대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 2, 317 ~ 334. Jun 2014

테일러급수 수렴에 대한 예비중등교사의 이해실태와 GeoGebra를 활용한 교수방안 탐색[1)]

김 진 환*

이 연구는 예비교사들을 대상으로 테일러급수와 그 수렴에 대한 이해 실태를 살펴보았고 그 결과로 얻어진 취약점을 보완하고자 GeoGebra를 이용하여 실험적 맥락에서 테일러급수의 수렴 개념에 대한 교수 방안을 모색하였다. 예비교사들은 형식적 측면에서 테일러급수를 구하고 수렴 반경을 계산하는 것에는 익숙했지만 개념적이고 과정적 요소엔 취약하였으며 테일러급수를 다루는 시각적이고 역동적 경험을 갖고 있지 못했다. 특히 부분합의 개념으로 테일러다항식들의 수렴과 원함수간의 관계가 잘 정립되어 있지 않았다. 이에 GeoGebra를 도구로 활용하여 시각적이고 직관적 측면에서 테일러다항식의 차수와 중심이 테일러급수의 수렴에 미치는 영향을 중심으로 교수실험을 하였다. 이 연구의 결과는 예비중등 수학교사들이 무한급수와 테일러급수에 대한 교수 내용적 지식을 높이고 유연한 지식을 가지는 데 공학을 활용한 교수법이 도움이 될 수 있음을 보여주었다.

I. 서 론

테일러급수는 수치적으로 다루기 복잡한 함수에 다항식으로 주어지는 다항함수를 근접시켜주는 근사 이론의 초석이 되는 도구로 물리나 공학에서 매우 유용하게 사용되고 있다. 더욱이 다항함수는 적분하기와 미분하기가 쉽기 때문에 다루기 복잡하고 어려운 함수를 다루기 쉬운 다항식의 함수로 변환하는 활동은 매우 유용하다. 테일러급수는 수학1에서 도입되는 무한급수를 기반으로 멱급수와 더불어 다루어지는 것으로 예비교사가 갖추어야 할 수학적 소양 중 하나이다. 이러한 이유로 대학 미적분에서 멱급수와 테일러급수는 핵심내용으로 다루어진다. 대학에서 미적분학을 공부한 대다수 예비교사들은 주어진 함수를 테일러급수로 나타내는 방법을 학습하였고, 지수함수 e^x나 여러 삼각함수에 대해 급수로 표현하는 문제를 해결한 바 있다. 그러나 많은 학생들은 테일러급수에 대해 개념적으로 완전하지 못하며 이해하는데 어려움을 겪고 있다 (Alock & Simpson, 2004; Kung & Speer, 2010; Martin, 2013). 테일러급수와 그 수렴반경을 구하는 문제를 해결하는 동안 시각적 표상이 큰 영향력을 미치지 않을 수 있으나 시각적 이미지와 다양한 표상을 활용하는 것은 개념 발달을 이해하고 관계를 파악하는 수학적 활동 과정의 중요한 요소가 될 수 있다(Presmeg, 1986).

시각적 표상을 제공하는 유용한 도구는 디지털 공학으로 과학적 계산기로부터 소프트웨어

---

* 영남대학교, kimjh@ynu.ac.kr
1) 이 연구는 2012학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

프로그램, CAS기능을 갖춘 계산기, 그래픽 환경, 자료 편집, 스프레드시트, 역동적 기하를 구현하는 여러 소프트웨어들이 개발되어 왔다. 특히 디지털 공학은 우리의 일상생활까지 스며들어 있고 미래 사회를 준비하는 수학 교육도 이를 피할 수 없다. 공학은 시각화와 표상 활동에 대한 새로운 기회와 방법을 열어 준다(Weigand, 2013). 기하학뿐만 아니라 미적분이나 해석학에서도 공학 사용이 강조되고 있으며 그 중심에는 역동적 기하 소프트웨어인 DGS와 대수적 기능을 수행하는 CAS 계산기가 있다.

계산을 원활하게 하기 위하여, 특별한 수들과 수열을 파악하기 위하여, 시행착오뿐 아니라 패턴을 찾기 위하여, 특수한 수학적 주장을 뒷받침하는 증거를 모으기 위하여, 탐구 활동을 조장하고 공학을 사용한 실험수학에 대한 관심이 커지고 있다.

우리나라의 2009개정 교육과정에서는 계산 능력과 무관한 복잡한 계산의 수행, 수학적 개념과 원리의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 수학용 소프트웨어 등의 공학 도구 및 다양한 교구의 활용을 권장하고 있다(교육과학기술부, 2011). NCTM(1989)은 공학을 활용한 수업에서 실현해야 할 목표들을 설정하였으며 NCTM(2000)에서 “Technology Principle in the new Principles and Standards for School Mathematics”로 재편하여 공학에 대한 보편적 접근과 사용을 거듭 권고해 왔다. 하지만 학교에서 공학의 사용은 높은 비용과 제한된 수용성으로 인해 넓게 활용되지 못하는 실정이다. 그러나 다른 소프트웨어와는 달리 GeoGebra는 이러한 제약점에서 자유로운 도구로 학교현장에서 많은 관심을 일으키고 있으며 그 활용도가 점차 높아지고 있다. 더욱이 GeoGebra에는 CAS 기능이 추가되어 미적분을 다루는 다양한 기능이 있어 미적분에서 시각적 이미지와 다양한 표상을 나타냄으로써 내적 표상을 강화시킬 수 있다 (Hohenwarter et al., 2008). 고등학교와 대학교 수준의 미적분학 교육에서 공학 도구의 활용에 대한 사례연구와 수열이나 함수의 극한 및 급수에 대한 교수학습에서 공학도구의 활용에 대한 연구가 점차 이루어지고 있다.

Stick(1999)은 CAS 그래픽 계산기를 이용하여 테일러급수에 대한 수렴반경을 수치적으로 접근시키는 연구를 수행하였다. Kidron(2004)은 수학 개념의 시각적 해석에서 형식적 추론이 되도록 CAS를 사용하여 상징적 계산을 조작하고 그래픽을 만들었으며 역사적 관점에서 테일러급수의 나머지를 다루었다. Hohenwarter et al.(2008)은 GeoGebra를 활용하는 미적분의 다양한 사례를 제시하였다. 최근에 Martin(2013)은 테일러급수의 수렴에 대한 수학적 구조에 익숙한 숙련자와 처음 배운 학생들과의 차이점에 대해 탐구하였다. 그러나 우리나라의 경우 공학을 활용한 테일러급수에 대한 연구는 거의 이루어지지 않았고 우리나라의 미적분학의 교재에서 시각적 측면에서 테일러급수에 대한 의미를 보여주는 그래픽 표상이 취약한 편이다.

이 연구에서는 예비교사들이 가지는 테일러급수에 대한 개념 이미지와 정의 및 수렴에 대한 이해 실태를 구조화된 질문을 통해 분석해 보고, 그 취약점을 찾으며 이에 대한 해결방안으로 예비교사들과의 질의응답에 입각한 GeoGegra를 활용한 교수 방안을 모색하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 시각화

수학은 자연과학과 밀접한 관계가 있으며, 관찰과 유추가 발견을 이끌어낼 수 있다는 점에서

수학적 발견, 과학적 방법, 귀납적 측면은 학교 수학에서 중요시되어 왔으며 실험, 발견술 및 직관이 수학교육에서 지속적으로 강조되고 있다(Borwein, 2005; Mader, 2011; Polya, 1965). 수학적 증명만이 수학적 사고에서 정당한 역할을 하는 것은 아니며 컴퓨터 등의 공학의 도움으로 수학을 관찰하고 발견을 촉진시킬 수 있다(Mader, 2011).

공학 도구는 가상의 모든 실험을 하도록 하면서 시각적 이미지를 만들어 수학적 사고를 넓혀준다. 시각적 이미지와 시각적 추론의 형성은 문제를 풀면서 도입되는 경향이 있으며 시각화는 고등수학에서 등한시되고 있으나, 시각적 이미지의 생생함과 특성은 학생들이 수학적으로 일반화할 수 있는 능력에 영향을 미친다(Presmeg, 1986).

