Journal of the Korea Society of Disaster Information Vol.10 No.1 ▌pp. 123 - 140

Available online at www.kosdi.or.kr

회전쉘의 동적 특성에 관한 연구

Dynamic Characteristics of Revolution Shells

Sung-Jin Park[a,*]

[a] *Department of Urban & Environment Engineering, Incheon National University, 119 Academy-ro Yeonsu-gu, Incheon 406-772, Republic of Korea*

A B S T R A C T

This paper proposes a simple and effective method for determining the dynamic characteristics of revolution shells. This is a weighted residual method in which the collocation points are taken at the roots of orthogonal polynomial.

In this paper the collocation method is employed to replace a partical differential eqations by a system of ordinary differential equations in time, and the resulting equations are solved by two different numerical methods of time integration : an implicit method and an explicit method.

The proposed approach is formulated in some detail. The versatility and accuracy are illustrated through several numerical examples. The method appears to be relatively easy to set up and gives satisfactory results.

KEYWORDS

vibration analysis
revolution shell
dynamic vibtation
collocation method
integro
differential equations

회전쉘의 정적문제 및 동적문제에 대해서 선점법에 의한 공간영역의 이산화에 대한 유효성을 비교 검토하였고, 정식화에 있어서 이산화 후의 연립방정식 및 시간에 관한 연립상미분방정식의 계수행렬에 대한 영향을 검토하였다. 수치해석법에는 동적특성의 문제를 간단하고 효과적인 방법을 위하여 선점법을 제안하였으며, 수치해석예로서 평균2승잔차법과의 비교검토로 고정도의 해석을 위한 정확성을 검증하였다.

진동해석
회전쉘
동적문제
선점법
평균2승잔차법

ⓒ 2014 Korea Society of Disaster Information All rights reserved

* Corresponding author. Tel. 82-32-835-8775. Fax. 82-32-232-5024.
Email. sjpark@incheon.ac.kr

ARTICLE HISTORY
Received Jan. 14, 2014
Revised Jan. 15, 2014
Accepted Feb. 07, 2014

1976-2208 ⓒ 2014 Korea Society of Disaster Information All rights reserved.

1. 서 론

쉘구조는 우수한 역학적 특성을 바탕으로 건축·토목구조물 등 많은 공학분야에서 폭넓게 사용되고 있다. 정적 및 동적문제 해석을 위해 가장 중요한 것은 해법에 따라 공간영역을 이산화하는 것이다.

이산화 해법으로서는 FEM(Reismann, H 1998), FDM(Budiansky, B 1983) 등이 거론되고 있지만, 결과에서 얻어지는 연립방정식 및 시간에 관한 연립상미분방정식의 계수행렬은 고차원의 행렬이 일반적이다.

시간의존 문제에서는 고차원인 계수행렬의 고유치가 폭넓게 분포하고, 이에 인한 시간영역의 적분이 불안정하여 해가 발산하기도 하여, 해가 안정으로 해석되기 위해서는 실행 시간이 많이 소요가 되는 등의 문제점도 발생하게 된다.

FEM에서는 실행 계산 시간의 단축을 위해 자유도를 줄이는 방안도 검토되고 있지만, 자유도를 줄이게 되면 해석의 정밀도에 관계되기 때문에 충분한 주의가 필요하다.

더우기 해석 대상이 되는 하중상태(예를 들면 풍하중 등을 받는 캔틸레버 형식의 쉘)는 휨모멘트, 전단력 등의 단면력을 처짐과 같은 고정도의 해석으로 구하는 것이 곤란할 경우가 발생할 수 있기 때문에 FEM에서는 고정도 요소의 개발을 위한 연구가 계속 진행되고 있다.

선점법은 정식화가 용이하고 선점의 선택에 의해 미지수의 감소 등의 특성이 있고, 공간영역의 이산화 수법으로서 유효하다고 생각되지만 쉘에 대한 적용성은 아직 미미하다고 볼 수 있다(C, Beboor 1983).

선점법과 유사한 개념을 바탕으로 한 해법(Partition법, Subdomain Collocation 법이라고 도 불림)이 회전쉘의 고유치 문제해석(Langhaar, H 1990)이나 정적응력해석(Langhaar, H.L 1998; Sharma, S.K 2003)에 적용되고 있다.

그러나 이 해법은 영역분할에 크게 의존하기 때문에 (+)양의 대역적 성질의 고유치 문제를 제외하고는 국소응력·변형거동의 파악을 필요로 하는 문제에 대한 적용은 좋은 방법이라고 생각되지 않는다. 또한 계수행렬의 적분을 실행해야 하고 변위계수의 도출과정에서 미분방정식을 구해야 할 경우 반드시 실행시간이 많이 소요되는 적분을 구해야 되는 문제점을 가지고 있다.

본 연구에서는 회전쉘의 정적·동적문제를 대상으로, 공간영역에 대한 선점법의 적용성을 검토한다. 정식화의 기본적인 흐름은 4계의 지배방정식을 전제로 한 기논문(C, Beboor 1983)를 참고하지만, 여기서 가정한 시행함수에 대한 고계미분의 영향이 특히 휨모멘트, 전단력 등에 나타나는 현상을 고찰하고 미분상수를 2계로 내린 지배방정식의 채용 및 쉘의 경선방향에 따른 요소(영역) 분할에 의해 해의 정도 및 수렴성을 검토한다.

수치계산에서는 원통쉘, 구형쉘을 대상으로 하여 해법의 타당성과 적용성 검토를 실시한다. 더욱이 공간영역 이산화에 대한 검증으로 평균2승잔차를 해석에 비교 검토하여, 본 해법에 보다 고정도의 해법의 정확성을 명확히 밝힌다.

동적응답문제에서 시간영역의 적분에는 직접적분법을 이용하였다.

2. 회전쉘의 기초방정식

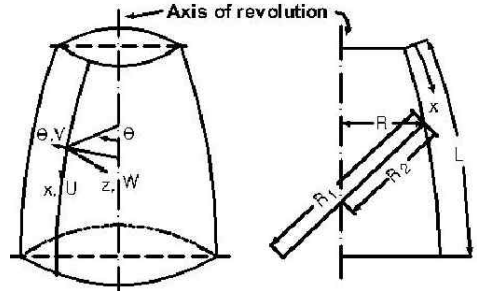

Fig. 1 Typical shell of revolution.

회전쉘의 운동방정식은 원주방향 Fourier 급수전개에 의해 경선방향 좌표와 시간에 관한 편미분방정식으로 구할 수 있다.

전개과정에서 Novozhilov의 선형 쉘이론(Novozhilov, V.V. 1979)을 전제로 한 기초방정식을 도입하는 과정은 생략한다. 또한 휨모멘트, 전단력 등의 수치적 오차를 피하기 위해 변위성분과 함께 경선방향 휨모멘트를 독립 미지량으로 다루어 미분방정식의 계수 저하를 피했다. 쉘은 등방등질인 일정한 두께로 하였다.

Fig.1에 보이는 좌표계에서 x축 방향(경선방향), θ축방향(원주방향), z축방향(법선방향)의 변위를 각각 U, V, W로 나타낸다. 또한 하중성분, 합응력 및 합모멘트 성분을 각각 (P_x, P_θ, P_z), (N_x, N_θ, $N_{x\theta}$, Q_x, Q_θ) 및 (M_x, M_θ, $M_{x\theta}$)로 표시한다. 쉘의 반경을 R, 주곡률반경을 R_1,R_2 및 길이를 a로 하고, 쉘 중앙면을 R=$R(x)$, 무차원 곡률 r_1(=a/R_1), r_2(=a/R_2) 및 무차원 반경 r(=R/a)의 관계식은

$$\left.\begin{aligned} &r_1 r_2 = -(dr/d\xi+\gamma^2)/s^2, \quad dr_2/d\xi = r(r_1-r_2) \\ &3r_2 = \sqrt{1-(d^2r/d\xi^2)/s^2}/r, \quad r_1 r_2 = -(d^2r/d\xi^2)/rs^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

가 된다. 여기서 r=$(dr/d\xi)/r$, ξ=x/l 및 s=l/a가 되고, l은 경선길이이다.

