과서는 두 선분과 끼인각 외에 끼이지 않는 각에 대해서 언급하고 있다. 끼인각이 아닌 경우에도 한 가지로 결정 될 수도 있다는 여지를 보여주고 있다. 하지만 이것으로 충분하다고 볼 수는 없다. 이들은 공통적으로 본문이 아닌 잠깐 Q&A, ■ 의사소통 + 추론, |토|론|하|기| 등의 코너를 이용하여 언급하고 있음을 볼 수 있다. 구체적인 설명도 없을뿐더러 잠시 생각해 보는 정도로 다루고 있을 뿐이다.

ASS 조건을 다루는 교과서에 대한 이상의 분류를 간단히 표로 정리하면 다음과 같다.

다루지 않음 (9개 교과서)	
ASs언급, AsS언급 없음 (13개 교과서)	•구체적인 예를 들어(그림 제공) 문제제기
	•구체적인 예를 들어(그림 제공 안함) 문제제기
	•구체적인 예를 들어 그림을 그려 설명(단정)함
ASs언급, AsS의 여지 (3개 교과서)	잠깐 Q&A, ■ 의사소통 + 추론, |토|론|하|기|

다음은 본 단원을 전개 하는데 있어서 컴퍼스와 자, 각도기 외에 사용하는 교구에 대해 조사해 보자. 4개의 교과서에서 컴퓨터 프로그램을 사용하는 장면이 등장한다. 그 중 두 개의 교과서는 GSP[9]를 소개하고 있으며, 두 개는 인터넷에서 프로그램을 검색해 볼 것을 권유하고 있다.

V. 논 의

연구 대상이 된 교사와 교육대학생들의 90% 이상이 삼각형의 합동 조건에 대하여 제대로 이해하지 못하고 있었다. 이들은 SSS, SAS, ASA의 세 가지 조건만이 삼각형의 합동 조건으로 알고 있었다. 두 변과 끼이지 않은 각이 주어졌을 때에는 반드시 삼각형이 하나로 결정되지 않는다는 잘못된 확신을 갖고 있었다. 뿐만 아니라

9) The Geometer’s SketchPad

EBS의 동영상 강의에서도 두 변과 끼이지 않은 각이 주어졌을 때는 ‘끼인각이 아니므로’ 합동인 삼각형을 작도할 수 없다고 설명하고 있다. 이는 삼각형의 합동조건에 대해서 전반적으로 잘못된 지식으로 무장된 교사들이 교육현장을 점령하고 있다고 해도 과언이 아닐 것이다. 두 변과 (끼이지 않는) 긴 변의 대각이 주어질 때에도 유일한 삼각형이 작도 될 수 있으며, 역시 대응하는 두 변과 대응하는 (끼이지 않는) 긴 변의 대각이 각각 같으면 두 삼각형이 합동이라는 사실을 깨닫게 되는 순간에는 충격이라고 할 만큼 놀랍다는 반응을 보였다. 수업을 통해서 제대로 이해를 하게 된 교사들은 스스로의 그릇된 지식의 원인을 주로 ‘공식을 그대로 받아들였기 때문’ ‘단순히 암기했기 때문’ ‘기계적으로 받아들였기 때문’ ‘결과만 외웠기 때문’ 등으로 해석하고 있었다.

