Journal for History of Mathematics
Vol. 27 No. 4 (Aug. 2014), 271–283
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2014.27.4.271

A study on the analytic geometric characteristics of Archimedes' 《The Method》 and its educational implications.

아르키메데스의 《The Method》의 해석기하학적 특성과 그 교육적 시사점에 대한 연구

Park Sun-Yong 박선용

This study takes a look at Polya's analysis on Archimedes' 《The Method》 from a math-historical perspective. We, based on the elaboration of Polya's analysis, investigate the analytic geometric characteristics of Archimedes' 《The Method》 and discuss the way of using the characteristics in education of school calculus. So this study brings up the educational need of approach of teaching the definite integral by clearly disclosing the transition from length, area, volume etc into the length as an area function under a curve. And this study suggests the approach of teaching both merit and deficiency of the indivisibles method, and the educational necessity of making students realizing that the strength of analytic geometry lies in overcoming deficiency of the indivisibles method by dealing with the relation of variation and rate of change by means of algebraic expression and graph.

Keywords: Archimedes, method, Polya, analytic geometry; 아르키메데스, 방법, 폴리아, 해석기하학.

MSC: 01A20 ZDM: A30

1 서론

폴리아는 아르키메데스의 《The Method》가 수학교육계에서 재조명 받도록 하는 데에 큰 역할을 했다고 할 수 있다[10]. 그는, 아르키메데스의 역학적 '방법'[1)]을 적용해 구의 부피를 구하는 활동이 학생에게는 교사에 대한 경의를 그리고 자신에게는 자긍심을 준다고 고백할

이 연구는 2011년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(NRF-2011-332-B00472)

Park Sun-Yong: Dept. of Math. Edu., The Univ. of Yeungnam E-mail: polya@yu.ac.kr

Received on May 31, 2014, revised on July 7, 2014, accepted on July 16, 2014.

1) 아르키메데스의 《The Method》는 에라토스테네스에게 보내는 편지형식의 논문을 지칭한다. 이에 대해, 역학적 '방법'은 그 논문에서 이용되는 문제해결 접근방식을 의미한다. 즉, 그 '방법'은 어떤 도형의 넓이나 부피를 미지수로 두고, 넓이나 부피를 이미 아는 다른 도형과 지레 위에서의 평형조건을 찾은 다음, 지레의 법칙에 의해 유도되는 방정식을 풀어 그 넓이 혹은 부피를 구하는 방식을 지칭한다[6].

정도로, 물리적 직관을 활용하는 수학교육 및 그 보급에 노력을 기울였다. 물론, 아르키메데스의 《The Method》는 수학사 차원에서는 하이베르그의 1906년 발견과 분실 및 재발견 등을 거치면서 지속적으로 관심을 받아 왔다[1, 5]. 하지만 아르키메데스의 《The Method》의 '방법' 에 대한 교육적 활용과 그 주목은 폴리아가 세계적으로 수학적 발견술의 교육적 부흥을 이끌어냄으로 인해서 이루어졌다고 할 수 있다.

특히 개연적 추측의 교육과 관련해, 폴리아는 학생들이 불가분량으로부터 전체 양으로 전환하는 과정에서 어떤 개연성 있는 추측을 하게 되는데 그 추측과 관련된 아이디어는 가늠할 수 없을 정도의 적용범위를 가진 것이라 주장한다. 그리고 이러한 점이 이미 아르키메데스 본인에 의해서도 언급되었다고 밝히며 다음 아르키메데스의 글을 인용한다 : "이 방법이 수학에 많은 기여를 할 것이라고 나는 확신하다. 내가 이해했던 이 방법이 현재 생존해 있거나 앞으로 태어날 다른 수학자들에 의하여 아직 내가 접하지 못한 다른 이론들의 발견에 유용하게 쓰일 수 있을 것이라고 나는 예견한다[8, p. 274]."

한편, 폴리아가 아르키메데스의 역학적 '방법' 을 교육적으로 접목시키고자 할 때 현대적인 표기법을 사용하는데, 그는 그러한 표기방식이 '방법' 의 아이디어를 왜곡시키지 않으면서 아르키메데스가 발견했던 착상을 암시해준다고 주장한다. 구체적으로, $x^2 + y^2 = 2ax$ 와 같은 원의 방정식으로부터 $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$, $2a(\pi y^2 + \pi x^2) = x\pi(2a)^2$ 과 같은 식을 유추를 통해 유도하는 과정을 거치면서 역학적 '방법' 을 도입하고 구의 부피를 구한다. 그리고 그처럼 해석기하학적으로 '방법' 을 사용하는 것이 우리에게 아르키메데스의 아이디어로 인도해주는 동기를 암시해줄 것이라 말한다[8, p. 270].