디지털 공학은 컴퓨터의 스크린이나 계산기 화면상에 수학적 표상의 생성을 단순화할 뿐 아니라 매개변수를 쉽게 바꾸어 주며 실험 활동을 조장할 수 있게 한다(Weigand, 2013). 이러한 실험적 탐구 활동의 주요 목적은 시각적 실험을 통해 수학적 개념을 발달시키는 것이다. 많은 학생들이 교과서에 주어진 개념의 발달을 충분히 지각하지 못하기 때문에, 이러한 실험을 통해 활동적 학습을 강화시킬 수 있다(Kowalczyk & Hausknecht, 1994).

시각화는 기하학에 많은 기여를 하고 있으며 시각화가 수학교육연구의 주요 주제가 되면서 많은 이론적 관점과 실전적 자료들이 개발되었다(Peters, 1992; Zimmermann & Cunningham, 1991). 특히 수학적 지식에 대한 기호적 표상과 시각적 표상들 간의 연결성이 강조되어 왔다(Arcavi, 2003; Kadunz & Strasser, 2001). 시각화는 다음의 특징이 있다. 먼저 영상적(iconic) 표상과 상징적 표상을 연결시켜주는 개념으로 표상들 간의 연속적 변화라 하겠다(Kadunz & Strasser, 2001). 학교 수학의 맥락에서 교사들은 영상적(iconic) 표상과 상징적 표상들 간의 외적 중개자로 활동하면서 이런 변화를 이끌기도 한다. 시각화에 의해 발효되는 기능들 가운데, 수학적 아이디어를 이끌어 주는 시각화의 힘에 관심을 가져야 하고 발견적 추론을 이끌도록 시각화를 활용하는 것에 주목해야 한다. 시각화를 심리적 과정으로만 생각하는 것은 적절하지 않으며 시각화는 중요한 맥락적 요소를 가지고 있으며 관찰은 특별한 맥락 내에서 일어난다. 그러므로 맥락에 따라 시각화의 응용이 변화될 수 있다(Cunningham, 1994).

시각적 이미지는 미적분의 교수 학습에서도 매우 중요하게 다루어지고 있다. 그 이유는 연속, 미분, 적분 등의 개념들은 원천적으로 그래프와 관련이 있기 때문이다. 19세기에 Cauchy나 Riemann, Weierstrass와 같은 수학자들은 이러한 개념들을 산술화하였지만 시각적 이미지는 여전히 수학 전문가나 학생들에게 중요한 것으로 여겨지고 있다(Alock & Simpson, 2004).

2. 개념이미지

Tall & Vinner(1981)는 형식적 개념정의와 이러한 개념에 관한 집적물을 각각 개념정의와 개념이미지라 하였다, 개념이미지는 개념과 연관된 전체적 인지구조로 기술될 수 있으며 시각적 표상, 경험 인상 등 모든 심상, 연계된 성질과 과정들을 포함한다. 개념정의는 개념을 구체화하기 위하여 언어의 형태를 취한다. 주어진 맥락에서 떠오르는 기억을 “떠오르는(evoked) 개념 이미지”라 하는데 어떤 개념 이름을 보거나 듣게 되면 그것에 관계된 어떠한 것이 마음속에 떠오르고 이것은 우리로 하여금 관계된 대상들을 상기시킨다(Vinner, 1991). 개념 이미지는 사람에 따라 다를 수도 있고, 상황에 따라 다를 수도 있

다. 개념정의가 개념이미지와 반드시 연결된다고 할 수는 없다. 개념들이 가지는 다양성과 형식을 인식하는 주체의 다양성으로 인해, 개인의 마음속에서 상반된 의견이 일어나게 되어 잠재적 갈등이 개념이미지와 함께 일어 날 수 있다(Cornu, 1991).

3. 테일러급수와 무한합

멱급수의 특별한 경우인 테일러급수는 함수, 수열, 극한, 도함수, 급수의 개념들을 함께 가지고 있다. 특히 무한합을 구하는 수렴문제는 이러한 다양한 개념들이 작용하는 복잡한 수학적 구조로 고등수학에 초보자격인 학생들이 이해하기에는 어려움이 있다(Martin, 2013). 테일러급수의 수렴 개념이 형성되기 위해선 테일러다항함수에 의한 함수근사, 테일러 정리, 나머지의 개념들에 대한 이해도 있어야 한다. 테일러급수 수렴에 대한 이해의 어려움은 수렴의 근간이 되는 무한의 개념과 무한합이 함의하고 있는 극한 개념의 교수-학습에서 찾을 수 있다(Cornu, 1991). 극한의 개념은 '어떤 값에 점점 더 가까이 간다.' 또는 '어떤 극한에 결코 도달할 수 없다.'를 암시하는 역동적 과정과 극한 그 자체의 값을 나타내며 극한의 기호(symbol)은 이러한 과정과 개념을 내포한다. Gray & Tall (1994)은 극한처럼 기호(symbol)가 개념과 과정을 통합하고 있는 것을 과정－개념(procept)이라고 하였다. 무한급수에 대한 무한합도 부분합에 의한 수열의 극한으로 과정과 대상으로써의 개념을 동시에 가지는 과정－개념이다. 이 과정과 개념은 Sfard(1992)가 제시한 구조적 개념과 조작적 개념에 대조시키고 있다. 구조적 개념은 대상적 실체인 것처럼 지각되는 것이고, 조작적 개념은 이미 설정된 대상에서 작용하는 계산적 과정으로 지각되는 것이다. 조작적 개념에서 구조적 개념으로의 전이는 과정이 하나의 대상이 되어 과정이 새로이 구조화된 대상위에서 실행될 수 있어 그것을 생성하였던 그 과정에서 분리될 수 있을 때 구상화(reification)을 통하여 일어날 수 있다. 가령, 극한은 역동적 언어로 구현되고 결코 도달할 수 없는 끝이 없는 과정으로 지각되지만 극한을 구하는 그 과정은 하나의 대상으로 구상화되어 수열의 극한이 얻어질 수 있다.

무한 개념에 대한 어려움은 우리의 지능적 인지 구조의 유한적 성격에서 야기될 수 있다. 무한에 대한 직관은 무한과 관련된 개념의 형식적 정의를 학습하는데 장애가 될 수 있다(Cornu, 1991). 무한에는 대립되는 두 가지 아이디어가 있는 데, 원하는 목적까지 도달할 수 있을 때까지 수행될 수 있는 잠재적 무한(potential infinity)과 한 번에 모든 자연수 전체를 한 번에 생각하는 것과 같은 실제적 무한(actual infinity)이 있다(Tirosh, 1991). Fischbein et al.(1979)는 잠재적 무한의 개념을 무한의 자연스러운 개념이라 하였다. 이것은 단순히 유한 과정이 끝없이 계속되고 있다는 것이고 멈추지 않고 세며 끝없이 세고 있다는 것이다.

Kidron(2002)는 근사이론에 기반을 둔 실험적 과정의 맥락에서 함수의 무한합에 대한 학생들의 지각을 분석하였다. 여기에는 두 가지의 접근 방법이 사용되었는데, 그것은 분석적인 방법과 대수적인 방법이다. 전자는 무한합을 잠재적 무한의 과정으로 주어진 함수에 여러 다항식들을 가지고 접근해 가는 과정이다. 후자는 대상으로써 실제적 무한합으로 무한개의 항을 가지는 여러 다항식들로 표상화하는 방법이다. Kidron(1984)은 무한합이 이론에서만 존재한다고 하였으며, Kidron & Vinner(1983)는 무한 소수를 이 소수에 근사하는 수들 중 하나로 지각되는 것이라 하고 무한소수는 산물(product)이 아니라 무한합의 무한과정이 녹여 있는 과정(process)으로 지각된다고 하

였다(Kidron, 2002 재인용).

또한 무한급수의 기호 표기는 무한급수에 대한 개념적 장애의 또 다른 근원이기도 하다. 기호 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$는 n가 무한대로 커져가는 과정과 극한(limit)인 무한합의 개념을 동시에 나타난다. 인지적 어려움의 또 다른 근원은 기호 표기 $S=a_0+a_1+a_2+\cdots$에서 "="에 있다. =이 무엇을 의미하는지에 대해 이해하기 위해선 연관되어 있는 수학적 아이디어에 대한 인지적 해석이 필요하다(Tall, 2000).

테일러급수는 변수를 포함하고 있고 변수에 어떤 값을 주느냐에 따라 무한급수가 달리 주어지므로 점별원리에 입각하여 수렴과 발산을 가려야 하는 어려움이 있을 거라 예측된다.