쉘의 운동방정식은 다음과 같이 주어질 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} &(rN_x)' + sN_{x\theta}^* - N_\theta(dr/d\xi) - rr_1 sQ_x + ars(P_x - \rho h\partial^2 U/\partial t^2) = 0 \\ &sN_\theta^* + (rN_{x\theta})' + N_{x\theta}(dr/d\xi) - rr_2 sQ_\theta + ars(P_\theta - \rho h\partial^2 V/\partial t^2) = 0 \\ &sr(r_1 N_x + r_2 N_\theta) + sQ_\theta^* + (rQ_x)' + ars(P_z - \rho h\partial^2 W/\partial t^2) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

여기서, $(\,)'$=$\partial(\,)/\partial\xi$, $(\,)^*$=$\partial(\,)/\partial\theta$ 이고, ρ,h 및 t는 각각 단위체적당 질량, 두께 및 시간을 나타낸다. 또 Q_θ와 Q_x는 다음 식으로 주어질 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} &aQ_x = \{(rM_x)'/s + M_{x\theta}^* - M_\theta(dr/d\xi)/s\}/r \\ &aQ_\theta = \{M_\theta^* + (rM_{x\theta})'/s + M_{x\theta}(dr/d\xi)/s/r \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

변형 및 곡률과 변위관계는 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} &a\epsilon_x = U'/s - r_1 W, \quad a\epsilon_\theta = V^*/r - r_2 W + rU/s \\ &a\epsilon_{x\theta} = V'/s + U^*/r - rV/s, \quad a\chi_x = \phi_{x'}/s, \quad a\chi_\theta = \phi_\theta^*/r + r\phi_x/s \\ &a^2\chi_{x\theta} = (sr_1 U^*/r + r_2 V' - rr_2 V + W'^*/r - rW^*/r)/s \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

여기서, ϕ_x 및 ϕ_θ는 각각 다음식에서 정의되는 x, θ방향의 회전각이다.

$$\left.\begin{aligned} &a\phi_x = W'/s + r_1 U \\ &a\phi_\theta = W^*/r + r_2 V \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

합응력과 합모멘트는 다음식으로 주어질 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} &N_x = K(\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta), \quad N_\theta = K(\nu\epsilon_x + \epsilon_\theta) \\ &N_{x\theta} = (1-\nu)K\epsilon_{x\theta}/2, \quad M_x = -D(\chi_x + \nu\chi_\theta) \\ &M_\theta = -D(\nu\chi_x + \chi_\theta), \quad M_{x\theta} = -(1-\nu)D\chi_{x\theta}/2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

여기서, $K=Eh(1-\nu^2)$, $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$이고, E 및 ν는 각각 탄성계수, 포아송비이다.
운동방정식의 계수저하를 위한 준비단계로서 식(6)에서 다음 식을 구해 둔다.

$$M_\theta=\nu M_x-D(1-\nu^2)/\chi_\theta \tag{7}$$

변위(U, V, W), 합응력(N_x, N_θ, $N_{x\theta}$), 합모멘트(M_x, M_θ, $M_{x\theta}$) 및 하중 (P_x, P_θ, P_z)를 각각 (u,v,w), $(n_x,n_\theta,n_{x\theta})$, $(m_x,m_\theta,m_{x\theta}$) 및 (p_x,p_θ,p_z)를 계수로 하는 원주방향으로 Fourier 급수전개한다. 그리고 대표응력을 σ, 원주방향파수를 n으로 하는 정현 전개된 양을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} V \\ N_{x\theta} \\ M_{x\theta} \\ P_\theta \end{Bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} (\sigma a^2/Eh)\ v^{(n)} \\ \sigma \mathrm{a}\quad \mathrm{n}_{\mathrm{x}\theta}^{(\mathrm{n})} \\ \sigma \mathrm{a}^2\quad \mathrm{m}_{\mathrm{x}\theta}^{(\mathrm{n})} \\ \sigma\quad \mathrm{p}_\theta^{(\mathrm{n})} \end{Bmatrix}\sin n\theta \tag{8}$$

경계조건을 Fourier 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ S_{x\theta} \\ T_x \end{Bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} (\sigma a^2/Eh)\phi_x^{(n)}\cos n\theta \\ \sigma a s_{x\theta}{}^{(n)}\sin n\theta \\ \sigma a t_x^{(n)}\cos n\theta \end{Bmatrix} \tag{9}$$

여기서 ϕ_x는 식(5)에서 주어지며, $S_{x\theta}$ 및 T_x는 다음식에서 정의되는 등가접선력 및 등가전단력이다.

$$\left.\begin{aligned} S_{x\theta}&=N_{x\theta}-r_2M_{x\theta}/a \\ T_x&=\{(rM_x)'/s+2M_{x\theta}-M_\theta(dr/d\xi)/s\}/(ra) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

이하, Fourier 계수의 첨자 (n)은 생략하기로 한다.
회전쉘의 운동방정식은 식(2) 및 식(6)에 의해 u,v,w 및 m_x에 관한 2계 4원 연립편미분방정식으로서 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} &a_1u''+a_2u'+a_3u+a_4v'+a_5v+a_6w'+a_7w+a_8m_x'+a_9m_x=-p_x+\ddot{u} \\ &a_{10}u'+a_{11}u+a_{12}v''+a_{13}v'+a_{14}v+a_{15}w''+a_{16}w'+a_{17}w+a_{18}m_x=-p_\theta+\ddot{v} \\ &a_{19}u'+a_{20}u+a_{21}v''+a_{22}u'+a_{23}v+a_{24}w''+a_{25}w'+a_{26}w+a_{27}m_x''+a_{28}m_x'+a_{29}m_x=-p_z+\ddot{w} \\ &a_{30}u'+a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w''+a_{34}w'+a_{35}w+a_{36}m_x=0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

여기서 $(\,)^{\cdot}=\partial(\,)/\partial\tau$이고 $\tau'=(E/\rho)^{1/2}t/a$는 무차원 시간이다. 계수 a_1~a_{36}은 부록 I를 참조하면 된다.
경계조건은 다음 4경우에 대해 조합시켜 구성한다.

$$\left.\begin{aligned} &W\text{or } T_x, \quad \phi_x \text{ or } M_x \\ &U\text{or } N_{x'}, \quad V\text{or } S_{x\theta} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

여기서 4경우의 정식화에 필요한 N_x, $S_{x\theta}$, T_x 및 ϕ_x의 각 Fourier 계수 내용은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} n_x &= b_1u' + b_2u + b_3v + b_4w \\ s_{x\theta} &= b_5u + b_6v' + b_7v + b_8w' + b_9w \\ t_x &= b_{10}u + b_{11}v' + b_{12}v + b_{13}w' + b_{14}w + b_{15}m_x' + b_{16}m_x \\ \phi_x &= b_{17}u + b_{18}w' \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

계수 $b_1 \sim b_{18}$은 부록 I를 참조하면 된다.

3. 선점법의 개략

본 논문에서는 정적 및 동적특성의 공간영역을 이산화하기 위해 선점법을 사용한다. 시간 τ 및 공간 ξ에 관한 다음과 같은 방정식이 주어진다고 하자.

$$Lu + \ddot{u} = 0 \quad (0 < \xi < 1, \tau > 0) \quad (14)$$

여기서 L은 2계 선형연산자이며, 공간에 대한 2개의 경계조건이 주어진다고 가정하자.
함수 u를 시간과 공간의 곱으로 하면 다음과 같이 근사한다.

$$u(\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{M+2} d_{i-1}(\tau)\xi^{i-1} \quad (15)$$

여기서 미정의 파라메터는 시간함수이고, 시간함수에 대한 조건은 다음과 같다.
식(15)를 식(14)에 대입하면 잔차 R이 발생한다.

$$R(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{M+2} \{d_{i-1}(\tau)L(\xi^{i-1}) + \ddot{d}_{i-1}(\tau)\xi^{i-1}\} \quad (16)$$

여기서 M개의 조건은, 공간영역 내의 M개의 점(선점)에서 다음 조건을 만족하는 것에 의해 구해 질 수 있다. 즉

$$R(\xi_j, \tau) = 0, \quad (j = 1 \sim M) \quad (17)$$

식(17)은 시간에 관한 M원 상미분방정식을 나타내며, 공간에 대한 경계조건에 의해 2개의 방정식을 얻을 수 있다. 이들 (M+2)개의 시간의존 방정식은 초기조건에 의해 미정계수 d가 결정된다. 선점법에 의한 해의 정도는 선점의 위치에 의해 좌우된다. 최근에는 임의가 아닌 직교다항식의 영점을 선점으로 하여 해의 신뢰성이 증대되는 것을 알 수 있다(Finalyson, B.A 1992).