이와 관련해, 두 가지 문제가 제기된다. 한 가지는 수학사적 측면에 관한 것인데, 폴리아도 인정하듯이, 그리스 시대의 수학은 좌표기하학의 요소를 담고 있지만 해석기하학의 수준에 이르지는 않았다는 평가가 일반적이라는 점에서 그의 현대적 표기법의 사용이 '방법' 의 아이디어를 왜곡 없이 드러내는 것이냐는 것이 첫 번째 문제이다. 다른 하나는 교육적 문제인데, $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$ 로부터 '원의 넓이' 유추를 통해 $2a(\pi y^2 + \pi x^2) = x\pi(2a)^2$ 으로 변형하도록 하는 활동이 교육적으로 적절한지의 여부에 대한 것이다. 교육적 노력에 따른 학생의 수행 (가능) 여부의 문제를 떠나, 아르키메데스의 '방법' 에 대한 분석과 그에 따른 교수학적 시사점에 기초할 때 그러한 유추적 접근이 '방법' 에 담긴 아이디어를 적절하게 가르치는 방식인지가 의문으로 떠오른다.

이 연구에서는 이러한 두 가지 문제에 주목하였는데, 아르키메데스《The Method》의 '방법' 에 해석기하학적 특성이 들어있는지의 여부 또는 해석기하학적 특성이 반영된 정도에 대한 것이 첫 번째 연구문제이고, 식의 변형을 위해 유추적 접근을 시도하는 것이 아르키메데스의 '방법' 에 담긴 그러한 특성을 교육적으로 적절하게 활용하는 방식인지에 대한 의문이 두 번째 연구문제라 하겠다.

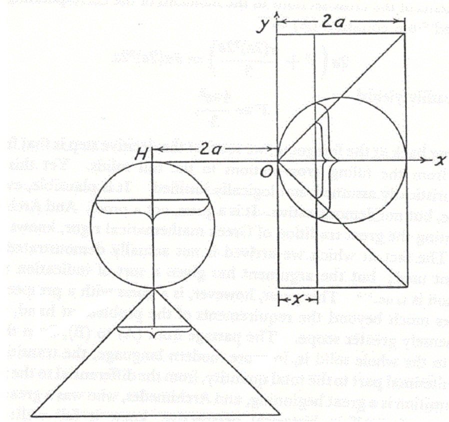

Figure 1. Polya’s Figure; 폴리아의 그림

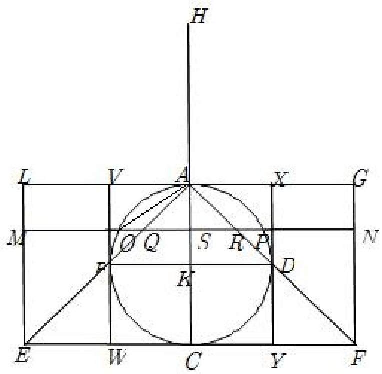

Figure 2. Proposition 2; 명제 2

물론, 이러한 문제를 조명하기 위해선 폴리아가 제시한 아르키메데스의 《The Method》에 대한 분석과 그 원전의 텍스트 사이를 비교하는 작업이 요구된다고 하겠는데, 다음 절부터 이에 대해 다루기로 한다.

2 ‘폴리아의 아르키메데스의 《The Method》에 대한 분석’ 과 그에 대한 논의

폴리아는 아르키메데스의 《The Method》의 ‘방법’ 의 특성을 좌표기하학적인 것에 있다고 보고, 아래와 같이 주장한다; “우리는 그가 사용했던 방법으로 구의 체적을 구하고자 한다. 아르키메데스는 원의 회전체가 구라고 간주했다. 그리고 그는 두 개의 고정된 직교축으로부터 변화하는 거리 사이의 관계에 의하여 특성 지워진 하나의 자취를 원으로 간주했다. 오늘날의 표기법으로 이 관계를 나타내면 $x^2+y^2 = 2ax$ 와 같이 되며, 이것은 반지름이 a 이고, 원점에서 y 축과 만나는 원의 방정식이다[8, p. 270].”

그렇다면, $x^2 + y^2 = 2ax$ 와 같은 관계를 《The Method》의 원전에서는 어떻게 나타내고 있는 것일까? 폴리아가 다룬 구의 부피는 《The Method》의 명제 2에서 다루어지고 있는데, 아르키메데스는 중심이 K 이고 지름이 AC 인 원 ABCD를 가지고서 위의 <Figure 2>를 활용해 그 관계를 다음과 같이 나타낸다; “$\mathrm{MS} = \mathrm{AC}, \mathrm{QS} = \mathrm{AS}$ 이므로, $\mathrm{MS} \cdot \mathrm{SQ} = \mathrm{CA} \cdot \mathrm{AS} = \mathrm{AO}^2 = \mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2$ 이 성립한다[4, p. 19].”