교육과정과 교과서를 분석한 결과 이러한 현상의 원인은 일차적으로 교과서에 있다는 사실을 지적하지 않을 수 없다. 삼각형의 합동조건은 현행 교육과정에서 초등학교 5학년과 중학교 1학년에서 다루고 있는데, 앞 절의 분석 결과에서 보듯이 조사 대상이 된 중1수학 교과서의 36%는 세 가지 조건(SSS, SAS, ASA)만을 다룬 후 이 세 가지가 삼각형의 결정조건이라는 결론을 내린다. 52%의 교과서는 두 개의 삼각형이 작도되는 ASs인 경우의 예를 보이면서도 유일한 삼각형이 작도되는 AsS의 경우는 취급하지 않는다. 12%의 교과서만이 코너를 이용하여 AsS의 경우에 대하여 여지를 남기는 정도이다. 그러나 모든 교과서는 세 가지 조건을 삼각형의 합동조건으로 결론 내리고 있다. 모든 교과서는 왜 세 가지 조건만이 합동조건에 해당되는지에 대해서 학생들이 의문을 갖거나 생각해보도록 하는 동기 부여나 발문은 없다. 학생들이 사고할 기회도 탐구할 기회도 주어지지 않았다. 교과서란 도구적 지식에 해당하는 수학적 사실이나 결과를 간결하고 명쾌하게 제시하는 자료가 아니다. 수학적 결과에 이르기까지의 과정이나 절차에 대한 설명 등으로 관계적 이해를 도모하도록 해야 할 것이다. 교과서는 학습자의 적절한 판단이나 이해가 촉구될 수 있는 논의거리를 풍부히 제공해야하며, 이는 개념 도입 단계는 물론이고 적용단계 문제 해결 단계로 이어져야 한다. 교과서 분석 결과, 교사들의 삼각형 합동조건에 대한 그릇된 이해는 당연한 결과라고 판단되었다. 교과서들은 탐구과정 없이 세 가지의 경우만을 작도하게 한 후 삼각형의 결정조건을 세 가지로 결론짓고 있다. 일부 교과서는 ‘두 변과 끼이지 않는 각이 주어진 경우는 두 개의 삼각형이 결정된다’고 틀린 설명을 서슴지 않고 있다. 이들이야말로 학습자들이 두 변과 끼이지 않은 각이 주어졌을 때에는 반드시 삼각형이 하나로 결정되지 않는다는 잘못된 확신을 갖게 하는데 기여하고 있다. 두 변과 끼이지 않는 각이 주어진 경우에도 유일한 삼각형이 결정되는 경우가 있다는 사실에 대해 여지를 보이고 있는 교과서에서도 코너를 이용하여 문제 제기를 하는 정도에 그치고 있으며, 지면 할애나 설명에 있어서 충분하지 않음으로써 학생들이 이를 제대로 이해할 기회가 주어졌다고 보기 어렵다. 이러한 상황이 계속된다면 지금까지와 마찬가지로 앞으로도 계속하여 잘못된 지식이 그대로 전수되는 악순환이 이어질 수밖에 없을 것이다. 교육과정과 교과서에서 ‘삼각형의 결정조건과 합동조건’은 도입과 전개에 있어서 전체적으로 대수술이 절실히 필요하다. 수정 보완 방안을 다음과 같이 제안한다.

첫째, 우선 초등학교 교과서에서 합동인 삼각형을 작도하기에는 사전에 작도에 대한 학습이 충분하지 않다. 학습 위계에서 상위학습은 바로 그 아래의 학습을 선행조건으로 한다. 중학교 교과서에서는 합동인 삼각형을 작도하기 전에 수직이등분선의 작도, 주어진 각의 작도 등의 선행

조건을 학습한다. 충분한 탐구나 이해 없이 교과서가 내린 결론을 공식으로 받아들이는 결과는 (잘못된) 고정관념이나 선입견으로 굳어져서 차후의 사고활동에 지장을 줄 수 있는데 초등학교에서 배우는 삼각형의 합동조건이 이와 같은 경우에 해당된다고 본다. 예를 들면 초등학교에서 처음으로 원을 정의를 할 때에는 둥근기둥 모양의 캔의 바닥을 본떠서 지도를 하기 때문에 학생들은 원반과 원을 구별하지 않는다. 원의 내부도 원에 포함되는 것으로 생각하기 쉽다. 그러나 중학교에서 '한 점에서 같은 거리에 있는 점들의 모임'이라는 엄격한 원의 정의를 배우게 되면 자연스럽게 확실한 구별을 하게 되어 원의 내부가 원의 일부가 아님을 알게 된다. 한편으로 교육과정에서 삼각형의 엄격한 정의를 다루지 않기 때문에 삼각형의 내부가 삼각형의 일부인지 아닌지 명확하게 알 기회는 없다. 개정된 교육과정에서는 지금까지의 교육과정과 달리 초등학교에서 합동인 삼각형을 그리는 내용을 삭제하였음을 볼 수 있었다. 따라서 새로 지필 하여 출간되는 초등학교 교과서에서는 합동인 삼각형의 작도는 취급하지 않을 것으로 기대된다. 이와 같은 변화는 매우 바람직한 것으로 생각된다. 초등학교에서는 합동인 도형의 정의와 성질, 즉 대응에 대한 부분까지만 취급하여 작도 이전의 단계까지 다루는 것이 바람직하다고 생각한다.