본 논문에서는 선점으로 구간[0,1]에서 정의되는 shifted Legendre 다항식(Abramowitz, M. 1991) $P_M^*(\xi)$의 영점 ξ_j(j=1~M)을 이용한다.

식(15)를 이용하여 정식화하면 물리적 의미를 초래하지 않는 계수 d를 구하는 문제에 귀착하지만, 본 논문에서는 함수의 값, 즉 내부 선점과 단점의 시각 τ에 있어서 값을 정하는 문제로 변환한다. 우선 준비단계로서 식(15)의 ξ에 관한 1,2차 미분을 구하고 내부선점 ξ_j (j=1~M, 이후 M을 선점수라 부른다) 및 단점 ξ_0=0, ξ_{M+1}=1에서 값을 계산한다.

$$\left.\begin{aligned} u(\xi_j)_\tau \equiv u(\xi_j,\tau) &= \sum_{i=1}^{M+2} d_{i-1}(\tau)\xi^{i-1} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi_j} &= \sum_{i=1}^{M+2} \left.\frac{\partial \xi^{i-1}}{\partial \xi}\right|_{\xi_j} d_{i-1}(\tau) \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right|_{\xi_j} &= \sum_{i=1}^{M+2} \left.\frac{\partial^2 \xi^{i-1}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi_j} d_{i-1}(\tau) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

여기서 j=0,1, …, M+1, 위식을 행렬 표시하면

$$u_\tau = Qd_\tau, \quad u_\tau^{'} = Cd_\tau, \quad u_\tau^{''} = Dd_\tau \quad (19)$$

가 된다. 여기서 첨자 τ는 시간, 프라임은 ξ에관한 미분을 나타낸다. (M+2)×1차의 백터 d_τ, u_τ, $u_\tau^{'}$ 및 $u_\tau^{''}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d_\tau T = (d_0(\tau), d_1(\tau), \cdots, d_{M+1}(\tau) \quad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} u_\tau T &= (u(\xi_0)_\tau, u(\xi_1)_\tau, \cdots, u(\xi_{M+1})_\tau) \\ u_\tau^{'} T &= (u'(\xi_0)_\tau, u'(\xi_1)_\tau, \cdots, u'(\xi_{M+1})_\tau) \\ u''_\tau T &= (u''(\xi_0)_\tau, u''(\xi_1)_\tau, \cdots, u''(\xi_{M+1})_\tau) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

(M+2)×(M+2)차의 행렬 Q, C, D 의 성분은,

$$Q_{ji} = \xi_{j-1}^{i-1}, \quad C_{ji} = (i-1)\xi_{j-1}^{i-2}, \quad D_{ji} = (i-1)(i-2)\xi_{j-1}^{i-3} \quad (22)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 j,i=1,2, …, M+2.

식(19)에서 d를 제거하면, 시각 τ에서의 ξ에 관한 미분은 시각 τ에서의 내부선점과 단점에 있어서의 함수치와 연결된 다음식으로 주어질 수 있다.

$$u_\tau^{'} = Au_\tau, \quad u_\tau^{''} = Bu_\tau \quad (23)$$

여기서 (M+2)×(M+2)차의 행렬 A 및 B는 다음과 같다.

$$A = CQ^{-1}, \quad B = DQ^{-1} \quad (24)$$

이후, 간편성을 위해 첨자 τ는 생략하며, 식(21)의 백터는 내부선점과 끝점으로 분리되어 다음과 같이 기술할 수 있다. 예를 들면 u에 대해서는 다음 식이 된다.

$$u_c^T = (u(\xi_1), u(\xi_2), \cdots, u(\xi_M)), \quad u_e^T = (u(\xi_0), u(\xi_{M+1})) \quad (25)$$

여기서 첨자 c는 내부선점, 첨자 e는 끝점을 나타낸다.

4. 회전쉘의 공간영역의 이산화

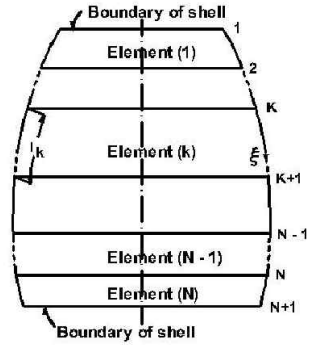

Fig. 2 Division of shell into N elements.

Fig. 2에서 회전쉘을 회전축에 따라 N개의 요소로 분할한다. k번째의 요소를 (k)요소라 하며, 경계조건이 지정되는 점을 1, $N+1$, 분할점을 2,3,…,N이라 한다. 각 요소의 경선 길이를 l_k(k=1~N)으로 나타내고, 요소는 $0 \leq \xi \leq 1$의 영역에서 정의된다.

(k)요소에 주목하면 미지함수 $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ 및 $m_k^{(k)}$ (이하 (k)요소는 편첨자 (k)를 표기)를 식(15)의 형태로 나타낸다.

이 때 시간에 관한 미지계수의 수는 1개의 요소에서는 4(M+2), N개의 요소에서는 4(M+2)N이 된다. 또한 내부선점과 끝점에서 함수의 1,2차 미분값은 식(23)으로 주어진다.. 예를 들면 $w^{(k)}$은,

$$w'^{(k)} = Aw^{(k)}, w''^{(k)} = Bw^{(k)} \tag{26}$$

가 된다. 여기서 행렬 A 및 B는 식(24)로 주어지며, 백터 $w^{(k)}$ 등은 식(21)과 유사한 형으로 나타낼 수 있다.

4(M+2)N 개의 조건은 다음의 (1),(2) 및 (3)에서 주어진다.

4.1 4MN 개의 조건

4MN개의 조건은 기초미분방정식의 내부선점에 서 잔차의 조건을 구함으로서 정해질 수 있다.

(k) 요소에 대해서 생각해 보면 (k) 요소의 미지함수를 식(11)에 대입하면, 잔차 $R_i^{(k)}(\xi,\tau)$ (i=1~4)이고, 식(11)에 대응한다)이 발생하며, 4M 개의 Dirac의 델타함수를 이용하면

$$\int_0^1 R_i^{(k)}(\xi,\tau)\delta(\xi-\xi_j)d\xi = R_i^{(k)}(\xi_j,\tau) = 0 \tag{27}$$

로 표현된다. 여기서 i=1~4, j=1~M.

위식에서 i=1에 대해 식(11)으로 나타내는 미분의 급수에 유의하여, 식(24)의 행렬 A과 B를 이용하면,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M+2}[&a_1^{(k)}(\xi_i)B_{i+1,j} + a_2^{(k)}(\xi_i)A_{i+1,j} + \{a_3^{(k)}(\xi_i)\delta_{i+1,j}\}u^{(k)}(\xi_{j-1}) + \{a_4^{(k)}(\xi_i)A_{i+1,j} + a_5^{(k)}(\xi_i)\delta_{i+1,j}\}v^{(k)}(\xi_{j-1}) \\ &+ \{a_6^{(k)}(\xi_i)A_{i+1,j} + a_7^{(k)}(\xi_i)\delta_{i+1,j}\}w^{(k)}(\xi_{j-1}) + \{a_8^{(k)}(\xi_i)A_{i+1,j} + a_9^{(k)}(\xi_i)\delta_{i+1,j}\}m_x^{(k)}(\xi_{j-1})] \\ &= -p_x^{(k)}(\xi_i) + \ddot{u}^{(k)}(\xi_i)(i = 1 \sim M)\end{aligned} \tag{28}$$

가 된다. 여기서 $\delta_{i+1,j}$ ($i+1=j$ 일 때 1, i+1≠j일 때 0)은 Kronerker의 델타 기호이고, $A_{i+1,j}$ 및 $B_{i+1,j}$는 각각 행렬 A 및 B의 성분을 나타낸다.