AS, SO, AC를 각각 $x, y, 2a$ 로 놓는다면, 《The Method》의 명제 2의 $\mathrm{CA} \cdot \mathrm{AS} = \mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2$ 표현 (과 그림) 은 $x^2 + y^2 = 2ax$ 을 나타낸다고 할 수 있다. 그렇다면 위의 《The Method》원전의 유도과정은, 아르키메데스가 좌표기하학적 또는 해석기하학적 특성을 활용한 흔적을 보여준다고 할 수 있을까? 사실, 그렇게 판단하기는 어려운 것처럼 보인다. 왜냐하면 피타고라스의 정리와 비례에 관한 성질을 이용하면, <Figure 2> 의 직각삼각형 AOC 의 꼭짓점 O 에서 변 AC 에 수선의 발을 내린 것이 OS 이므로 $\mathrm{CA} \cdot \mathrm{AS} = \mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2$ 을 쉽게 유

도할 수 있기 때문이다. 다시 말해, 점 A를 원점으로 취급하면서 일련의 관계를 유도하는 것보다는 직각삼각형과 관련해 정사각형과 직사각형 넓이 사이의 관계로서 $\mathrm{CA} \cdot \mathrm{AS} = \mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2$을 이끌어내는 것이 보다 자연스럽다고 할 수 있다.

그렇지만 폴리아는 그러한 현대적인 표기법의 사용이 아르키메데스의 아이디어를 왜곡시키지 않는다고 하며 "오히려 반대로, 이 표기법은 암시적인 부분이 있다고 보여진다. 그것은 아르키메데스를 발견으로 인도한 동기들과 아마도 크게 다르지 않고, 오늘날 우리를 아르키메데스의 아이디어로 인도할 수 있는 그러한 동기들을 암시한다[8, p. 270]." 고 주장한다. 그러면서 그는 πy^2이 구의 단면적인 원의 넓이를 나타낸다는 점을 활용해, $x^2 + y^2 = 2ax$로부터 $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$을 이끌어낸 후, 다음과 같이 말한다[8, 271–273].

> 이제 우리는 <Figure 1>에서 보듯이 πx^2은 직선 $y = x$를 x축에 대하여 회전시켜 얻어진 원뿔의 단면적 변수라고 해석할 수 있다. 이것은 남아있는 $\pi 2ax$에 대한 유사한 해석도 찾을 수 있다는 것을 암시한다. 만약 그러한 해석을 깨닫지 못한다면, 우리는 방정식을 조금 다른 형태로 다시 쓰도록 노력해야 하며, 다음과 같은 형태의 식을 찾을 수 있는 기회를 가질 수 있게 된다.
>
> $$2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2 \tag{1}$$
>
> ... (생략) ... V를 구의 부피라 하자. ... (생략) .... 단면들의 모멘트에서부터 대응하는 입체들의 모멘트까지 진행하면, 우리는 방정식 (1)로부터 다음에 이르게 된다.
>
> $$2a\left(V + \frac{\pi(2a)^2 2a}{3}\right) = a\pi(2a)^2 2a \tag{2}$$

여기서 식 (1)을 유도하는 과정과 관련해 중요한 의문이 제기된다. '아이디어 측면에서, 아르키메데스가 구의 단면적 πy^2과 원뿔의 단면적 πx^2에 주목하여 실제로 그러한 단면적과 유사한 해석을 찾는 과정 속에서 $\pi 2ax$를 $x\pi(2a)^2$와 같이 (원기둥의) 단면적이 포함되도록 변형하고 식 (1)과 같은 관계를 유도했겠느냐?' 는 것이다. 폴리아는 '단면(적)' 아이디어를 유추적으로 반영하면서 방정식을 다른 형태로 바꾸려는 노력에 의해 $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$로부터 $2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2$을 유도하는 기회를 가질 수 있다고 하였다. 즉, 그는 그러한 유추적 아이디어가 《The Method》의 '방법' 에 담긴 착상 중 하나이고 이 '방법' 에 대한 교수-학습에 있어서도 유추를 활용하게 하는 교수학적 노력이 이루어져야 한다고 암묵적으로 주장했다고 하겠다.

하지만 이 연구에서는 $x^2 + y^2 = 2ax$와 같은 관계를 찾음에 있어 아르키메데스가 좌표기하학적 또는 해석기하학적 특성을 활용하지는 않았을 것이라 했듯이, $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$로부터 식 (1)과 같은 관계를 이끌어낼 때 유추적 아이디어를 활용하지는 않았을 것이라 예측한다. 오히려, 아르키메데스는 구의 단면적 πy^2이 나타나도록 어떤 원칙에 의해 비례식을 다루었고 그 과정 속에서 자연스럽게 원뿔의 단면적 πx^2와 $(2a)^2$ 또는 $\pi(2a)^2$와 같은 원기둥의 단면을

고려하게 되었을 것으로 본다. 즉, 구의 단면적 πy^2 과 원뿔의 단면적 πx^2 을 먼저 다룬 이후에 원기둥의 단면적 $\pi(2a)^2$ 을 나중에 다룬 것이 아니라, 처음부터 세 단면적을 동시에 다루었다고 할 것이다.