일반적으로, c의 근방에서 무한번 미분가능하고 연속인 $y=f(x)$에 대하여 $x=c$에서 (중심이 c인) f의 테일러급수는 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$로 주어지고, c에서(중심이 c인) f의 n차 테일러다항식

$$T_n(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{n}(c)}{n!}(x-c)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

에 의한 수열의 극한에 의해 테일러급수의 수렴이 결정된다. 특히 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$를 c에서 f의 n차 나머지(remainder)라 하고, 어떤 x에 대해 $R_n(x)$의 0으로의 수렴여부가 테일러급수가 $f(x)$로의 수렴과 수렴하게 되는 x의 범위에 대한 판단의 기준이 된다. $R_n(x)$에 대한 공식은 다음 두 가지 형식이 의미 있게 다루어져 왔다. b는 c와 x사이의 적당한 값이다.

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(b)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

중심이 c인 f의 테일러급수의 수렴영역은 실수전체집합이거나 한 점 $\{c\}$ 혹은 c를 중심으로 하는 네 구간 $(c-r,c+r)$, $[c-r,c+r)$, $(c-r,c+r]$ $[c-r,c+r]$중의 하나라고 알려져 있으며 이 경우 수렴반경을 r이라 한다(Stewart, 2008).

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

테일러급수에 대한 예비교사들의 이해 실태의 분석은 대학을 졸업한 중등교사를 목표로 교육대학원에 다니는 27명의 예비교사와 수학교육과 2학년(진급예정)의 예비교사 10명과 예비교사 4학년 15명을 대상으로 하였다. 특히 교육대학원생 27명은 모두 수학을 전공하였으며 출신 대학이 다양하다. 이들 예비교사 52명을 대상으로 테일러급수에 관련된 구조화된 검사 문항에 대한 답안지를 작성하게 하였고 이들이 제출한 답안지를 조사하고 분석하였다. 이들 예비교사가 가진 테일러급수 수렴 개념에 대한 취약점의 보완을 목적으로 하는 교수실험에서는 예비교사 4학년 15명을 대상으로 하였다. 이들은 여학생 9명과 복학한 남학생 6명으로 구성되어 있으며 이들 중 대다수가 스터디 그룹을 만들어 임용대비 정보를 공유하며 수학내용학 및 수학교육학을 함께 공부하고 있었다. 이들은 1학년의 미분적분학에서, 그리고 2학년의 해석학에서 멱급수와 테일러급수에 대해 학습한 바 있었다. 또한 3학년 여름 방학 때 3일 동안 3시간씩 총 9시간의 GeoGebra특강을 들었다.

2. 검사문항

이 연구에는 과제형 질문으로 8개의 문항을 선정하였다. 이들 문항 중 5개의 문항 (1-2, 1-3, 2-1, 2-2, 3-1)은 Martin(2013)에 제시된 문항의 일부로 구성되었고, 이 연구의 목적에 맞도록 나머지 3문항을 추가하였으며, 이들 8개의 문항들을 4개의 유형으로 분류하였다. 문항(0-1)은 테일러급수에 대한 학습경험과 공부했던 시기를 판단하기 위한 것이고 [유형1]의 문항(1-1, 2, 3)은 테일러급수에 대한 개념이미지, 개념 도입의 의미와 개념정의를 어떻게 알고 있는 지를 파악하기 위한 것이다. [유형2]의 문항(2-1, 2)은 "$=$"의 의미를 급수의 수렴 및 극한 개념과 어떻게 연계시키고 이해하는지, [유형3]의 문항(3-1, 2)은 무한 번 미분가능함을 암묵적으로 가정한 함수의 테일러급수에서 수렴반경의 의미와 중심에 따른 수렴 반경의 변화 상태를 어떻게 알고 있는지를 분석하기 위한 것이다. 구체적인 문항은 다음과 같다.

[유형0-1] 멱급수나 Taylor급수를 공부한 적이 있습니까? 미적분학에서 공학을 활용한 적이 있습니까? 공학 도구에 대해 배우거나 다룬 적이 있습니까?

[유형1-1] Taylor급수라 하면 무엇이 우선적으로 떠오르며, 연상되는 모든 것을 적어 보세요.

[유형1-2] Taylor 급수를 공부하는 이유는 무엇이라 생각합니까?

[유형1-3] Taylor급수는 무엇인지를 적어 보세요.

[유형2-1] "x가 어떠한 실수이건 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$이다"에서 "$=$"는 무엇을 의미합니까?

[유형2-2] "함수 $f(x)$와 이 함수의 어떤 테일러급수가 같음을 증명하라"면 여기서 증명하라는 무엇을 의미합니까?

[유형3-1] "$x \in (-1,1)$일 때 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$이다" 에서 구간 $(-1,1)$을 주는 이유는 무엇입니까?

[유형3-2] 함수 $f(x)$에 대한 테일러급수의 수렴반경은 무엇을 의미합니까? 테일러급수의 중심 c에 따라 Taylor 급수에 대한 수렴반경에 어떤 변화가 일어날까요?

3. 연구절차

테일러급수에 관련한 위의 검사문항에서 [유형0-1]중 공학에 대한 질문과 [유형2-2] 및 [유형3-2]의 문항이 빠진 질문지를 사용하여 교육대학원생 27명을 대상으로 2014년 1월 첫째 주에 첫 예비조사를 실시하였다. 이를 참고로 본 연구의 연구 방향을 설정하였다. 연구에 관련된 국내외 문헌을 조사 분석하였고 개념의 이해에 초점을 둔 검사문항을 최종적으로 설계하였다. 문항간의 의존성을 배제하기 위하여 4개의 유형을 세 단계(유형0과 1을 1단계로, 유형2를 2단계로, 유형3을 3단계로 함)로 나누어 문제지를 만들었다. 테일러급수 수렴에 대한 이해 실태를 보다 심층적으로 조사하기 위하여, 2월에는 2학년 진급예정인 예비교사 10명을 대상으로, 3월 첫째 주에 예비교사 4학년 15명을 대상으로 위 검사문항에 대한 3단계의 답안지를 순차적으로 받았다. 즉, 1단계 문제의 답안지를 제출하면 2단계의 문제를 주었고, 2단계를 마치면 3단계의 문제를 주며 답안지를 받았다. 이들 답안지 자료의 분석으로부터 예비교사들이 테일러급수의 수렴 개념에 대한 취약점을 가지고 있음을 알게 되었다. 이를 보완하기 위하여 3월 둘째 주 GeoGebra가 가진 역동성과 CAS의 기능을 활용한 테일러급수의

수렴에 대한 지도를 목적으로 교수 실험적 수업을 진행하였다. 이 수업은 n계도함수를 바탕으로 테일러다항식과 테일러급수 구하는 방법을 아는 것으로 전제하였고 2시간가량 진행되었으며 수업에 대한 예비교사들의 평가도 들었다. 수업에서는 GeoGebra를 활용해 테일러 다항함수의 그래프와 원함수의 그래프를 프로젝트의 스크린으로 보여 주며 근사와 수렴 문제를 다루었다. 테일러다항함수의 차수와 중심의 변화에 역점을 두어 그래프에서 나타나는 현상을 관찰하고 추측하였으며 질의 응답하였다. 이 때 질의응답은 GeoGebra를 활용한 테일러급수 수렴에 대한 시각적 이미지와 개념의 형성을 목적으로 Goldin (2000)이 제시한 구조화된 과제 기반형의 형태로 이루어졌다. 이 수업에서 일어난 질의응답은 녹음되었고, 녹취한 다음 분석에 활용하였다.

Ⅳ. 연구 결과

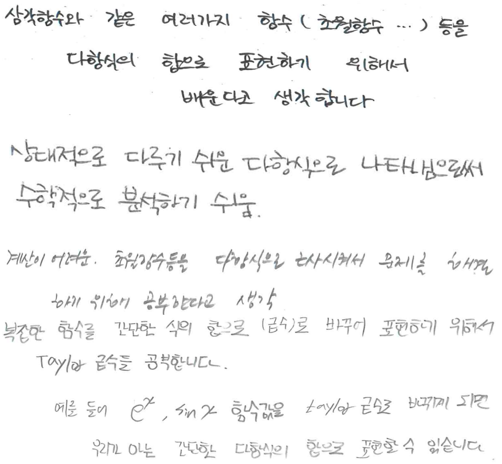
예비문항인 [유형0-1]을 분석한 결과 52명의 예비교사들은 미적분학이나 고등미적분학 또는 해석학을 수강하면서 테일러급수와 함께 매클로린급수를 다루었다고 응답하였다. 교육대학원의 예비교사들을 제외한 공학 활용에 대해 질문의 결과, 2학년 진급예정인 예비교사들은 공학 도구에 대한 경험이 전혀 없었고 주 연구 참여자인 예비교사 4학년생은 총 9시간의 GeoGebra 여름방학 특강을 들은 적이 있었고 공학에 대한 친근감은 있었지만 멱급수나 테일러급수와 연계된 공학적 경험은 없었다. 본 장에서는 유형별 검사문항에 대해 분석하고 이에 대한 보완으로 GeoGebra를 활용한 테일러급수의 수렴과 반경의 개념을 시각적이고 역동적으로 얻어가는 과정을 분석한다.