마찬가지로 식(27)의 경우에도 식(28)과 유사한 형태로 나타내어 지며, 최종적으로 (k) 요소로부터 얻어지는 4M개의 조건은 시간에 관한 매트릭스 상미분방정식으로

$$a_c^{(k)}\delta_c^{(k)}+a_e^{(k)}\delta_e^{(k)}=p_c^{(k)}+\beta_c^{(k)}\ddot{\delta}_c^{(k)} \tag{29}$$

로 구해질 수 있다. 여기서 첨자 c, e는 각각 내부선점, 끝점에 관한 행렬, 백터를 나타낸다. 백터의 구체적인 내용을 식(25)의 표기법에 따라 나타내면

$$\left.\begin{aligned}
\delta_c^{(k)T}&=(u_c^{(k)T},\, v_c^{(k)T},\, w_c^{(k)T},m_c^{(k)T})_{1\times 4M}\\
\delta_e^{(k)T}&=(u_e^{(k)T},\, v_e^{(k)T},\, w_e^{(k)T},m_e^{(k)T})_{1\times 8}\\
p_c^{(k)T}&=(p_x^{(k)T},\, p_\theta^{(k)T},\, p_z^{(k)T},0)_{1\times 4M}\\
\ddot{\delta}_c^{(k)T}&=(\ddot{u}_c^{(k)T},\, \ddot{v}_c^{(k)T},\, \ddot{w}_c^{(k)T},\ddot{m}_c^{(k)T})_{1\times 4M}
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

가 된다. $a_c^{(k)}$, $a_e^{(k)}$는 행렬 A와 B의 성분으로 구성되며, 4M×4M, 4M×8차의 행렬이다.

$\beta_c^{(k)}$는 4M×4M차의 대각행렬이다.

$$\beta_c^{(k)}=\mathrm{diag}[1,1,\cdots,1,0,0,\cdots,0] \tag{31}$$

4MN 개의 조건은 식(29)를 이용하면

$$\alpha_c\delta_c+\alpha_e\delta_e=-p_x+\beta_c\ddot{\delta}_c \tag{32}$$

와 매트릭스 방정식으로 정리 할 수 있다. 여기서

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_c&=[\alpha_c^{(1)},\, \alpha_c^{(2)},\cdots,\alpha_c^{(N)}]_{4MN\times 4MN}\\
\alpha_e&=[\alpha_e^{(1)},\, \alpha_e^{(2)},\cdots,\alpha_e^{(N)}]_{4MN\times 8N}\\
\beta_c&=[\beta_c^{(1)},\, \beta_c^{(2)},\cdots,\beta_c^{(N)}]_{4MN\times 4MN}\\
\delta_c^{T}&=[\delta_c^{(1)T},\, \delta_c^{(2)T},\cdots,\delta_c^{(N)T}]_{1\times 4MN}\\
\delta_e^{T}&=[\delta_e^{(1)T},\, \delta_e^{(2)T},\cdots,\delta_e^{(N)T}]_{1\times 8N}\\
p_c^{T}&=[p_c^{(1)T},\, p_c^{(2)T},\cdots,p_c^{(N)T}]_{1\times 4MN}\\
\ddot{\delta}_c^{T}&=[\ddot{\delta}_c^{(1)T},\, \ddot{\delta}_c^{(2)T},\cdots,\ddot{\delta}_c^{(N)T}]_{1\times 4MN}
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

이고, 기호 $[X^{(k)}]$(i=1~N)은 행렬 X가 대각행렬로 구성되는 것을 의미한다.

4.2 8개의 조건

요소의 경계점 1 및 (N) 요소의 경계점 N+1에서 각각 4개의 경계조건이 주어진다. 각 점에서 주어지는 조건 1개는 다음과 같다.

$$\text{점}1(\xi=\xi_0)\text{에서}\ M_x^{(1)}=0,\qquad \text{점}N+1(\xi=\xi_{M+1})\text{에서}\ \phi_x^{(N)}=0 \tag{34}$$

위식에서 Fourier 계수는

$$m_x^{(1)}(\xi_0)=0 \tag{35}$$

식(13), (23)에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_{17}^{(N)}(\xi_{M+1})u^{(N)}(\xi_{M+1})+\sum_{j=1}^{M+2}b_{18}^{(N)}(\xi_{M+1})A_{M+2,j}w^{(N)}(\xi_{j-1})=0 \tag{36.a}$$

그 외 조건도 식(36)과 유사한 형태로 나타난다. 또한 경계점에서 성립되는 조건을 내부선점과 끝점으로 분리하여 행렬 표시하면 다음과 같다.

$$r_{c,1}^{(1)}\delta_c^{(1)}+r_{e,1}{}^{(1)}\delta_e^{(1)}=0,\quad r_{c,N+1}{}^{(N)}\delta_c^{(N)}+r_{e,N+1}{}^{(N)}\delta_e^{(N)}=0 \tag{36.b}$$

여기서 $r_{c,1}{}^{(1)}$과 $r_{c,N+1}{}^{(N)}$는 4×4M차의 행렬, $r_{e,1}^{(1)}$과 $r_{e,N+1}^{(N)}$ 은 4×8M차의 행렬이고 밑첨자 $i(j=1,N+1)$은 경계점 i를 나타낸다.

4.3 8(N-1)개의 조건

이 조건은 분할점 $i(j=2\sim N)$에서 성립하는 접속조건이다. 분할점에서 성립 조건은 다음과 같다.

$$\left.\begin{array}{lll} U^{(i-1)}=U^{(i)}, & V^{(i-1)}=V^{(i)}, & W^{(i-1)}=W^{(i)} \\ \phi_x^{(i-1)}=\phi_x^{(i)}, & N_x^{(i-1)}=N_x^{(1)}, & M_x^{(i-1)}=M_x^{(i)} \\ S_{x\theta}^{(i-1)}=S_{x\theta}^{(i)}, & T_x^{(i-1)}=T_x^{(i)} & \end{array}\right\} \tag{37}$$

여기서 i=2~N이고, 첨자 (i-1)는 $\xi=\xi_{M+1}$, 첨자(i)는 $\xi=\xi_0$으로 한다.
식(37)의 조건은 식(35)와 같은 형태로 나타낸다. 한 예로서 식(37)를 나타내면 다음과 같다.

$$\left.\begin{array}{l} u^{(i-1)}(\xi_{M+1})-u^{(i)}(\xi_0)=0 \\ b_{17}^{(i-1)}(\xi_{M+1})u^{(i-1)}(\xi_{M+1})-b_{17}(\xi_0)u^{(i)}(\xi_0)+\sum_{j=1}^{M+2}\{b_{18}^{(i-1)}(\xi_{M+1})A_{M+2,j}w^{(i-1)}(\xi_{j-1})-b_{18}^{(i)}(\xi_0)A_{1,j}w^{(i)}(\xi_{M+1})\}=0 \end{array}\right\} \tag{38}$$

식(37)의 조건을 식(36)과 같이 행렬표시하면

$$r_{c,i}^{(i-1)}\delta_c^{(i-1)}+r_{e,i}^{(i+1)}\delta_e^{(i-1)}+r_{c,i}^{(i)}\delta_c^{(i)}+\{r_{e,i}^{(i)}\}\delta_e^{(i)}=0\ (i=2\sim N) \tag{39}$$

가 된다. 여기서 $r_c^{(\ )}$ 및 $r_e^{(\ )}$는 각각 8×4M차, 8×8M차의 형렬이고, 밑첨자 i는 분할점 i를 의미한다.
이상과 같이 4(M+2)N 개의 방정식을 구할 수 있고, 시각 τ에서 내부선점과 끝점에서의 함수값으로 나타내었다.