둘째, 중학교 교과서들은 삼각형의 합동조건의 도입과 전개 방식을 수정해야 한다. 현재의 교과서들은 세 가지 조건만을 제시하여 작도하는 경험을 하게한 후 결론을 내림으로써, 학습자가 그 외의 조건에서는 불가능한 것으로 받아들이게 하고 있다. 뿐만 아니라 앞에서 지적한 바와 같이 두 변과 끼이지 않은 각의 경우는 모두 두 개의 삼각형이 결정된다고 틀린 사실을 기술하고 있는 교과서도 있다. 틀린 표현을 하고 있는 내용은 말할 것도 없거니와, 그렇지 않다하더라도 그릇된 이해로 안내하고 있다면 수정이 필요할 것이다.

셋째, 우리나라의 모든 교과서에서 삼각형의 합동조건은 결정조건에 의하여 정당화하고 결정조건은 작도로써 정당화하고 있는데 결정조건의 도입 단계에서 삼각형의 성립조건으로 치우치는 경향이 있다. 예컨대 '세 변의 길이가 주어진 삼각형의 작도에서 두변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 커야한다' '한 변과 양 끝 각이 주어진 경우는 두 각의 합이 180도 보다 작아야 한다'는 등과 같은 성립 조건을 강조한 나머지 학생들의 사고가 결정조건이 아닌 성립 여부에 관심과 집중을 하게 되는 문제점이 있다. 그 결과 정작 중요한 유일한 삼각형의 결정 여부에 초점을 두지 못하게 된다.

넷째, 삼각형의 합동조건이 왜 세 가지만으로 결론이 내려지는지 그 이유에 대하여 충분한 탐구가 필요하다. 탐구과정을 거치게 되면 자연스럽게 AsS와 ASs의 구분도 가능하게 될 것이다.

다섯째, 탐구과정에 있어서 컴퓨터 프로그램을 적극적으로 활용해야한다. 우리나라에서 수학교육에 컴퓨터의 활용은 제6차 교육과정 (1992~1997)에서부터 권장하고 강조하고 있으며, 현행 수학과 교육과정의 [중학교 1~3학년군]의 기하영역에서는 다음과 같이 언급하고 있다.

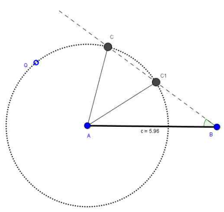
⑪ 공학적 도구나 다양한 교구를 활용하여 도형의 성질을 추론할 수 있게 한다.

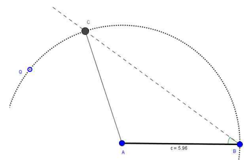
사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

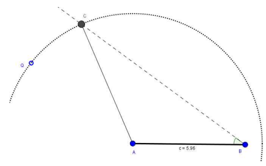
그러나 교육현장에서는 제대로 활용되지 못하고 있는 실정이다. 삼각형의 결정 조건의 탐구는 (컴퍼스, 각도기, 자를 가지고 지필 환경에서의 활동과 더불어) 탐구형 기하 소프트웨어를 잘 사용한다면 매우 효과적이다. 교사들은 탐구형 기하 소프트웨어를 활용하기 어려운 이유로써

컴퓨터실 활용의 어려움과 프로그램 구입비 등을 들고 있다. 하지만 학생 1인 1pc의 환경이 아니더라도 교사 제시형 만으로도 교사가 역량을 갖추고 열정이 있다면 얼마든지 학생들의 사고실험을 유도할 수 있다. 탐구형 기하 소프트웨어인 GSP나 Geogebra[10]를 활용한다면 충분한 탐구과정을 거칠 수 있다. Geogebra는 무료라는 점, 도구상자 위에 커서를 놓으면 작도 방법을 알려주어 사용 방법이 수월하다는 점, 원하는 길이의 반지름을 가진 원을 바로 작도할 수 있다는 점 등의 장점을 가진 소프트웨어로서 교실에서 활용하기에 더욱 유용하다고 생각된다. 교과서에서 도입하지 않으면서 교사들이 활용하기를 기대하는 것은 무리한 희망사항일 것이다. 교과서가 적극적으로 프로그램을 소개하고 구체적으로 활용하는 방법과 탐구과정을 도입함으로써 교육현장의 변화를 주도해야 할 것이다.