사실, 이 연구에서의 이러한 주장은 아르키메데스가 $x^2 + y^2 = 2ax$ 와 같은 관계로부터 출발하여 식 (1)을 유도한 것이 아니라, 어떤 원칙에 의해 비례식을 다루어 처음부터 식 (1)을 유도했고 그 유도과정에서 $x^2 + y^2 = 2ax$ 와 같은 관계를 이용했을 뿐이라는 것을 뜻한다. 그렇다면, 이 원칙이란 무엇이고 어떤 점에서 이 원칙은 '위에서 폴리아가 제기한 유추'와는 다소 거리가 멀다고 할 수 있는 것일까? 이 연구에서는 바로 이 원칙이 바로 해석기하학적 특성을 가지고 있음을 보이려 하는데, 이를 밝히기 위해 《The Method》의 명제 2에서 $2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2$ 와 같은 관계를 유도하고 구의 부피를 구하는 다음의 과정을 살펴보도록 하자.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{HA} &= \mathrm{AC}\text{이므로,}\\
\mathrm{HA} : \mathrm{AS} &= \mathrm{CA} : \mathrm{AS}\\
&= \mathrm{MS} : \mathrm{SQ}\\
&= \mathrm{MS}^2 : \mathrm{MS} \cdot \mathrm{SQ}\\
&= \mathrm{MS}^2 : (\mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2) \quad \text{(위에 있는 것으로부터)}\\
&= \mathrm{MN}^2 : (\mathrm{OP}^2 + \mathrm{QR}^2)\\
&= \text{(지름이 MN인 원)} : \text{(지름이 OP인 원} + \text{지름이 QR인 원)}\\
\mathrm{HA} : \mathrm{AS} &= \text{(원기둥의 원)} : \text{(구의 원} + \text{원뿔의 원)}
\end{aligned}
$$

> 그러므로 만약 구의 원과 원뿔의 원이 모두 H에 무게중심을 두게 하면, 원기둥의 원이 점 A에 대해 현재의 위치에서 구와 원뿔의 원들과 평형을 이루게 된다.
>
> 평행사변형 LF안에서 (선분) EF와 평행한 선분을 품고 있고 AC에 수직인 평면에 의해 만들어진 세 개의 대응하는 단면들에 대해서도, 유사하게 할 수 있다.
>
> AC에 수직인 평면이 원기둥, 구 그리고 원뿔을 자르고 그 평면에 들어있는 세 개의 원(단면)들이 각 입체를 이루게 될 때, 만약 (위에서와) 같은 방식으로 그 세 개의 원들을 다룬다면, 구와 원뿔이 모두 H에 무게중심을 둘 때 원기둥은 점 A에 대해 그러한 상태에서 구와 원뿔과 평형을 이루게 된다[4, p. 19].

위의 $\mathrm{MS} : \mathrm{SQ} = \mathrm{MS}^2 : \mathrm{MS} \cdot \mathrm{SQ} = \mathrm{MS}^2 : (\mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2)$ 와 같은 비례식의 변형과정에서 알 수 있는 것은, 구와 원뿔의 단면을 먼저 다룬 이후에 원기둥의 단면을 다룬 것이 아니라, 오히려 원기둥의 단면을 다루면서 구와 원뿔의 단면을 다루게 되었다는 점이다. 구체적으로 말해, 비례식의 변형과정에서 원기둥의 단면 MS^2 와 직사각형 $\mathrm{MS} \cdot \mathrm{SQ}(= \mathrm{MS} \cdot \mathrm{AS})$ 이

나타나면서 $\mathrm{MS}\cdot\mathrm{SQ} = \mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2$ 인 관계 $(x^2 + y^2 = 2ax)$ 을 이용하게 되는 것이다. 물론, 이와 같은 방식으로 $x^2 + y^2 = 2ax$ 을 이용한 것과 관련해 $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$ 로부터 $2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2$ 을 이끌어낸 것으로 폴리아처럼 해석할 수도 있다. 하지만 구의 단면적 πy^2 과 원뿔의 단면적 πx^2 을 먼저 다룬 이후에 원기둥 단면적 $\pi(2a)^2$ 을 나중에 다룬 것이 아니라는 것은 분명하다. 적어도, '단면(적)', '원의 넓이' 를 계속적으로 사용하는 방식으로 유추적 아이디어를 사용했다고 볼 수는 없는 것이다.

앞서 제기했듯, 《The Method》의 명제 2에서 보이는 모습은 구의 단면적 πy^2 이 나타나도록 어떤 원칙에 의해 비례식을 다루었고 그 과정 속에서 자연스럽게 원뿔의 단면적 πx^2 와 $(2a)^2$, $\pi(2a)^2$ 와 같은 원기둥의 단면 역시 다룰 수 있었던 것이라 하겠다. 구의 단면적 πy^2 이 나타나게끔, 어떤 원칙에 의해 비례식을 변형하는 과정을 거치면서 구의 단면적 πy^2, 원뿔의 단면적 πx^2, 원기둥 단면적 $\pi(2a)^2$ 을 동시에 다루었던 것이다. 그렇다면, 아르키메데스의 '방법' 을 적용함에 있어 중요한 사항으로 부각되는 것은 유추적 아이디어가 아니라 $\mathrm{MS} : \mathrm{SQ} = \mathrm{MS}^2 : \mathrm{MS}\cdot\mathrm{SQ} = \mathrm{MS}^2 : (\mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2)$ 와 같은 식의 변형과정에 적용되는 원칙이라 할 것이다. 이 원칙은 단순히 $a : b = ac : bc$ 와 같은 규칙일까? 표면적으로는 그렇다. 하지만 여기에야말로 아르키메데스의 '방법' 에서 발견의 동인이라 할만한 '해석기하학적 착상' 이 이미 녹아들어가 있다.