4.4 4(M+2)개의 방정식

식(36) 및 식(39)는 하나의 방정식으로 정리할 수 있다.

$$r_c\delta_c+r_e\delta_e=0 \tag{40}$$

여기서 r_c 및 r_e는 각각 8N×4MN차, 8N×8N차의 행렬이고, 다음과 같이 서브매트릭스로 나타낼 수 있다.

$$r_c = \begin{pmatrix} r_{c,1}^{(1)} & & & 0 \\ r_{c,2}^{(1)} & r_{c,2}^{(2)} & & \\ & & & \\ & & r_{c,N}^{(N-1)} & r_{c,N}^{(N)} \\ 0 & & & r_{c,N+1}^{(N)} \end{pmatrix} \tag{41}$$

여기서, r_e는 위식에서 첨자 c를 e로 치환한 것이다.

식(32)와 식(40)을 결합하면 시각 τ에서 매트릭스 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_c & \alpha_e \\ r_c & r_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_c \\ \delta_e \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} p_c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c \\ 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

만약 행렬 r_e가 비특이 이라면 식(42)의 밑의 1/2은 다음과 같이 재정리된다.

$$\delta_e = -r_e^{-1} r_c \delta_c \tag{43}$$

식(43)를 식(42)의 위의 1/2에 대입하면 다음 매트릭스 방정식을 얻을 수 있다.

$$\alpha\beta_c = -p_c + \beta_c \ddot{\delta}_c \tag{44}$$

여기서 4MN×4MN차의 행렬 α는 다음식으로 나타낸다.

$$\alpha = \alpha_c - \alpha_e r_e^{-1} r_c \tag{45}$$

미리 규정된 역학량 (예를 들면 변위, 응력 등)의 값을 백터 f(백터 δ_e의 크기와 일치되기 때문에 8N×1차가 된다)로 나타내면, 식(42)의 우변 제1항의 영 백터가 f에 식(44)의 p_c가 $p_c - \alpha_e r_e^{-1}$이 된다.

이상으로 식(42), (44)의 시간에 관한 방정식을 구할 수 있고, 공간영역에 대한 근사는 완성되었다. 정적문제에서는 식(42), (44)의 시간 미분의 항을 영으로 하면 된다.

5. 수치계산예

지금까지 서술한 해법의 적용가능성을 수치해석예로 보인다. 5.1에서는 공간의 이산화에 대해서 서술하였고, 5.2에서는 5.1의 성과로 공간을 근사화하여 정적응답해석을 실시한다. 또한 수치예에는 기본적인 형상의 원통쉘과 구형쉘을 선택하였다.

5.1 정적문제

(1) 액압을 받는 원통쉘

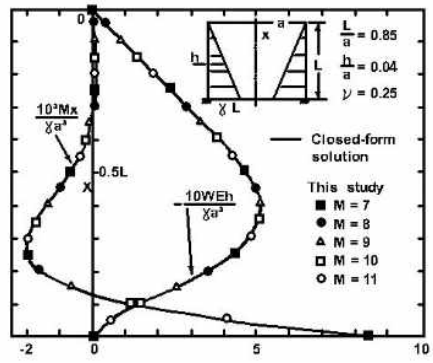

Fig. 3 Normal displacement and meridional bending moment for cylindrical shell under liquid pressure.

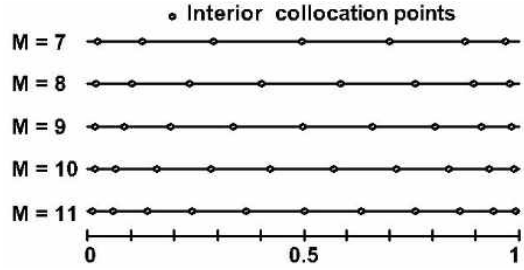

Fig. 4 Location of interior collocation points.

1 요소당 선점수 M을 정하기 위해 Fig. 3에 보이는 액압(축대칭하중, 액수 n=0)를 받는 원통쉘을 요소수 N=1(요소 분할이 되고 있지 않음)에서 해석한다.

Fig. 3은 선점수 M=7,8,9,10,11에 대한 변위 W와 휨모멘트 M_x를 이론치(Timoshenko, S.P 1959)와의 비교 나타낸 것이다.

어느 경우의 선점수에 있어서도 본 계산치는 이론치와 잘 일치하고 있다. 또한 참고를 위해 Fig. 4에 선점의 배치 상황을 나타내었다. 그림과 같이 선점은 끝점에 근접하여 조밀하게 분포되어 있으며, 경계 근처의 응력집중에 대한 정확성을 높이는 역할을 하고 있다고 생각된다.

이후 계산은 모두 선점수 M=11을 사용하도록 한다. 물론 하중상태나 쉘의 형상에 있어서는 이것이 불충분할 경우도 있다고 생각되지만, 문제가 발생할 경우에는 경계분할 수 N를 늘리는 것으로 한다.

(2) 일정한 액압을 받는 구쉘

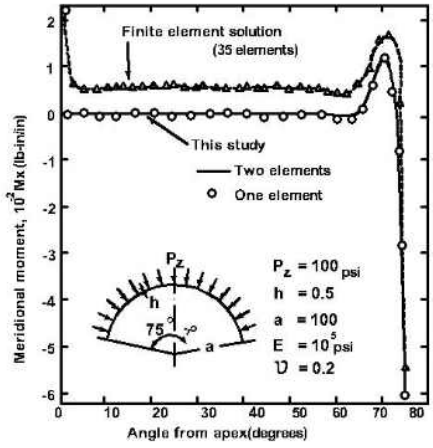

Fig. 5 Meridional bending mement for spherical cap under uniform pressure
(1 in.=2.54cm, 1 psi=6.9kN/m2,1lb · in.=0.113N · m)

본 해법의 변위계수에 대한 미분방정식의 적용성 및 경계 부근의 응력집중에 대한 정확성을 알아보기 위해 Fig. 5에서 축대칭 하중(파수 n=0)을 받는 구형쉘을 해석한다.

본 해법을 구형쉘에 적용할 경우 조건(Greebaum, K. 1984)를 일단에 대한 경계조건으로 하고, $0^0 \leqq \phi \leqq 75^0$($\phi$= 경사각)의 범위로 해석을 한다.

이 수치예의 하중상태 경우에는 고정단 부근을 제외하고는 막응력 상태가 성립되고, 휨 응력이 발생하는 것이 보통이다.

Fig. 5에 요소수 N=1,2(분할수)에 대한 휨모멘트 M_x을 보인다. N=1에서 고정단으로 부터 떨어진 영역에서 파고와 같은 현상이 일어난다는 것과 고정단 부근에서 급격한 변화가 발생된다.

N=2에서는 파고와 같은 현상이 없으며, 거의 막응력 상태가 된다는 것을 알 수 있다. 그림에서 참고를 위해 FEM(원추대 요소)에 의한 결과(Stricklin, J. 1999)도 보이지만, 전체 영역에 대한 휨응력이 발생하고 있다. 곡선요소에 의한 경우에는 상기의 문제점은 개선되었다고 본다(T. Hamanoto 1999).

(3) 풍하중을 받는 원통쉘

(2)에서 알 수 있듯이 해의 정도는 요소분할에 의해 개선되었다. 이 점을 확인하기 위해 풍하중을 받는 캔틸레버 원통쉘을 해석한다.

단, 이론치(Gopalacharyulu, S. 1993) (Donnell 정리)와 비교를 위해 Donnell 이론에 근거한 미분방정식을 이용하여 해석을 실시하였다. 풍하중의 높이 방향은 일정하며, 주방향의 분포 (파수 n=0,1,⋯,6)은 다음식을 이용하였다.

$$F_x = \sigma \sum_{n=0}^{6} p_z^{(n)} \cos n\theta = \sigma(-0.387 + 0.338\cos\theta + 0.533\cos 2\theta + 0.471\cos 3\theta + 0.166\cos 4\theta - 0.066\cos 5\theta - 0.055\cos 6\theta) \quad (46)$$

해석은 Fig. 6에 보이는 요소분할, 1요소(Model No.1 이하 No.1이라 명한다), 2요소(No.2), 3요소(No.3,4) 및 4요소(No. 5)에 대해서 검토한다. 쉘의 제원은 L/a=3, h/a=0.005, ν=0.3으로 한다.