1. 검사문항에 대한 분석

가. 테일러급수의 개념이미지와 정의에 관하여

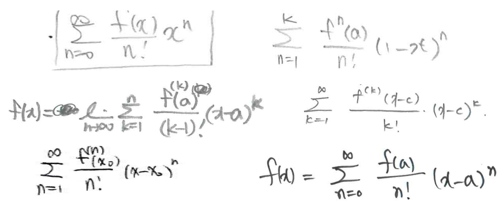
예비교사들과 교사들은 테일러급수라 할 때 먼저 떠올린 것은 “무한급수”(가장 많이 답함), “매클로린급수”, “급수 전개”, “수렴반경”, “다항식 전개”, “시그마”, “무한하다”, “미분이 있다”, “n계도함수”, “급수의 값”, “e^x, $\sin x$등을 급수 전개시킨 것”, “한없이 긴 다항식” 등이 있었다. 이들 답의 다수가 테일러급수를 나타내는 기호의 형식과 관계가 있었다. 수렴반경을 떠올리는 예비교사도 있었는데 그 이유로 테일러급수를 배울 때 수렴반경이 시험문제로 나와 풀었던 기억이 난다고 응답했다. 시험문제로 다루어 본 경험이 개념 이미지를 형성하는 데 영향을 주고 있음을 알 수 있었다.

테일러급수를 공부하는 이유에서도 테일러급수에 대한 개념 이미지가 드러났다. 일부의 예비교사들이 “복잡한 것을 간단히 표현할 수 있기 때문에”, “편의를 위해”, “간편한 식을 만들기 위해”등으로 답하였으며 여러 예비교사들이 다음의 [그림 Ⅲ-1]와 같이 테일러급수 사용에 대한 의미를 잘 부여하고 있었다. 이 의견들은 테일러급수를 공부하는 이유는 다항함수의 활용이 삼각함수를 비롯한 많은 복잡한 함수를 가지고 과제를 수행하는 것보다 훨씬 수월하기 때문이고 또한 다항식이 미분하거나 적분하기가 쉽기 때문이라는 Stick(1999)이 제시한 주장과 유사하다.



[그림 Ⅲ-1] 테일러급수가 중요한 이유에 대한 의견

테일러급수가 무엇인가의 개념 정의를 묻는 질문에 “기억이 나지 않는다.”거나 답을 쓰지 않은 예비교사들이 다수 있었으며 답을 쓴 대다수의 예비교사들은 “$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$”을 쓰고자 하였다. 그러나 [그림 Ⅲ-2]와 같이 식의 표현에서 오류가 있기도 했다.

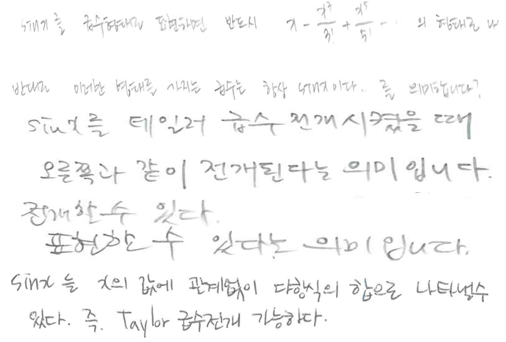


[그림 Ⅲ-2] 테일러급수의 표현에 나타난 오류

[유형1]의 검사문항에서는 함수를 구체적으로 언급하지 않았으나 예비교사들은 함수를 $f(x)$로 보았다. 이것은 함수의 이미지에 기호 $f(x)$가 깊게 자리 잡고 있음을 알 수 있었고, 이는 학교 수학에서부터 이 기호에 익숙해져 있기 때문이라 여겨진다. 함수의 무한번의 미분가능성에 대해 구체적으로 언급한 학생은 두 명뿐이었으며 대다수의 예비교사들은 함수가 가질 조건에 대해 무관심하거나 암묵적으로 인정하는 것으로 여겨진다.

나. 테일러급수의 수렴 개념에 대하여

[유형2]의 문항들(2-1,2)은 함수와 그 함수의 테일러급수간의 등호의 문제는 급수를 다룰 때 나타나는 핵심적인 인지적 장애의 하나이다(Tall, 2000). 등호는 과정적 요소와 결과물이 잠재하는 기호(symbol)로 Gray & Tall(1994)이 주창한 과정−개념(procept)으로 볼 수 있다. 여기서 등호기호는 테일러 다항식에 의한 근사의 의미와 무한합(극한)의 의미 즉, 과정과 대상개념의 의미를 포함하며 변수가 포함되어 더욱 복잡한 양상을 가지고 있다. 많은 학생들이 기호 “=”의 의미에 대해 말하는 것을 힘들어 했다. 대다수의 예비교사들은 무한급수의 수렴에 대한 정의를 염두에 두고 있지 않았고, 등호가 가지는 통상적 의미로 해석하거나, [그림 Ⅲ-3]과 같이 급수 전개라는 피상적인 답이 가장 많았으며 “유사하다”, “거의 같다”, “비슷하다”라고 응답하는 학생도 있었다.

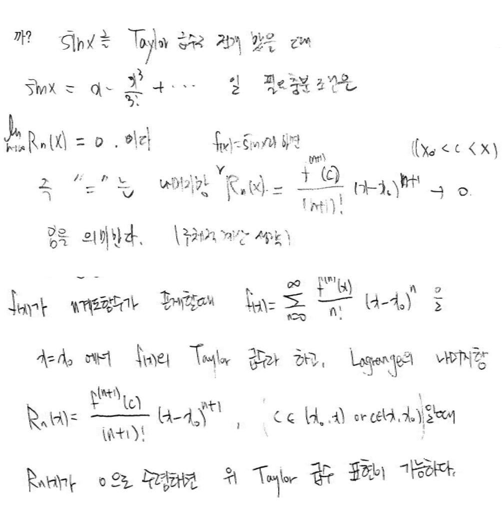


[그림 Ⅲ-3] $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$에서 “=”에 대한 의견(1)

무한급수의 수렴에 대한 정의는 고등학교 수학에서부터 다루었음에도(우정호 외, 2010) 불구

하고 예비교사들은 테일러급수 자체로 즉 대상화되고 구조화된 관점으로 보려는 경향이 있다. 이것은 테일러급수의 수렴에 대한 학습이 형식화된 지식의 습득에 치중하고 있으며 피상적으로 구조화된 개념을 다루고 있는 것으로 보아야 할 것이다. 개념은 조작적인 과정을 거치면서 구조적 개념이 형성되어야 하나(Sfard, 1992), 개념이 형성되어가는 조작적인 과정이 미흡함은 수학 개념의 활용에서 유연함이 떨어질 소지가 있다.

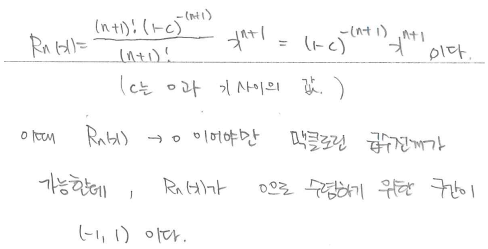
일부의 예비교사들은 “수렴한다”는 용어만을 사용했고 구체적인 수렴의 의미를 주지 않았다. 그러나 예비교사 4학년생 중 3명은 [그림 Ⅲ-4]와 같이 “나머지 항”의 개념과 비판정법을 적용하였고 나머지 항이 0에 수렴하는 가를 가지고 등호의 의미를 매우 적절하게 해석하였다.