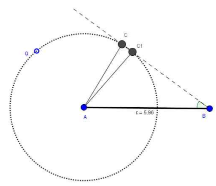
아래 그림은 두 변과 끼이지 않은 각이 주어진 경우에 삼각형이 한 개 또는 두 개가 결정되는 조건을 탐구할 수 있는 Geogebra 자료이다. 짧은 시간에 손쉽게 작도하여 제작할 수 있다. 이 자료는 학생들이 개인적으로 탐구할 수도 있지만, 교사가 전체 학생을 대상으로 적절한 발문을 통하여 사고와 탐구를 유도할 수 있는 것이다. AB의 길이와 각B를 고정시켜놓고 AC의 길이를 변화(A를 중심으로하고 AQ의 길이를 반지름으로 하는 원에서 Q를 움직임으로써)시키거나, AC의 길이와 각B를 고정시켜놓고 AB의 길이를 변화시키면서 탐구할 수 있다.

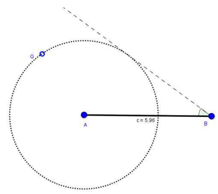


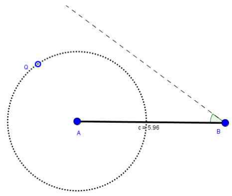




교사는 이러한 자료를 가지고 학생들의 사고실험을 유도하여 학생들이 스스로 결과를 찾도록 할 수 있을 것이다. 이 자료에서 Q점(AC의 길이를 조절하는)을 움직여 AC의 길이를 줄이다 보면 이래 그림에서 보는 바와 같이 한 점에서 만나는 경우가 또 있을 것이라는 것을 추측하게 된다.



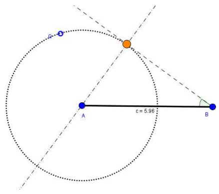


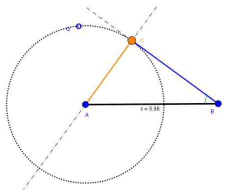


이 경우는 아래 그림에서 볼 수 있듯이 AQ의 길이를 반지름으로 하는 원이 반직선에 접하는 경우이다. '두 변과 짧은 변의 대각이 주어졌을 때' 에도 유일한 삼각형이 결정되는 경우가 있

10) http://www.geogebra.org/

음을 탐구의 결과로 얻을 수 있는 것이다.





이것은 AC의 길이=AB의 길이×sin(각B)인 경우로 삼각비를 배우게 되면 이해할 수 있는 내용이다.

따라서 여섯째, 교육과정은 삼각형의 합동조건에 대하여 연관성과 종적 일관성을 제공하여야 한다. 현재의 교육과정에서는 사전 준비가 안 된 초등학교 5학년에서 작도 순서만 주입하는 결과와 중학교 1학년에서 미완성된 상태로 다루고 말기 때문에 모든 교육과정을 마치고 우수한 인력으로서 교단에 선 교사들마저 그릇된 이해를 한 상태로 머무는 것이다. 중학교 3학년의 삼각비 단원 또는 고등학교의 삼각형의 6요소 단원에서 삼각형의 합동조건과 연관지어 다루어 주어야 한다. 삼각형의 합동조건에 대하여 재음미할 기회를 제공할 뿐만 아니라 적절한 반복과 통합, 심화, 발전의 체계로써 비로소 삼각형의 합동조건에 대한 제대로 된 이해가 완성되도록 해야 할 것이다. Tyler(1969)는 효과적인 학습 조직의 원리로 계속성, 계열성, 통합성의 3요소를 제시하였다. 잘 짜인 교육과정은 적절한 반복, 발전, 심화, 통합으로써 학생의 수준에 맞도록 효과적인 학습을 조직할 것이다. 모르는 것과 잘못 알고 있는 것은 큰 차이가 있다. 교사들의 그릇된 이해는 학생들에게 그대로 전달되기 때문에 매우 위험한 일이다. 리핑 마(Ma, 2002)는 학교 수학을 깊이 이해하고 있는 교사의 수업에서는 연관성, 다양한 접근, 기본적인 아이디어, 종적 일관성의 특성이 발견된다고 한다. 그는 학교 수학의 종적 일관성을 깊이 이해한 교사들은 특정 학년이 배워야 할 지식만 지닌 것이 아니라 교육과정 전체를 이해하고 있다고 한다 (PP.234-235). 교육과정은 교사들이 삼각형의 합동조건에 대한 연관성, 종적일관성을 갖추도록 완성된 지식 체계를 제공하여야 한다.