결과(W, N_x, M_x 및 T_x)를 쉘이론 비교에서 Table. 1에 보이는 1요소(No.1)의 결과를 살펴보면 변위 W와 합응력 N_x는 충분한 정도로 구해지지만, 휨모멘트 M_x 및 등가 전단력 T_x는 상당한 오차가 발생하고 있다는 것을 알 수 있다.

그러나 요소분할수 N을 증가시키면 M_x와 T_x는 변위는 수렴성에 의해 고정도의 해를 구할 수 있다. 특히 No. 4(N=3, 경계 부근을 세분할)과 No.5(N=4, 등분할)의 결과는 전체 영역에서 정도가 좋은 해를 구할 수 있다. 이러한 것을 가만하여 이하의 요소분할 및 분할 패턴에서 해의 정도에 미치는 영향을 평균2승잔차(M.S.R)로 검토한다.

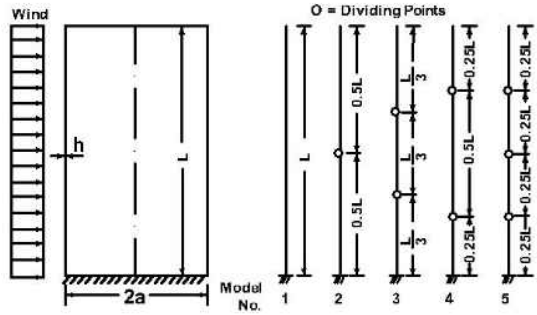

Fig. 6 Cylindrical shell under wind loading and division into elements along meridional coordinate.

Table. 1 Results for cylindrical shell under wind loading by using different types of division

Height above base	Exact	Model No.				
		1	2	3	4	5
(a) Normal displacement. $WEh/\sigma a^2$						
0.00L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.05L	19.845	18.437	20.191	19.859	19.859	19.859
0.10L	33.354	35.285	32.968	33.329	33.354	33.354
0.40L	188.369	187.339	188.502	188.369	188.367	188.369
0.50L	258.999	258.386	259.033	258.999	258.999	258.999
0.70L	413.152	412.263	413.218	413.185	413.175	413.181
0.90L	572.152	571.496	572.232	572.136	572.180	572.153
1.00L	652.576	652.211	652.571	652.579	652.514	652.576
(b) Meridional stress resultant, $N_x/\sigma a$						
0.00L	31.972	31.953	31.974	31.971	31.972	31.972
0.05L	29.079	28.903	29.109	29.085	29.080	28.080
0.10L	26.165	26.236	26.123	26.166	26.163	26.163
0.40L	11.730	11.950	11.689	11.730	11.730	11.730
0.50L	8.143	7.849	8.142	8.143	8.143	8.143
0.70L	2.917	2.932	2.918	2.916	2.917	2.917
0.90L	0.326	0.325	0.325	0.325	0.326	0.326
1.00L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(c) Meridional bending moment, $M_x/\sigma a^2$						
0.00L	-0.0200	-0.0241	-0.0200	-0.0200	-0.0200	-0.0200
0.05L	0.0012	0.0027	0.0017	0.0011	0.0012	0.0012
0.10L	-0.0038	-0.0004	-0.0003	-0.0025	-0.0039	-0.0039
0.40L	0.0007	0.0022	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
0.50L	0.0011	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011
0.70L	0.0021	0.0035	0.0022	0.0021	0.0021	0.0021
0.90L	0.0032	0.0042	0.0031	0.0032	0.0032	0.0032
1.00L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(d) Effective shear force, $T_x/\sigma a^2$						
0.00L	-0.6470	-0.8292	-0.6386	-0.6470	-0.6470	-0.6470
0.05L	0.0335	0.0760	0.0356	0.0370	0.0334	0.0334
0.10L	-0.0040	-0.0132	-0.0076	-0.0044	-0.0038	-0.0038
0.40L	-0.0070	-0.0180	-0.0074	-0.0070	-0.0070	-0.0070
0.50L	-0.0081	-0.0065	-0.0080	-0.0081	-0.0081	-0.0081
0.70L	-0.0091	-0.0082	-0.0099	-0.0082	-0.0091	-0.0091
0.90L	-0.0095	-0.0141	-0.0086	-0.0095	-0.0095	-0.0095
1.00L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

M.S.R은 다음식에서 구해진다.

$$\text{M.S.R} = \left[\sum_{i=1}^{N} l_i \int_0^1 R_i^2(\xi)dx\right]^{1/2} \tag{47}$$

여기서 l_i 및 R_i는 각각 (i) 요소의 경선 길이 및 잔차이다. 해석은 앞에서 서술한 분할 패턴으로 새롭게 No. 6 (N=2, 고정단에서 1:2로 분할)과 No. 7(N=3, 1:1:2로 분할)을 추가하여 식(46)의 $p_x^{(n)}$을 1로 치환하여 파수 n=0,1,…,8에 대해서 실시하였다.

Fig. 7에는 Donnell 이론에 근거한 식(11)의 M.S.R를 보인다. 그림의 종축은 No. 2~7과 No.1의 잔차의 비이다. 그림에서 다음과 같은 것을 알 수 있다. ① 분할수의 증가 및 경계부근의 세분할은 M.S.R를 감소시킨다. ② M.S.R은 파수 n에 의존하고, 일반적으로 n의 증가와 함께 크게 되는 경향이 있다. 또한 7개의 분할방법 중 No.4 것이 적절하다고 생각된다. 이 분할 패턴의 M.S.R은 No.5와 거의 같은 값을 나타내고 있고, 또한 n에 의존하지 않은 것을 알 수 있으며, Table. 1의 결과에도 반영되고 있다.

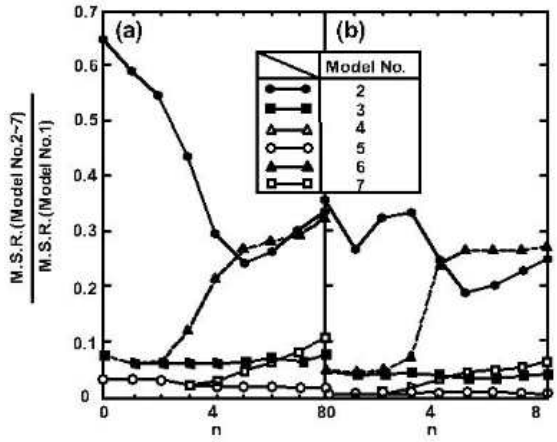

Fig. 7 Mean equare residuals of (a) Eq. 11・a; (b) Eq. 11・c

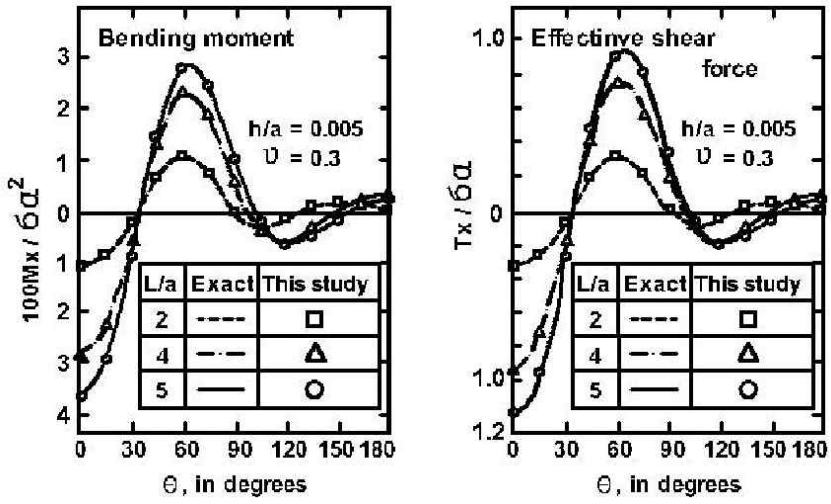

Fig. 8 Meridional bending moment and effective shear force at clamped end.

Fig. 8은 높이와 반경의 비 L/a=2,4,5에 대해서 앞에서 서술한 풍하중(식(46)에 의한 고정단 M_x와 T_x의 주방향 성분을 나타내었다. L/a에 관계없이 이론치와 잘 일치하고 있다. 요소분할 수는 3이다.