[그림 Ⅲ-4] $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$에서 “=”에 대한 의견(2)

다. 테일러급수의 수렴 반경에 대하여

[유형3]의 문항들(3-1, 2)은 테일러급수의 수렴 개념에 연속되는 개념으로 수렴반경에 대한 것이다. 테일러다항식에 의한 수열의 극한값이 있다면 테일러급수의 합이 되고 이 극한 값이 원함수의 함숫값과 일치하도록 변수 x가 취할 수 있는 값의 범위가 수렴범위이다. 이것은 하나의 구간으로 주어진다(Stewart, 2008). [유형2]에서 언급된 $\sin x$는 변수 x에 어떠한 값을 주든지 테일러급수는 수렴하고 그 극한 즉 급수의 합과 $\sin x$와 같은 값임을 함의하고 있다. 이 경우는 수렴범위는 실수전체로 이 경우 수렴반경이 무한대임을 나타낸다. [유형3]은 테일러급수의 수렴반경의 의미에 대한 질문으로 문항(3-1)은 학교수학에서도 중요하게 다루는 무한등비급수가 연계되는 대표적 사례이다. [그림 Ⅲ-5]와 같이 예비교사 2명은 함수 $f(x) = \frac{1}{1-x}$이 주어졌다는 조건하에서 중심을 0으로 하는 $f(x)$의 테일러급수(매클로린급수)로 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \sum_{1}^{\infty} x^n$를 구한 다음, 나머지 항 $R_n(x)$에 비판정법(ratio test)을 적용하여 어떤 x에 대해 0으로 수렴하는 가에서, 수렴반경이 1이고 수렴구간이 $(-1,1)$임을 보였다.



[그림 Ⅲ-5] 예비교사가 나머지 항으로 구한 수렴구간

다수의 예비교사들은 $\frac{1}{1-x}$의 주어진 함수를 먼저 생각하지 않았고, [그림 Ⅲ-6]과 같이 오른쪽의 급수 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \sum_{1}^{\infty} x^n$을 공비가 x인 무한등비급수로 보고 수렴하려면 x

는 $-1<x<1$을 만족해야 하고 그 합이 $\frac{1}{1-x}$ 인 것으로 해석하였다.

$1+x+x^2+x^3+\cdots$이 수렴하려면 [illegible]의 공비인 x가 -1과 1 사이에 있어야 한다.

무한등비급수 : 공비 x. 첫째항 1 에서 $\frac{1}{1-x}$ 으로 표현될때 무한등비급수가 수렴하는 조건.

첫째항 : 1 공비가 x 인 무한등비급수의 합 $\frac{1}{1-x}$로 표현할수 있습니다. 여기서 무한등비급수의 합이 존재하기 위해서는 x 값이 $x \in (-1, 1)$의 범위로 잡아야 합니다

[그림 Ⅲ-6] 무한등비급수의 관점에서 수렴을 해석

문항(3-2)은 중심의 변화에 따른 수렴반경의 변화(수렴구간의 길이)에 대해 묻고 있는데 중심 c의 변화에 따른 수렴구간의 길이 변화에 대해 제대로 모르거나 단순히 추측하는 예비교사들이 대다수였다. 한 예비교사만이 [그림 Ⅲ-7]과 같이 $f(x)=\frac{1}{1-x}$을 사례로 잡고 중심 c에서 테일러 급수의 수렴구간의 길이를 구하여 수렴 반경이 변화될 수 있음을 보였다.

c 에 대한 Taylor 다항식 $\sum_{0}^{\infty} \frac{n!(1-c)^{-(n+1)}}{n!}(x-c)^n$.

: 수렴구간. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-c)^{-(n+2)}(x-c)^{n+1}}{(1-c)^{-(n+1)}(x-c)^{n}}\right| = \left|\frac{x-c}{1-c}\right|<1 \iff |x-c|<|1-c|$

∴ 수렴구간의 길이 : $|2-2c|$: 달라진다.

[그림 Ⅲ-7] 중심 c에서 $f(x)=\frac{1}{1-x}$의 테일러급수의 수렴구간의 길이

예비교사들은 고등학교 교육과정에 익숙해진 결과로 주어진 상황과는 달리 무한등비급수를 왼편에 두고 결과인 무한합을 오른편으로 나타내는데 익숙해져 있었다. 또한 수렴반경의 길이가 불변하다고 인지하는 것은 매클로린급수에 치중하기 때문이었다. 예비교사들은 무한등비급수와 매클로린급수에서 얻은 지식을 여과없이 테일러급수에 적용하고 있는 것으로 보아 지식이 고착화되어 있음을 볼 수 있었으며 유연한 지식으로 전환할 기회를 가져야 하겠다.

2. GeoGebra를 활용한 테일러급수의 수렴 지도

본 수업은 GeoGebra를 활용한 시각적 관찰을 토대로 추측하는 과정의 교수실험으로 테일러급수의 수렴과 수렴 반경을 탐색하는 것에 초점을 두어 진행되었다.

기호의 면밀성과 GeoGebra에 사용할 함수표기를 위하여 함수 $f(x)$에 대해 중심이 c인 $(x=c$ 에서) 함수 $f(x)$의 n차 테일러다항식을 $T_{c,n}(x)$으로 나타내고 이것을 테일러 다항함수라고 하였다. 그리고 원함수와 n차 테일러다항함수와의 차, 즉 n차의 나머지항, 을

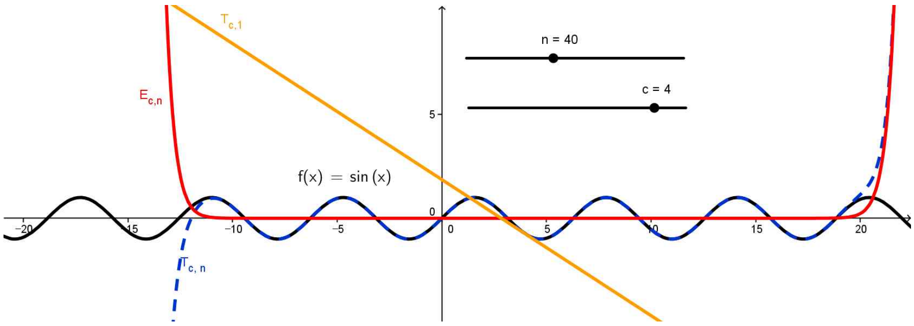
$$R_{c,n}(x)(=f(x)-T_{c,n}(x))$$

으로 나타내고 근사를 살펴보기 위해 n차의 ‘오차항’을 도입시켰다2):

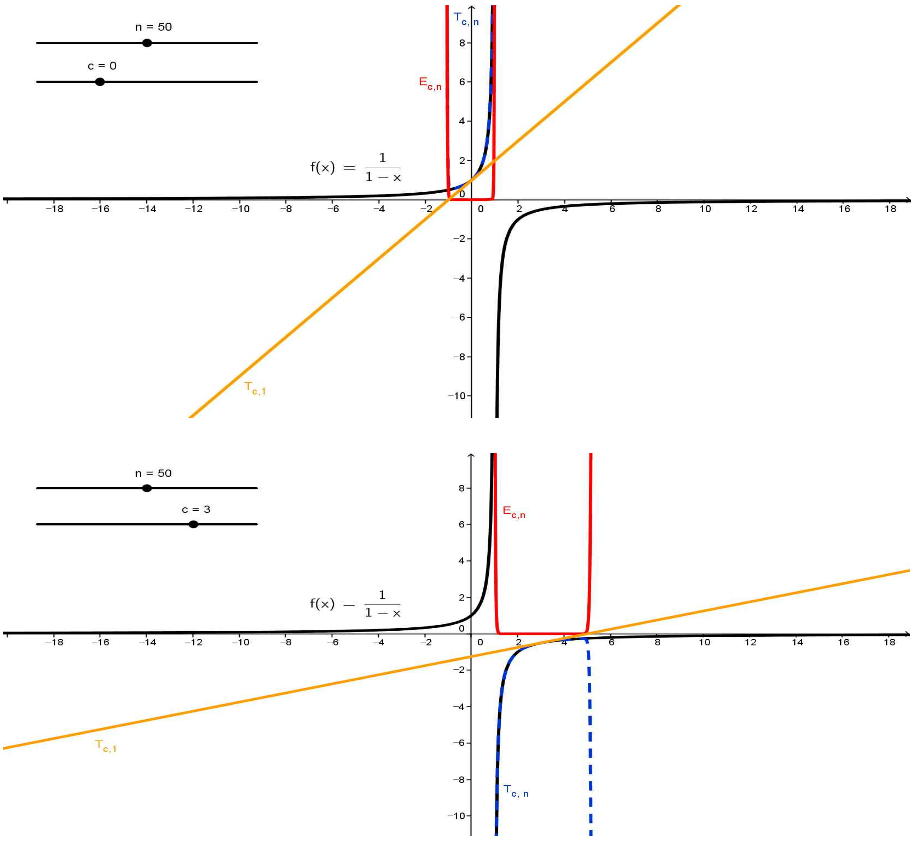
$$E_{c,n}(x)=|f(x)-T_{c,n}(x)| \ (n=1, 2, \cdots)$$