3 아르키메데스 '방법' 의 해석기하학적 특성

폴리아의 아르키메데스의 '방법' 에 대한 분석에 대해 논의하면서, 이 연구에서는 그의 해석에 두 가지 이의를 제기했다. 하나는 $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$ 와 같은 관계 자체를 생각할 때는 좌표기하학 또는 해석기하학 아이디어를 사용하지는 않았을 것이고, 다른 하나는 그 관계로부터 $2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2$ 와 같은 관계를 유도함에 있어 유추적 아이디어를 사용하지는 않았으리라는 것이다. 그에 대한 대안적 해석으로, 이 연구에서는 (비례) 식 자체가 아니라 비례식의 변형과정에서 오히려 '해석기하학의 착상' 의 모습이 보인다고 하였다.

이와 관련해, 이 연구에서는 '동차성의 원리' 에 대한 극복을 해석기하학의 기본적 착상으로 간주하는 입장을 취한다. 이러한 입장은 비교적 보편적인 수학사학계의 관점이라 할 수 있는데, 데카르트를 해석기하학의 효시로 삼는 것 역시 이러한 입장에 따른 것이라 하겠다[1, 2, 3, 9]. 구체적으로, 데카르트는 기하학적 대상을 대수식으로 표현했다기보다는 동차성의 원리를 극복했기 때문에 그러한 평가를 받고 있는데, 그는 '길이는 길이끼리, 넓이는 넓이끼리, 부피는 부피끼리 비교하는 것과 같이, 같은 종류와 차원의 양끼리만 비교할 수 있다.' 는 동차성의 원리를 극복하여 x^2 와 x^3 을 넓이와 부피로 한정해서 해석하지 않고 선분으로도 간주해 기하문제를 선의 길이를 작도하는 문제로 바꾸는 체계적 방법을 제시했다고 하겠다.

한편, 박선용과 홍갑주[7]는 $\mathrm{MS} : \mathrm{SQ} = \mathrm{MS}^2 : \mathrm{MS}\cdot\mathrm{SQ} = \mathrm{MS}^2 : (\mathrm{OS}^2 + \mathrm{SQ}^2)$ 와 같은

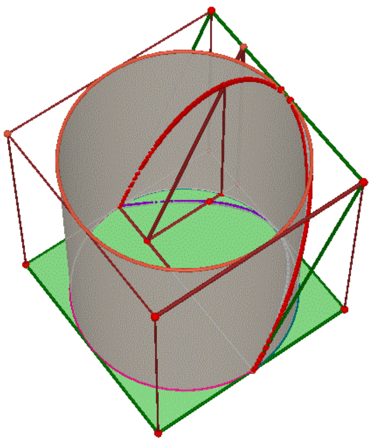

Figure 3. Proposition 13-1; 명제 13-1

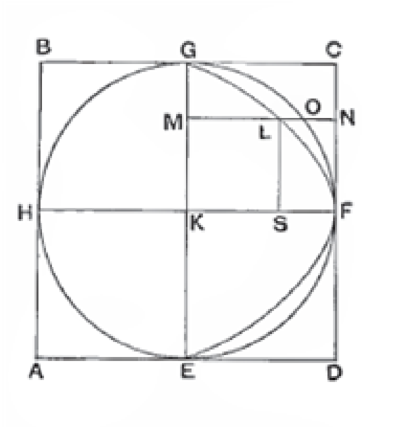

Figure 4. Proposition 13-2; 명제 13-2

《The Method》의 명제 2에서의 변형과정에서 해석기하학적 특성이 보인다고 주장한 바 있다. 하지만 그러한 주장을 뒷받침할만한 근거를 제시하지는 못했다. 그러기에, 이 연구에서는 아르키메데스의 '방법' 의 비례식의 변형과정에 있어 동차성의 원리에 대한 극복이 이루어졌는지를 판단하는 작업이 아르키메데스의 '방법' 의 해석기하학적 특성을 규명하는 데에 있어 매우 중요하다고 하겠다. 그렇다면, 아르키메데스의 '방법' 에 있어 동차성의 원리가 어느 정도 극복되었다고 볼 수 있는 근거는 어디에 있는 것일까?