본 해석값는 요소분할 수, 요소분할 패턴 및 한요소내의 선점수의 영향을 받지만 평균2승잔차를 공간영역에 대한 이산화의 정도의 판정을 이용하여 잔차가 큰 요소의 세분할 및 한 요소내의 선점수를 증가 등으로 해석하면 본 계산치는 보다 신뢰성이 있다고 할 수 있다.

5.2 동적문제

(1) 충격하중을 받는 구형쉘

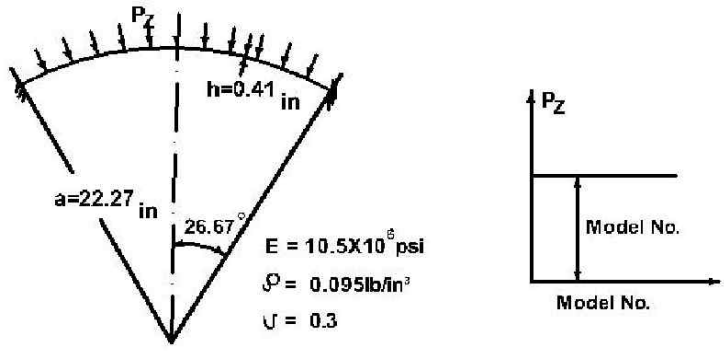

Fig. 9 Spherical cap under pulse loading(1 in.=2.54cm, 1 psi=6.9kN/m2, 1lb/in2=0.272N/m2)

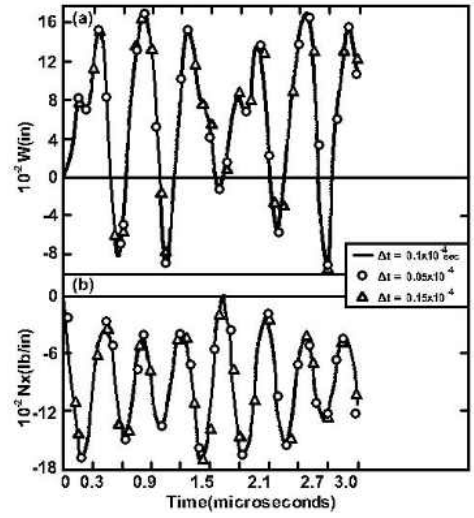

Fig. 10 Dynamic responses of spherical cap; (a) normal displacement at apex(1in=2.54cm); (b) meridional stress resultant at clamped end (1lb/in.=1.752N/cm)

모델은 Klein이 공간에 대한 FEM(42요소의 원추대 요소, 약 130 자유도)를 이용하여 해석하였다. Fig.9에 보이는 충격하중(파수 n=0)을 받는 구형쉘이다. 본 해법은 2요소(등분할, 약 70의 자유도)에서 공간을 근사하고, 수치적분법은 문헌(Klein, S. 1995)과 같고 (Chan, S.P. 1982)에 의해 해석하였다.

Fig. 10은 처짐 W와 고정단의 합응력 N_x의 시간응답을 나타낸다. 시간폭 ΔT는 Klein와 같은 $\Delta T = 0.1 \times 10^{-4} s (= T_0/54, T_0$은 1차 고유주기)와 응답에 미치는 영향을 조사하기 위해 ΔT=0.15×10-4s ($T_0/36$), 0.05 ×10-4s($T_0/108$)로 하였다. 그림과 같이 어느 경우에도 ΔT에 있어서 시간응답에 미치는 변화는 없다. 또한 FEM(Klein, S. 1995)과의 직접적인 비교는 하지 않지만 시간응답은 잘 일치하고 있다.

(2) 충격하중을 받은 원통쉘

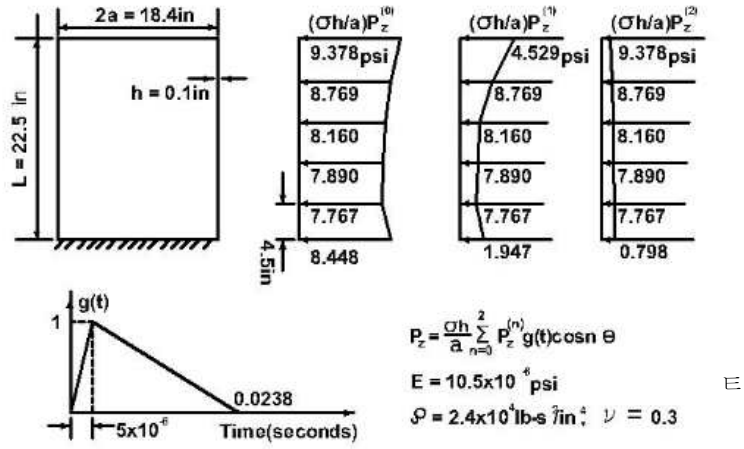

Fig. 11 Cylindrical shell under blast loading (1in=2.54cm, 1psi=6.9kN/m2, 1lb・s/in4=0.107Ns2/cm4)

Fig. 11 해석 모델은 (Johnson, D.E. 1988)의 원통쉘에 대해서 FDM을 적용한 캔틸레버 원통쉘이다. 하중은 주방향으로 n=0.1,2의 분포를 하고, 시간적분 알고리즘은 Johnson과 같은 Houbolt법(Houbolt, J.C. 1990)을 이용하였으며, 시간이력폭은 ΔT=5×10-4s로 하였다.

자유단의 처짐 W와 고정단의 휨모멘트 M_x의 시간이력을 FDM과의 비교로 Fig. 12에 나타내었다. 결과는 어느 경우에도 좋은 일치를 보이고 있으며 본 해법에 있어서도 충분한 시간응답의 추적이 가능하다. 또한 공간의 근사는 본 해법은 3요소분할로 FDM은 휨모멘트의 수렴성으로 차분점수 140으로 하였다.

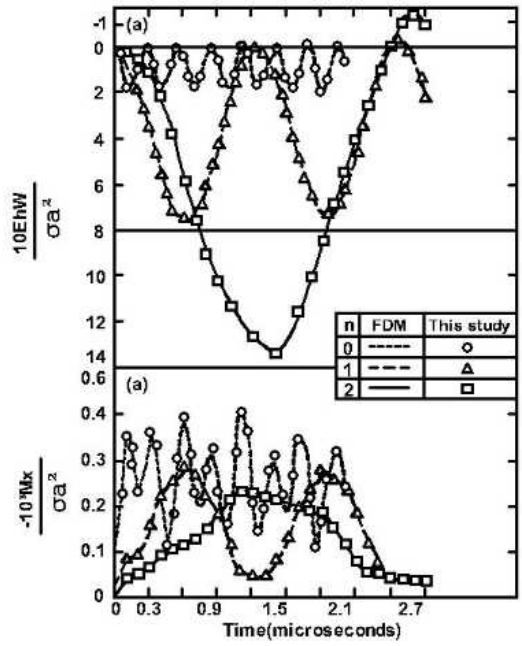

Fig. 12 Dynamic responses of cylindrical shell; (a) nomal displacement at free end (b) meridional bending moment at clamped end.

본 해법의 미지수의 수는 FDM의 비교하면 1/4 정도로 감소하고 있다. 마지막으로 실행시간에 대해서 서술한다. 본 해법의 파수 n=0,1,2에 대한 실행시간은 약 130초이었다. 이 시간은 차분법과 비교하면 1/3 정도로 단축되었다.

(1),(2)의 수치예는 한정된 형상의 쉘, 하중조건 및 경계조건에 대해 이루어졌지만, 해법의 타당성과 유효성은 거의 파악이 되었다고 판단된다.

6. 결론

회전쉘의 정적문제 및 동적응답문제에 대해서 선점법에 의한 공간영역의 이산화에 대한 유효성을 검토하였다. 정식화에 있어서도 이산화 후의 연립방정식 및 시간에 관한 연립상미분방정식의 계수행렬이 체계적으로 배치되었다.