예비교사들이 개인용 컴퓨터를 이용하여 수업을 한 것은 아니며 연구자와 예비교사들이 함께 강의실의 메인컴퓨터와 이것에 연결된 프로젝트의 스크린을 활용하였다. GeoGebra를 가동시키고 대수창, 기하창, 입력창을 열어두었다. 입력창에 “f(x)=sin(x)”를 입력하였고, 다음으로 슬라이드기능을 활용하여 c와 n에 대한 두 개의 슬라이더를 만들었다. 여기서 c의 범위는 -2에서 5로 잡았고, n은 0에서 100으로 하였다. 그리고 입력창에 중심 c인 n차의 테일러다항함수 “T_{c,n}(x)=테일러전개[f(x),c,n]”을 입력하였고

2) 여기서 수치적 계산에 초점을 두고 있지 않으며, 그래프로 나타내어 시각적으로 비교하는 것에 목적이 있고 테일러급수의 수렴과 수렴구간을 직관적으로 관찰하는데 사용된다.



[그림 Ⅳ-1] $f(x)=\sin x$에 동반된 그래프들



[그림 Ⅳ-2] $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$에 동반된 그래프들 (중심 0, 3; 차수 50)

다음으로 “E_{c,n}(x)=abs(f(x)-T_{c,n}(x))”를 입력하였다. 대수창에 3개의 함수와 기하창에 3개의 함수 그래프, 그리고 두 개의 슬라이더가 활성화되도록 하였다.

우선 $f(x)=\sin(x)$, 다음 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$에 대해 $f(x)$, $T_{c,n}(x)$와 $E_{c,n}(x)$의 그래프들을 프로젝트의 스크린에 띄우고 테일러다항함수의 중심

c와 차수 n에 따른 그래프들의 움직임([그림 Ⅳ-1]과 [그림 Ⅳ-2])을 관찰하고 질의응답하면서 수렴과 수렴반경의 개념을 찾아가도록 하였다.

주어진 함수 $f(x)$에 대해 중심 c를 고정하고 테일러다항식의 차수가 바뀜에 따라 그래프들에서 나타나는 현상과 차수를 고정하고 c를 변화시킬 때 나타나는 현상을 살폈다.

가. 그래프로 관찰하는 테일러급수의 수렴개념

예비교사들은 다양하게 주어지는 (여기선 $f(x)=\sin x$와 $f(x)=\frac{1}{1-x}$)에 대해 중심을 고정하고 차수를 변경하면서 그래프들을 관찰했다. 차수 0과 1인 테일러다항함수의 그래프에 주목했고, 아래의 [에피소드 1]처럼 그래프를 관찰하면서 수렴에 대한 논의를 가졌다.

[에피소드 1] 수렴과 수렴범위를 그래프로 관찰

연구자 : 이런 실험활동에서 테일러다항식의 그래프의 동향을 보고 무엇을 관찰하였지? 함수 이름 잘 기억해...

예비교사 : 다시 한 번 직접 해 봐도 될까요? (함수와 c와 n의 값을 다양하게 변화시켜 보았다.)

연구자 : 관찰을 다시 하고 싶으면 누구든 직접 나와서 적당한 함수를 택해 GeoGebra를 원하는 대로 조작해 보아도 좋다.

예비교사 : n=0일 때는 c를 지나는 상수함수이고, x-축과 평행한 직선이고... n=1일 때는 접선의 방정식이네요.

예비교사 : n이 커지면서 테일러다항함수의 그래프가 점점 더 함수에 가까워지고, 차를 나타내는 함수의 그래프가 x-축과 포개지는 범위가 넓어지는데요.

예비교사 : sin$x$때는 (범위가) 자꾸 커지는 것 같고, $\frac{1}{1-x}$때는 커지는데 조금씩 커지는데...

연구자 : 그래프의 움직임의 관찰을 보고 연계되거나 생각나는 개념은?

예비교사 : 빨간 그래프(나머지항의 절댓값으로 정의된 함수의 그래프를 의미)가 x-축과 포개지는 부분이 수렴구간이 되어요.

연구자 : 수렴구간이라, ...마우스 zooming해 볼게... 포개지는 부분이 줄어들지, 왜 그럴까? 여기서 n을 크게 하니 포개지는 부분이 다시 넓어지지. 지금 우리가 본 그래프는 100차도 안 되는 테일러다항함수의 그래프잖아? n을 더 크게 하면...

예비교사 : 오차가 있어서 그런가 봐요. 그러나 중심에서 멀어지니 x-축에서 벌어지네요. n가 커지니 가까워지고 포개지네요.

연구자 : x가 c에 가까울수록 주어진 오차범위 내에서 테일러 다항식을 $f(x)$에 근사시키는데 더 작은 차수의 테일러다항식으로 가능하다는 거야. 화면상 보기에 포개지는 것은 눈으로 오차를 감지 못하고 무시한다고 보면 되지... n이 커가니 어떤 현상이 일어나지, 이것은 개념적으로 무엇을 의미할까?

예비교사 : n이 한없이 커져 가면 테일러급수가 되는 것 아닌가요? 눈으로 보기에 포개지는 부분도 늘어나고 물론 오차는 무시하고...

예비교사 : ...그러면 테일러급수와 함수가 포개지는 부분이 수렴구간이겠네요.

연구자 : 그 말은 그럴 듯한데, 지금 우리가 보고 있는 그래프는 테일러함수의 그래프이지, 테일러급수의 것은 아니잖아, 그럼 어떻게 하지.? 테일러급수는 형식적 표현이지 무한급수처럼, 무한급수의 수렴을 생각해보고 연계시켜 보렴, 고등학교 때도 배우고 미적분학에서도 배웠잖아.

예비교사 : 그러니 테일러다항식이 테일러급수의 부분합이고, 그래서 이것(들)을 가지고 무한급수처럼 수렴을 생각하면 되네요. 그래서 테일러다항식을 그래프로서 따져 가네요.

연구자 : 바로 그거야, 우리는 n을 크게 하면서 관찰하는 이유는 거기에 있지.

예비교사 : 그래서 테일러다항식(함수)의 그래프의 차수를 크게 해가면 테일러급수가 되고, 빨간 그래프가 x-축과 얼마만큼 포개지는가가 수렴구간이겠네요.

연구자 : 여기선 추측할 뿐이지, 빨간 그래프는 원함수 $f(x)$와도 관계되어 있지. 정확한 구간은 따로 계산해야지.

예비교사 : 그렇다면 n가 커질 때 테일러다항식이 $f(x)$에 수렴하는가를 따지는 거네요....

연구자 : 그렇지, 어떤 x값에 대해서 수렴가도 봐야지... 그게 수렴영역이지. 스크린의 그래프의 움직임을 보면서 추측해 왔지..., 지난번 조사한 질문

지를 보니 "="의 의미를 말하는 것을 모두들 힘들어 했는데... 몇 명은 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$가 0으로 수렴하는 걸로 의미를 주던데 잘한 것 같다. $E_{c,n}(x)=|R_{c,n}(x)|$이 0에 수렴하는 것과 관계가 있지...

예비교사 : 그래서 빨간색 그래프가 x-축과 포개지는 걸 보고 수렴반경도 추측하고, 수렴도 따지네요.

연구자 : 보통 나머지 항을 사용해 함수와 테일러급수 사이에 "="를 설명하는 것도 한 방법이라 생각한다. 여러분 중 3명은 나머지 항의 개념으로 등호의 의미를 설명하였어. 이 때 수치적으로 계산할 땐 Lagrange 나머지 항이라 하여 테일러정리를 적용시켜서 생각해야 되지 ....

예비교사 : 등호에는 테일러 다항식으로 주어진 $f(x)$에 근사시키고 수렴시킬 수 있다는 개념이 들어있네요.