《The Method》의 명제 13에는 그러한 판단을 할 수 있는 단서가 들어있다. 명제 13은 어떤 원기둥에 대해 그 밑면의 중심과 윗면의 가장자리를 지나는 평면으로 잘라 만든 원통말발굽체의 부피를 구하는 것에 대한 것인데, 명제 13의 내용을 살펴보면 다음과 같다[2) : 정사각형 ABCD를 밑면으로 하는 사각기둥(직육면체)과 원 EFGH를 밑면으로 하는 원기둥의 높이가 서로 같다(<Figure 3, 4>). 반원 EFG의 안쪽에 그 축이 FK인 포물선 EFG가 위치해 있고, FK에 평행한 선분 MN을 그었을 때 그 MN이 포물선 EFG와 반원 EFG와 각각 L, O에서 만나고, L에서 FK에 내린 수선의 발을 S라 하자(<Figure 4>).

이러한 상황에서, 명제 13에서는 "그러면, $MN \cdot NL = NF^2$ 이다. 이것은 분명하다. 그러므로 $MN : NL = GK^2 : LS^2$ 이 성립한다[4, p. 41]." 고 서술하고 있다. 그러면서, 선분 EG에 수직이고 선분 MN을 품은 평면을 통해, <Figure 5>와 <Figure 6>에서와 같이, 말발굽체 EFGZ의 단면인 삼각형 MOW와 삼각기둥 CGRDEQ의 단면인 삼각형 MNY를 다루기 시작하는데, 일부 누락된 부분[3)]이 있은 후, 다음과 같이 기술하고 있다.

2) <Figure 4>는 Heath[4, p. 41]의 것을 활용한 것이며, 나머지 <Figure 3, 5, 6>은 독자의 이해를 돕기 위해 도입한 것이다. 한편, 직접 인용된 부분은 Heath[4]의 원문을 그대로 인용한 것이고, 그 나머지 서술 부분은 명제 13을 축약해서 제시한 것이다.

3) Heath는 맥락상 다음과 같은 부분이 있었을 것으로 예측하였다[4, p. 42]:
"$MN : NL = GK^2 : LS^2 = MN^2 : LS^2$ 이기 때문에,

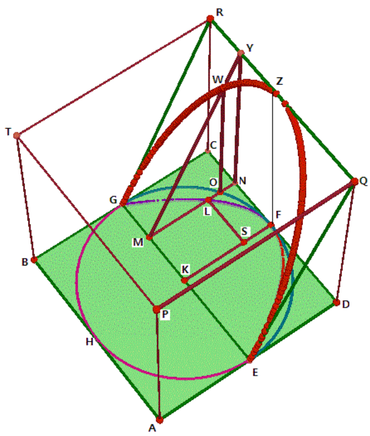

Figure 5. Proposition 13-3; 명제 13-3

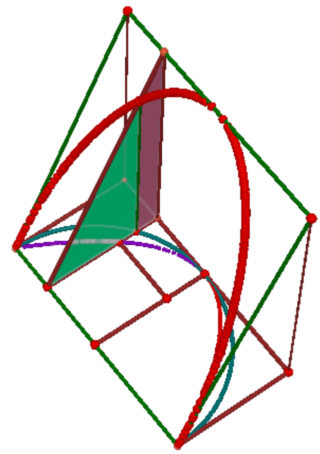

Figure 6. Proposition 13-4; 명제 13-4

그러므로 다음과 같은 결과가 나오게 된다.

(삼각기둥 안의 모든 삼각형들) : (원통말발굽체 안의 모든 삼각형들) =

(사각형 GD안의 모든 선분들) : (포물선과 선분 EG사이의 모든 선분들)

그런데 삼각기둥은 그 안의 삼각형들도 이루어졌고, 평행사변형 GD 안의 선분들이 FK에 평행하고, 포물선과 선분 EG사이의 모든 선분들도 FK에 평행하다;

따라서 (삼각기둥) : (원통말발굽체) = (사각형 GD) : (포물선조각 EFG)이 성립한다.

그런데 사각형 GD = $\frac{3}{2}$(포물선조각 EFG)인 것을 나의 이전 논문에서 증명했다.

그러므로 삼각기둥 = $\frac{3}{2}$(원통말발굽체)가 된다.

...... 따라서 원통말발굽체 = $\frac{1}{6}$(원래의 사각기둥)이 된다[4, p. 42].

여기서 한 가지 놀라운 사실을 알 수 있다. 3차원인 입체도형의 부피를 2차원의 평면도형의 넓이를 가지고 구한다는 것이 바로 그것이다. 원통말발굽체의 부피를 오직 값에만 주목해 포물선조각의 넓이로 환원시키는 작업, 즉 '동차성의 원리' 를 극복하는 모습이 보이는 것이다. 물론, 삼각기둥 안의 삼각형을 사각형 GD안의 선분으로 그리고 원통말발굽체 안의 삼각형을 포물선 조각의 선분으로 대체하는 것 역시도, 2차원인 삼각형의 넓이를 1차원인 선분의 길이로 환원하는 작업에 해당한다. 차원에 관계없이 '값' 또는 '값 사이 비' 에만 주목하여 길이, 넓이, 부피를 함께 다루며 그 사이를 자유롭게 비교하고 있는 것이다.