본 해법에 의한 수치결과는 정적문제 뿐만 아니라 동적문제에 대해서도 거의 만족할 수준이며, 본 해법에 대한 타당성도 검증되었다. 공간의 이산화에 대한 근사도의 판정의 목적으로서 평균2승잔차를 해석으로 비교 검토하였으며, 본 해법의 결과는 보다 고정도의 정밀도를 수치예를 통해 확인되었다.

부록 I

계수 a_1~a_{36} 및 b_1~b_{18}은 다음과 같이 된다.

$a_1 = b/s^2,\ a_2 = ra_1,\ a_3 = -b(\nu r_1 r_2 + r^2/s^2 + \nu_4 n^2/2r) - kr_1^2(r^2/s^2 + n^2/\nu_1 r^2)$

$a_4 = n(1/2 + kr_1 r_2)/\nu_1 sr, a_5 = -rn(b\nu_6/2 + kr_1 r_2 \nu_2/\nu_1)/s, a_6 = -b(r_1 + \nu r_2)/s - kr_1(r^2/s^2 + n^2/\nu_1 r^2)/s$

$a_7 = -b\{r_1' + r(r_1 - r_2)\}/s + krn^2 r_1 \nu_2/\nu_1 sr^2,\ a_8 = -r_1/s,\ a_9 = -\nu_4 r r_1/s,\ a_{10} = -a_4$

$a_{11} = -n\{br\nu_6/2 + k(r_1' r_2 + r r_1 r_2 \nu_2/\nu_1\}/sr - kr_1 r_2(r^2/s^2 - r_2^2)/\nu_1$

$a_{15} = -knr_2/\nu_1 rs^2,\ a_{16} = \nu_1 r a_{15},\ a_{17} = bn(\nu r_1 + r_2)/r - knr_2(r_1 r_2/\nu_1 - n^2/r^2)/r$

$a_{18} = -\nu n r_2/r,\ a_{19} = b(r_1 + \nu r_2)/s + kr_1(r^2/s^2 + 2n^2/s\nu_1 r^2)$

$a_{20} = br(r_1 + \nu r_2)/s + kr_1'(r^2/s^3 + 2n^2/s\nu_1 r^2) - krr_1(2r_1 r_2 + r^2/s^2 - n^2/r^2)/s,\ a_{21} = 2a_{15}$

$a_{22} = knr(\nu_3 r_2 - 2r_1)/\nu_1 s^2 r,\ a_{23} = bn(\nu r_1 + r_2)/r + kn^3 r_2/r^3 + kn\{r^2(\nu^3 r_1 - 2\nu_2 r_2)/s^2 - r_1 r_2^2 \nu_3\}\nu_1 r$

$a_{24} = k(r^2/s^2 + 2n^2/\nu_1 r^2)/s^2,\ a_{25} = -kr(2n^2/\nu_1 r^2 + 2r_1 r_2 - r^2/s^2)/s^2$

$a_{26} = -b(r_1^2 + r_2^2 + 2\nu r_1 r_2) - kn^4/r^4 + kn^2(\nu_3 r_1 r_2 + 2r^2 \nu_2/s^2)/\nu_1 r^4$

$a_{27} = 1/s^2,\quad a_{28} = r\nu_5/s^2,\ a_{29} = -\nu n^2/r^2 - \nu_4 r_1 r_2,\quad a_{30} = bkr_1/s,\ a_{31} = bk(r_1' + \nu r r_1)/s$

$a_{32} = bkn\nu r_2/r,\ a_{33} = bk/s^2,\quad a_{34} = r\nu a_{33},\ a_{35} = -bk\nu n^2/r^2,\quad a_{36} = 1$

$b_1 = b/s,\quad b_2 = br\nu/s,\ b_3 = bn\nu/r,\quad b_4 = -b(r_1 + \nu r_2),\ b_5 = -n(1 + 2kr_1 r_2)/2\nu_1 r$

$b_6 = (1 + 2r_2^2)/2\nu_1 s,\quad b_7 = -rb_8,\ b_8 = -knr_2/s\nu_1 r,\quad b_9 = knrr_2/s\nu_1$

$b_{10} = kr_1(r^2/s^2 + 2n^2/\nu_1 r^2),\ b_{11} = -2knr_2/s\nu_1 r,\quad b_{12} = r\nu_3 b_{11}/2$

$b_{13} = k(r^2/s^2 + 2n^2/s\nu_1 r^2),\ b_{14} = -k\nu_3 r n^2/s\nu_1 r^2,\quad b_{15} = 1/s$

$b_{16} = r\nu_4/s,\quad b_{17} = r_1,\quad b_{18} = b_{15}$

여기서

$b = 1/(1-\nu^2),\quad k = (h/a)^2/12,\ \nu_1 = 1 + \nu,\ \nu_2 = 2 + \nu,\ \nu_3 = 3 + \nu,\ \nu_4 = 1 - \nu,\ \nu_5 = 2 - \nu,\ \nu_6 = 3 - \nu$

감사의 글

이 논문은 인천대학교 2013년도 자체연구비 지원에 의하여 수행한 것으로 이에 감사드립니다.

References

Reismann, H. and Modige.J (1998) “Forced motion of cylindrical shell” Proc. of ASCE, Vol. 94, No. EM5, pp.1167~1182

Budiansky, B. and P.P.Radkowski(1983) “Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution” AIAA J. Vol. 1, No. 8

Johnson, D.E. and R. Grief(1988) “Dynamic Respnse of a Cylindrical Shell; Two Numerical Methods” AIAA J, Vol. 4, No.3, pp.486~494

Smith, T, A.(1990) “Explicit High-Order Finite-Difference Anlysis of Rotationally Symmetric Sbells” AIAA J, Vol. 18, No. 3, pp. 309~317

C. DeBoor and B. Swartz(1983) “Collocation at Gaussian points” SIAM J. Number. Anal. 10, pp.582-606

Langhaar, H.L. et al.(1990) “Stability of Hyperboloidal Cooling Tower” Proc. of ASCE, Vol. 96, No. EM5, pp.753~779

Stoneking, J. E. and A. P. Boresi(1995) “A Theory for Free Vibration of Orthotropic Shells of Revolution” Nucl, Engng and Des, Vol. 14, pp.271~285

Langhaar, H.L. and S.C.Chu(1998) “piecewise Polynumials and the Partition Method for Ordinary Differential Equations” Development in Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 8, Pergamon Press, pp. 553~564

Sharma, S.K. and A.P. Boresi(2003) “Finite Element Weighted Residual Methods; Axisymmetric Shells” Proc. of ASCE, Vol. 104, No. EM4, pp. 895~909

Novozhilov, V.V.(1979) “The Theory of Thin Shells” P. Noordhoff

Finlayson, B.A.(1992) “The Method Weighted Residual and Variational Preinciples” Academic Press

Prenter, P. M.(2007) “Splines and Varuational Methods” John Wiley & Son

Abramowitz, M. and I.A. Stegun(Eds.)(1991) “Handbook of Mathematical functions” dover Publications

Timoshenko, S.P. and S Woinowski-Krieger(1959) “Theory of Plates and Shells” 2nd ed., McGraw-Hill

Greebaum, K. : Comments(1984) “Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution”, AIAA J, Vol. 2, No. 3, pp. 590~591

T. Hamanoto and Y. Tanaka(1999) “Dynamics of fixed offshore cylinderical shell structures” Trans. All 291, pp.129~141.

Gopalacharyulu, S. and D.J. Johns(1993) “Cantilever Cylindrical Shells under Assumed Wind Pressures” Proc. of ASCE, Vol. 99, No. EM5, pp.943~956

Klein, S. and R.J. Sylvester(1995) “The Linear Dynamic Analysis of shells of Revolution by the Matrix Displacement Method” Proceedings of the 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDLTR-66-80, Wright Patterson AFB, Ohio, Oct, pp.299~328

Chan, S.P. et al.(1982) “Transient Analysis of Forced Vibrations of Complex Structural-Mechanical Systems” J.R. Aeronaut. Soc., Vol. 66, pp.457~460

Houbolt, J. C.(1990) “A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft” J. Aircraft, J. Aeronaut. Sci., Vol. 17, pp. 540~550

Stricklin, J. A. et al.(1999) “Improvements o the Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method” AIAA J., Vol. 4, No.11, pp. 2069~2072