연구자 : 수렴은 쉬운 개념이 아니지... 우리가 무심결에 쓴 것 같지만 "="는 다양한 의미를 가짐에 유의해야 해. 어때...

예비교사들은 우선 주어진 함수 $f(x)$에 대한 테일러다항함수의 중심 c를 고정한 다음, 테일러 차수 n에 대한 슬라이더 기능을 적용하여 0, 1, 2, ⋯, 100으로 변환해 가면서 원함수의 그래프와 n차 테일러다항함수의 그래프 간의 근접에 대해 관찰하였다. 특히 n가 0과 1일 때의 테일러다항함수의 그래프가 가지는 기하적인 의미를 관찰하였으며, 차수가 커짐에 따라 원함수와 테일러다항함수간의 차의 절대치를 나타내는 그래프가 x축과 어느 정도 근접하게 포개지는가를 살펴보았다. 또 예비교사들은 주어진 함수의 테일러다항식이 테일러급수의 부분합임을 알게 되었고, 무한급수의 수렴개념과 연계시켜 테일러다항함수 수열의 극한과 테일러급수와의 관계와 더불어 원함수와의 관계에 관심을 가지게 하였다. 또한 나머지항의 활용에 대한 의미와 테일러정리의 의미를 상기했고 차수가 커짐을 전제로 수렴구간을 추정했다. 차수의 변화에 따른 추측한 것을 서로 비교하면서 의견을 모았다.

GeoGebra에서 관찰되는 수렴의 과정은 유한의 과정에서 일어나는 경우만 있다. 이것은 스크린을 통해 관찰하고 추측한 결과는 유한에서 다루어지기 때문이다. 이러한 일련의 과정에 무한이 스며들어온다고 보면 잠재적 무한을 통해 실제적 무한을 추측하고 있다고 볼 수 있다. 위에서 논한 등호의 개념도 잠재적 무한의 개념에서 접근하는 것이 자연스런 것이고, 함숫값은 원하는 오차 이내에서 테일러다항식으로 근접할 수 있다는 의미로 볼 수 있다. 이것은 무한합이 이론상으로만 가능하다(Kidron 2002)라는 의견과도 상통한다. 특히 시각화를 논하면서 포개짐은 오차를 무시한 것이고 그래프를 확대해서 포개짐을 보는 것은 오차를 줄여서 생각하는 것이다. 칸토어 이론의 관점에서 테일러급수는 테일러다항식의 총체라 볼 수 있고 이렇게 보는 것이 실제적(actual) 무한이라 할 수 있다(Tirosh, 1991).

나. 그래프로 관찰한 수렴반경의 변화

이제 테일러다항식의 차수 n을 고정시키고 중심 c의 변화에 따라 삼각함수나 분수함수와 이에 동반된 테일러다항함수와 오차함수들의 그래프를 관찰하며 근사해가는 영역(수렴구간)과 수렴반경의 변화를 추측하고 확인하였다.

[에피소드 2] 수렴반경의 변화에 대한 관찰과 추측

연구자 : 중심 c를 고정해두고, 편하게 우선 0이라 하자. n을 키우니 어떤 현상이 나타났지?

예비교사 : 빨간 그래프(원함수와 테일러다항함수의 차의 절대치로 주어진 그래프)가 ($f(x)=\sin x$의 경우) x-축에 점점 더 포개지는데...

연구자 : $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$의 경우는 어때?

예비교사 : n을 크게 하니, 포개지는 부분이 (-1,1)로 가요. 늘어가는 것 같은데 미세하지만...

예비교사 : 0을 중심으로 양방향에서 똑같이 늘어나는 것 같아요. 두 함수에서 모두 양쪽으로 같이 늘어나요.

연구자 : 중심이 0으로 고정하고... 이렇게 n을 계속 크

게 해 가면서 테일러다항식이 원함수에 수렴하게 하는 x값을 모을 수 있지. 이것은 중심에 대해 대칭인 구간이지, n을 크게 하니 빨간 그래프가 중심에 대칭되는 구간에서 포개지고 점차(아니 확) 커지지. 그래서 수렴구간과 수렴 반경이란 용어가 나왔지.

예비교사 : 수렴하는 곳은 구간이고 바깥에서는 발산하는구나.

예비교사 : 수렴영역을 구하던 게 생각나요. 수렴 반경을 구하고 양 끝점에서 수렴을 따진 적이...

연구자 : 수렴하는 영역이 중심에 대칭이 되는 하나의 구간이라는 정리도 있어, 생각나는지?

예비교사 : $\sin x$의 수렴영역이 실수전체가 되고, 반경이 무한대이고, $\frac{1}{1-x}$의 경우는 수렴영역이 (-1,1)이고 수렴반경이 1이네요. 수렴 반경이라는 말속에 대칭적이란 의미를 가지고 있네요...

예비교사 : 그런데 $\sin x$의 경우 수렴 반경이 무한대라 것은 알겠는데... 화면만으로 보니 수렴 구간이 커져가긴 해도 추측하긴 어려움이 있어 보여요. 생각보다 구간이 확 커지지는 않네요...

연구자 : 그 점은 무한이라는 특수성, 공학의 한계이고 공학에서 유한을 주로 다루기 때문에 그렇겠지? 지금은 중심을 0으로 고정하였을 때를 관찰하고 있지? 그럼 중심을 바꾸어 보면 어떤 현상이 일어날지 예측되나? 여러분 중에 중심에 관계없이 이 반경이 항상 일정하다고 한 사람도 제법 있는데...

예비교사 : 제가 일정할거라고 예상했어요, 아마 매클로린급수만을 주로 생각했고, 사실 테일러급수 중심에 대해서는 생각해 본 적이 없고, 그때 문제 풀면서 고민하다가...짐작으로....

연구자 : 보니 여러 사람이 고민을 했고... 확실하게 알고 있지는 않은 것 같았어.

예비교사 : $\sin x$를 다룰 때는 수렴반경이 바뀌지 않는다는 제 생각이 맞구나 하고 생각했는데, $\frac{1}{1-x}$로 주어진 함수로 실험해 보고 제 생각이 틀린 것을 확실하게 알았어요.

예비교사 : $\frac{1}{1-x}$의 경우는 1에서 함수가 정의되지 않고, 센터가 3이면 수렴 반경이 2가 되는 게 보이네요, 센터가 -1이면 수렴반경이 2고요, 중심이 5일 때는 4이고 금방 알 수 있네요.

연구자 : 중심을 뭐로 잡느냐에 따라 수렴반경이 달라지지. 직접 계산으로 구해볼 수도 있어. 몇 명은 잘 기억하고 있듯이, 이론적으로 Lagrange 나머지항을 0으로 보내는 범위를 찾으면 되지.

예비교사 : $f(x)=\frac{1}{x(x-2)}$의 경우도 중신 바꾸니 수렴 반경이 더 다양해요. 함수가 정의되지 않는 점이 중요하게 작용해요.

연구자 : 관찰과 추측을 모두 잘 하네. 이론과도 자꾸 연결해 봐... 그래프로 수렴하는 것하고 수렴반경을 탐구해보니 어때?

이 활동을 통해 예비교사들은 함수에 따라 수렴 영역이 실수 전체로 커져갈 수도 있고 유한의 구간으로 한정되기도 하며 이 영역은 중심에 대해 대칭되는 하나의 구간임을 추측했다. 테일러다항식의 차수 n을 가능한 큰 수로 고정시키고 중심 c의 변화에 따라 sine함수의 그래프를 관찰하면서, 일부 예비교사들은 포개지는 구간이 평행이동하고 있으며 그 구간의 길이가 거의 같을 거라고 추측을 했으며 그 구간은 중심에 대해 대칭인 것으로 의견을 모았다. 이것은 수렴구간이 실수 전체로 확장되는 것과 연계된다고 추측했다. 분수함수를 다루면서 예비교사들은 중심에 따라 테일러급수의 수렴반경의 변화가 일어남을 인지했다. 특히 함수가 정의되지 않는 점에 주목하여 수렴구간과 반경이 이 점과 밀접하게 관계됨을 예측하였다. 이 예측을 테일러급수의 수렴 반경을 구하는 이론적 계산법과 연계를 짓도록 하였다.

GeoGebra가 가진 스크린 화면의 수용력, GeoGebra의 대수적 계산능력과 작동하는 데 소요되는 시간 등이 예비교사의 추측 활동에 어려움으로 작용할 수 있다. 이것은 도구의 발생과정에서 일어나는 제약으로 교수자는 이를 알고 있어야 한다(Guin & Trouche, 1999).