MN : ML = MN^2 : (MN^2 − LS^2) = MN^2 : (MN^2 − MK^2) = MN^2 : MO^2이 성립한다.
따라서 (삼각기둥에서의 삼각형) : (원통말발굽체에서의 삼각형) = (직사각형DG의 선분) : (포물선조각의 선분) 이 성립한다. 삼각기둥, 원통말발굽체, 직사각형DG, 포물선조각EFG에서의 각각의 요소를 더하도록 한다."

위의 《The Method》지문 이전에는, $\mathrm{MN} : \mathrm{ML} = \mathrm{MN}^2 : \mathrm{MO}^2$ 이 있었을 것으로 보인다. 이것은 위의 지문과의 연속성을 고려할 때 제일 자연스러운 예측이라 할 수 있다. 그런데 여기서 주목해야 할 것은, 그 이후에, 지레의 원리를 사용하여 대응하는 불가분량 사이의 평형과 불가분량의 총합 사이의 평형을 다루는 방식을 취하지 않고, 위의 지문에서 드러나듯이 모든 삼각형들의 합, 모든 선분들의 합 등의 불가분량의 총합을 다루고 그것 사이를 직접 비교하는 방식을 취하고 있다는 점이다.

물론, 명제 13에서 지레의 원리를 사용하지 않는 것은, 명제 11과 12에서 지레의 원리를 적용하는 방식으로 이미 원통말발굽체의 부피를 이미 구했기 때문일 것이다. 다시 말해, 아르키메데스는 명제 13에서 기존의 방식과 다른 '역학적 방법' 을 사용하는 모습을 보여주면서 자신이 가진 생각을 더 자세하게 보여주려고 했던 것이라 할 수 있다.

이러한 특수성과 관련해, 더 주목해야 할 것은 불가분량의 총합 사이를 직접 비교하는 모습일 것이다. 아르키메데스는 a, b, c, d가 서로 동종의 양이든지 아니면 이종의 양이든지에 관계없이, 명제 13 이전에는, '$a : b = c : d$일 때 $\int a : \int b = \int c : \int d$이 된다.' 는 방식의 불가분량법을 사용하지는 않았다. 그는 그러한 불가분량법이 오류를 낳을 수 있다는 것을 충분히 인지하고 있었다고 볼 수 있는 것이다. 이런 점에서, 명제 13에서의 모습은 아르키메데스가 (적어도 암묵적으로) 불가분량의 총합을 직접 비교할 수 있는 상황 또는 조건을 알고 있었음을 시사한다.

명제 13의 $\mathrm{MN} : \mathrm{ML} = \mathrm{MN}^2 : \mathrm{MO}^2$ 와 같은 조건은 '길이 상수 : 길이 변수 = 넓이상수: 넓이 변수' 의 상황이다. '$a : b = c : d$일 때 $\int a : \int b = \int c : \int d$이 된다.' 가 일반적으로 성립하기 위해서는 a와 b(또는 a와 c)가 모두 상수라는 조건이 요구되는데, 명제 13의 $\mathrm{MN} : \mathrm{ML} = \mathrm{MN}^2 : \mathrm{MO}^2$ 와 같은 조건은 이에 해당한다. 이런 점을 고려할 때, 아르키메데스는 MN(선분의 길이)와 MN^2(도형의 넓이)을 값의 관점에서 서로 비교한 후 불가분량의 총합을 구하고 서로 비교하는 작업을 했을 것으로 예측된다. 그는 유연하게 MN^2 을 도형의 넓이로 보기도 하고 상수라는 측면에서 선분의 길이로도 간주할 수 있었던 것이다. 아르키메데스는 $a : b = ac : bc$와 같은 비례식을 다룸에 있어, 때로는 차원이 아닌 값에 주목함으로써 a와 ac, b와 bc사이를 비교할 수 있었던 것이다.

예컨대, 아르키메데스는 $a : b = ac : bc$와 같은 비례식을 다루면서 a가 선분의 길이일 때 ac를 평면도형(또는 그 넓이)으로만 간주하지 않고 ac를 값의 관점에서 마치 선분(또는 그 길이)처럼 간주할 수도 있었던 것이다. 더욱이, 명제 14에서 원통말발굽체와 사각기둥의 관계를 소진법으로 증명하는 과정에서도 명제 13에서처럼 입체도형의 부피를 평면도형의 넓이로 환원하는 모습을 보여준다. 이것은 아르키메데스가 비례식 $a : b = ac : bc$을 다룸에 있어 '동차성의 원리' 를 극복하고 유연하게 사고했음을 여실히 보여주는 것이다.

명제 11, 12와 명제 13, 14의 관계를 고려할 때, 아르키메데스는 다른 명제에서도 해당 조건 하에서는 불가분량의 총합을 직접 비교할 수 있었을 것이다. 명제 2도 이러한 조건에

해당하는데, HA : AS = $\text{MS}^2 : (\text{OS}^2 + \text{SQ}^2)$와 같은 조건에서부터 불가분량의 총합을 구해 직접 비교하면, $4a^2 : 2a^2 =$ (원기둥) : (구 + 원뿔) $= 8\pi a^3$: (구 + $\frac{8}{3}\pi a^3$) 이 유도되어 구의 부피를 구할 수 있게 된다.