일곱째, 교사들의 불충분한 지식에 대한 책임을 교육과정과 교과서만의 책임으로 돌릴 수는 없을 것이다. 리핑 마(Ma, 2002)는 미국 교사들이 중국교사와 비교하여 낮은 수학 지식을 보유한 원인으로 교사양성 교육이 수학 자체보다는 수학을 가르치는 방법에 초점을 맞추고 있다고 지적하였다(p.271). 우리나라에서도 이러한 점에 대하여 돌아볼 필요가 있다. 교사 양성 교육에 있어서 지나치게 교수•학습 방법에 치우치고 있는 것은 아닌지 반성해 보아야한다. 학생들이 수학적으로 사고하게 하려면, 교사들이 먼저 수학적으로 사고해야 한다(Ma, 2002, p. 207). 교사 양성 교육에 있어서 교사들이 수학 지식의 고등 분야와 기초 수학 간의 관계를 포괄적으로 이해하여 완성된 지식을 구축할 수 있도록 수학 자체에 관심을 기울여야한다.

VI. 결 론

본 연구는 교사들이 삼각형의 합동조건에 대하여 불충분하거나 그릇된 이해를 하고 있다는 사실을 감지하고 그 실태를 조사, 분석하였다. 그리고 교사들의 그릇된 이해의 원인을 찾기 위하여 수학과 교육과정과 교과서를 비판적으로 분석하였고, 그 분석을 토대로 하여 대책 방안을 제시하였다. 연구 결과 대다수의 교사들은 삼각

형의 합동조건은 세 가지(SSS, SAS, ASA) 뿐인 것으로 잘 못 알고 있으며, 그 원인은 교과서가 제공하고 있었다. 그릇된 이해로 무장된 교사들이 현재의 교과서로 계속하여 학생들을 지도한다면 이러한 상황은 계속하여 악순환으로 이어질 것이다. 연구의 결과로서 교육과정의 기획과 교과서의 지필, 교사양성에 있어서 수정 보완 방안을 제시하였다. 요약하면 다음과 같다. 첫째, 초등학교에서 합동인 삼각형의 작도를 다루는 내용은 삭제하는 것이 바람직하다. 둘째, 중학교 교과서에서 삼각형의 합동조건이 세 가지(SSS, SAS, ASA)뿐인 것으로 전개하고 있는 문제점을 개선하고, 잘못된 설명이나 기술 내용은 수정해야 한다. 셋째, 중학교 교과서에서 삼각형의 결정조건을 도입할 때 삼각형의 성립조건을 강조한 나머지 학생들의 사고가 결정조건이 아닌 성립 여부에 집중하게 되는 문제점을 수정 보완하여야 한다. 넷째, 삼각형의 합동조건을 결정하기까지 충분한 탐구가 필요하다. 다섯째, 탐구과정에 있어서 교과서는 적극적으로 수학교육용 탐구형 소프트웨어를 활용하여 현장의 변화를 주도하여야 한다. 여섯째, 교육과정은 삼각형의 합동조건에 대하여 종적 일관성을 제공하여야 한다. 일곱째, 교사 양성 교육에 있어서 교수학습 방법에만 치우치지 말고 수학 자체에 관심을 기울여야한다.

참고문헌

강신덕 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 교학사.

강정미(2005). **삼각형의 결정조건 지도에 관한 연구**. 서울시립대 교육대학원 석사논문.

고상숙, 정승진(2001). 그래핑 계산기를 이용한 삼각형의 합동조건 탐구. **대한수학회 춘계 수학교육학 연구발표대회 논문집**. 407-422.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 고시 제 2011-361호 [별책 8].

김구슬(2005). **유클리드<원론>에 기초한 <7-나 작도> 내용 분석 및 개선에 관한 연구**. 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

김부윤 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 교과서다음.

김수현, 최윤상(2007). 삼각형의 결정과 합동의 분석. **한국학교수학회논문집, 10**(3). 341-351.

김원경 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 비유와상징.

김종해 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 에듀왕.