V. 결 론

이 연구는 Goldin(2000)에 기초하여 과제 기반형 질문지와 구조화된 질문과 답을 통해 예비교사들이 가지고 있는 테일러급수에 대한 이미지와 정의 및 수렴개념에 대한 이해를 점검하였고 이에 따른 교수방안을 모색하였다. 예비교사들은 테일러급수 수렴과 수렴반경의 조작적 과정에 대한 불완전한 이해를 드러냈다. 그들은 형식화된 지식에 치중하여 학습하면서 구조화된 지식을 갖추고 있는 듯했으나 그 이해는 피상적 수준에 머문다고 볼 수 있다. 이를 보완하고자 예비교사들에게 GeoGebra에 의해 만들어진 함수와 이에 동반된 테일러다항함수와 오차함수의 그래프를 관찰하였고 그들 간의 관계를 추측하도록 하여 개념 형성의 과정을 재정립하고 이론과 연결하도록 하였다. 예비교사들의 테일러급수 수렴에 대한 이해를 연구하면서 얻은 결론과 시사점은 다음과 같다.

첫째, 예비교사들은 주어진 함수에 대해 테일러급수와 수렴 반경을 계산하는 것에는 어느 정도 익숙해져 있지만, 테일러급수는 테일러다항식의 근사에 의해 의미를 가진다는 것과 원함수와 그 함수의 테일러급수간의 “=”에 대한 의미 파악이 취약하였다. Alock & Simpson(2004), Kung & Speer (2010)와 Martin(2013)의 연구와 같이 예비교사들은 수열의 극한 개념과 무한급수에 대해 배웠음에도 테일러급수의 수렴성을 이해하는 데에는 어려움이 있었다. 이는 어떠한 법칙이나 공식에 의해 형식적으로 주어진 문제에 대한 답을 구하는 것과 개념을 형성하는 과정에 대해 이해하는 것 사이에 차이가 있다는 것을 볼 수 있다. 학생들이 문제에 대해 바른 답에 도달하였음에도 개념적으로 결함이 있을 수 있다는 시사점을 얻을 수 있다.

둘째, GeoGebra를 활용한 수업을 통해 시각화를 제공하는 것은 예비교사들이 가지고 있는 테일러급수 수렴과 수렴반경에 대한 이해의 취약점을 보완할 뿐 아니라 미적분학을 해석학적이고 대수적으로만 다룬 경험과의 상호작용에 도움이 될 수 있음을 보여 주었다. 특히 교사를 희망하는 예비교사의 경우 GeoGebra와 같은 공학도구의 활용을 통해 시각적으로 관찰하고 추측하거나 확인하는 준실험적 경험이 필요하고 교수법으로 활용할 수 있도록 권장할 필요가 있다. 이 연구는 GeoGebra를 활용한 테일러급수의 수렴에 관한 탐색으로 한정되었지만 미적분학의 교수 학습의 개선을 위해 다양한 주제에 대한 심층적 후속 연구가 있어야 할 것으로 본다.

셋째, 이 연구의 교수실험에선 예비교사가 피상적일 수도 있지만 테일러급수에 대해 어느 정도의 형식적 지식을 가지고 있는 것을 전제로 개념적 취약점을 보완하여 형식적 지식을 강화하는 데 공학이 활용되었다. 이는 공학이 주로 개념도입에 앞서 동기유발과 호기심을 부여하기 위해 활용된다는 점과 대조된다. 특히 어느 정도의 지식을 갖춘 상태에서 공학의 활용이 지식의 강화뿐 아니라 취약하기 쉬운 지식을 보완하는데 효과적일 수 있다는 예비교사들의 의견은 시사점을 준다.

이 연구는 장기간의 수업과 반응을 고찰하지 못하였기에 연구 결과에 대한 한계가 있다고 본다. 그러나 미적분 교재에 이 연구에서 제시한 시각적 요소를 교수활동에 소개한다면 테일러급수에 대한 테일러다항식이 가지는 의미와 수렴과 수렴반경에 대한 의미의 파악에 도움이 될 것으로 사료된다. 이 연구는 예비중등교사들이 무한급수와 테일러급수에 대한 유연한 지식을 가지도록 지도하는데 유용한 교수-자료가 될 것으로 기대한다. 그럼으로써 학교수학의 무한급수와 관련된 교수 내용적 지식의 확장과 교사의 전문성 신장에 기여하리라 본다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]. 서울: 교육과학기술부.

우정호 외(2010). **수학 1 교사용지도서 (2권)**. 서울: 두산동아(주).

Alock, L. & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 1-32.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representation in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 515-241.

Borwein. J. M. (2005). The experimental mathematics: The pleasure of discovery and the role of proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*, 109-134.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153–166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cunningham, E, (1994). Some strategies for using visualization in mathematics teaching. *ZDM, 26*, 83-85.

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 3-40.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*(3), 195–227.

Hohenwarter, M., Howenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software geogebra. TSG 16, *ICME 11*.

Kadunz, G. & Strasser, R. (2001). Visualization in geometry: multiple linked representation, *Proceedings of the 25th conference of the International Group for PME, 3*, 201-208.

Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. In Cockburn, A. D. & Nardi, E. (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference on the PME, Vol. 3* (pp. 209-216). Norwich, UK.

Kidron, I. (2004). Polynomial approximation of functions: Historical perspective and new tools. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8*, 299-331.

Kowalczyk, R. E & Hausknecht, A. O. (1994). Our Experiences with Using Visualization Tools in Teaching Calculus. *ERIC* Number: ED390685).

Kung, D. & Speer, N. (2010). Do they really get it? Evaluating evidence of student understanding of power series. *In Proceedings of the Thirteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education,* Raleigh, NC: North Carolina State University.

Mader, A. (2011). The use of experimental mathematics in the classroom. *Teaching Mathematics and Statistics in Sciences.* IPA HU-SRB/0901/221/088.

Martin, J. (2013). Differences between experts' and students' conceptual images of the mathematical structure of Taylor series convergence. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 267-283.

NCTM (1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principle and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Peters, V. (1992). Analysis: Visualization in mathematics and didactics of mathematics, part 1. *ZDM, 26*, 77-92.

Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery I-II*. New york: John Wiley & Sons.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and Mathematical Giftedness. Educational Studies in Mathematics, 17, pp. 297-311.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-The case of function. In Harel, G & Dubinsky, E. (Eds.), *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy MAA Notes. Vol. 25* (pp. 59-84). Washington, DC.

Stewart, J. (2008). *Calculus (6th ed.)*. Belmont: Brooks/Cole.

Stick, M E. (1999). Maclaurin and taylor series for transcendental function: A graphing- calculator view of convergence. *The mathematics Teacher, Vol 92*(9), 833-837.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal 12*(3), 210-230.

Tirosh, D. (1991). The role of students'intuition of infinity in teaching the Cantorial theory. In Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1991). The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Weigand, H. G. (2013). Tests and examinations in a CAS-environment-The meaning of mental, digital, and paper presentations. Retrieved from WG 15, *CERME 8*.

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualisation? In Zimmerman, W. & Cunningham, S. (Eds), *Visualisation in Teaching and Learning Mathematics*(pp. 1-7). Washington, DC.: Association of America

Exploring Teaching Way Using GeoGebra Based on Pre-Service Secondary Teachers' Understanding-Realities for Taylor Series Convergence Conceptions

Kim, Jin Hwan (Yeungnam University)

The purpose of this study is to grasp pre-service secondary teachers'understanding-realities for Taylor series convergence conceptions and to examine a teaching way using GeoGebra based on the understanding-realities. In this study, most pre-service teachers have abilities to calculate the Taylor series and radius of convergence, but they are vulnerable to conceptual problems which give meaning of the equality between a given function and its Taylor series at any point. Also they have some weakness in determining the change of radius of convergence according to the change of Taylor series' center. To improve their weakness, we explore a teaching way using dynamic and CAS functionality of GeoGebra. This study is expected to improve the pedagogical content knowledge of pre-service secondary mathematics teachers for infinite series treated in high school mathematics.

* Key Words : Taylor Series(테일러급수), Convergence(수렴), GeoGebra(지오지브라), Visualization(시각화), Procept(과정-개념)

논문접수 : 2014. 5. 9
논문수정 : 2014. 5. 28
심사완료 : 2014. 5. 29