김홍종 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 성지출판.

류희찬 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 대한교과서.

박규홍 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 동화사.

박선용, 권석일(2004). '삼각형의 결정조건'에 대한 논의의 분석. **수학교육학연구, 14**(4), 435-446. 대한수학교육학회.

박영훈 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 천재문화.

박윤범 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 웅진씽크빅.

박종률 외(2011a). **중학교 수학1**. 서울: 디딤돌.

박종률 외(2011b). **중학교 수학1**. 교사용 지도서. 디딤돌.

손소현, 임재훈(2009). 초등학교 아동들의 삼각형의 합동조건 구성 과정 분석. **<수학교육> 48**(3), 287-302. 한국수학교육학회.

손소현(2009). **삼각형의 합동조건에 관한 초등학생 지식과정 분석**. 경인교육대학교 교육대학원 석사논문.

송근화 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 새롬교육.

신항균 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 지학사.

우정호, 권석일(2006). 중학교 가하교재의 '원론' 교육적 교찰. **수학교육학연구, 16**(1), 1-23. 대한수학교육학회.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대출판부.

우정호 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 두산동아.

윤성식 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 더텍스트.

윤재한 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 더텍스트.

이강섭 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 지학사.

이대현 외(2011) **중학교 수학1**. 서울: 두레교육.

이선희(2012). **삼각형의 합동조건 도입과정에 대한 교수학적 분석**. 경성대학교 교육대학원 석사논문.

이영하 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 교문사.

임재훈(2005). 삼각형의 결정조건과 합동조건에 대한 교수학적 분석. **수학교육학연구, 15**(2), 131-145. 대한수학교육학회.

장건수 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 지구문화사.

정광식 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 대교.

정상권 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 금성출판사.

정상권 외(2011b). **중학교 수학1**. 교사용 지도서. 서울: 금성출판사.

정순영 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 두산.

정창현 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 대교.

황선욱 외(2011). **중학교 수학1**. 서울: 좋은책신사고.

최지현(2009). **삼각형의 합동조건을 이용한 작도 지도과정에 관한 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사논문.

최노성(2002). 삼각형의 결정조건. **수학사랑 36**, 142-143.

한인기(2005). 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습 내용의 비교 연구. **한국학교수학회논문집 8**(2). 89-100.

Cajori, F. (1924). *A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching.* London: Macmillan.

Clairaut, A. C. (2005). 기하학 원론.(장혜원 역). 서울: 경문사.(불어 원작은 1761년 출판)

Eggleton, P. J. (2001). Triangles à la Fettccine; A hands-on approach to triangle-congruence theorems. Mathematics Teacher 94(7), 534-537. NCTM.

Greenberg, M. J. (1990). Euclid 기하학과 비Euclid 기하학.(이우영 역). 서울: 경문사.(영어 원작은 1974년 출판)

Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint.* Dover Publications.

Ma. L. (2002). **초등학교 수학 이렇게 가르쳐라**. (신현용, 승영조 역), 서울: 승산. (영어 원작은 1999년 출판).

Tyler, Ralph W.(1969). *Basic principles of curriculum and instruction.* University of Chicago Press.

Shibli, J. (1932) *Recent development in the teaching of geometry.* The Maple Press Company.

Smith, D. E.(1923). *Essintials of plane geomery.* Ginn and Company.

Teachers' Understanding about Triangle Congruence Conditions

Rim, Haekyung (Gwangju National University of Education)

We recognized that most teachers are having insufficient understanding or misunderstanding about congruent conditions of triangles. So the purpose of this study was to analyze teachers's understanding about congruent conditions of triangles and to find the causes of teachers's misunderstanding. Most teachers have been misunderstanding that triangle determining- conditions are only 3 ways(SSS, SAS, ASA). And they have wrong confidence that 2 sides and a non included angle(ASS) is not always able to make one triangle. This study found that these teachers's misconception was from the textbook using now. As the result of this study, we suggested 7 improvement ways about planning of curriculum, writing of textbook and teacher training course.

* Key Words : triangle(삼각형), triangle congruence conditions(삼각형 합동조건), triangle determining conditions(삼각형 결정조건), teachers' understanding(교사들의 이해)

논문접수 : 2014. 4. 13
논문수정 : 2014. 4. 30
심사완료 : 2014. 4. 30