이러한 분석 결과를 종합해보면, 명제 2에서 MS : SQ = MS^2 : MS·SQ와 같은 변형과정은 일종의 사고실험 과정이라 할 수 있다. MS : SQ의 양변에 MS를 곱하는 사고실험을 통해 어떤 결과가 나올지를 관찰하는데, MS^2와 MS · SQ을 넓이로 간주하여 수행한 사고실험이 명제 2인 것이다. 물론, MS : SQ의 양변에 SQ를 곱하는 사고실험을 할 수도 있을 것인데, 그러한 사고실험은 명제 8에서 수행된 바 있다. 즉, MS : SQ = MS · SQ : SQ^2와 같은 변형과정을 거치면서, 이 경우는 불가분량의 총합을 직접 비교할 수 있는 조건을 충족하지는 못하므로, 명제 2에서와 같이 MS · SQ와 SQ^2을 넓이로 간주하면서 (반구보다 큰) 구의 일부의 무게중심을 구하게 된다.

4 결론 및 교수학적 시사점

이 연구에서는, 폴리아의 아르키메데스 《The Method》에 대한 분석을 검토하는 것을 시작으로 하여, 아르키메데스 《The Method》의 '방법' 에 해석기하학적 특성이 들어있는지의 여부 또는 해석기하학적 특성이 반영된 정도에 대해 살펴보았다. 이것은 첫 번째 연구문제에 대한 것인데, 이와 관련해, 이 연구에서는 아르키메데스가 $\pi x^2 + \pi y^2 = \pi 2ax$와 같은 관계를 이끌어낼 때는 일반 기하학을 사용했을 것이라는 점과 그러한 관계와 $2a(\pi x^2 + \pi y^2) = x\pi(2a)^2$을 연결시킬 때는 유추적 아이디어가 아니라 오히려 '해석기하학의 초보적 착상' 을 이용했을 것이라는 점에 대해 논의하였다.

한편, 이 연구에서는 아르키메데스의 '방법' 에 담긴 특성을 교육적으로 적절하게 활용하는 방식에 관한 두 번째 연구문제를 제기하였다. 그렇다면, 이 연구에서 드러난 '해석기하학의 초보적 착상' 이란 무엇이고 그러한 착상을 학교수학에 접목시키는 방향은 무엇일까? 물론, '해석기하학의 초보적 착상' 은 동차성의 원리에 대한 극복과 관련이 있다. 아르키메데스는 $a : b = ac : bc$와 같은 비례식을 다룸에 있어 a가 선분(또는 그 길이) 일 때 ac를 평면도형(또는 그 넓이) 으로뿐만 아니라 값의 관점에서 ac를 마치 선분(또는 그 길이) 으로도 간주하였다. 명제 11과 12에서는 ac를 평면도형 (의 넓이) 로 간주하지만 명제 13과 14에서는 그 ac를 선분(의 길이) 처럼 간주하면서 부피(값)을 넓이(값) 으로 그리고 넓이(값)을 길이(값) 으로 환원하는 것을 보여준다.

이런 점에서, 명제 2에서 MS : SQ = MS^2 : MS·SQ = $\text{MS}^2 : (\text{OS}^2 + \text{SQ}^2)$와 같은 변형과정은 일종의 사고실험 과정이라 할 수 있다. 다시 말해, 비례식 MS : SQ = MS^2 : MS · SQ을 구성한 이후 MS^2을 넓이와 길이 중에서 넓이로 선택하면서 MS^2, OS^2, SQ^2을 각각 원기둥, 구, 원뿔의 단면으로 취급하는 사고실험을 수행한 것이다. 아르키메데스 '방법' 의 폭넓은

적용가능성을 뒷받침하는 것이 이러한 선택의 유연성인데, 이 유연성이 '해석기하학적 착상'에 해당한다고 하겠다. 이 연구에서는 《The Method》에서 그 유연성에 의해 불가분량의 총합을 지레의 원리에 의해 간접적으로 비교하는 '방법' 뿐만 아니라 불가분량의 총합을 직접 비교하는 '방법' 도 활용된다는 것을 구체적으로 보여주었다. 그러면 아르키메데스 '방법' 에 담긴 '해석기하학의 초보적 착상' 을 학교수학, 특히 미적분의 교육에 적절하게 활용할 수 있는 방향은 무엇일까? 이 연구의 결과로부터 그 교육적 방향과 관련해 두 가지 시사점을 얻을 수 있다. 우선, 해석기하학의 출발이 넓이, 부피 등을 모두 길이로 간주하는 데에 있었다면 이러한 특징적 모습이 잘 드러나도록 지도하는 것도 한 가지 방향이 될 수 있다.

구체적으로, 학교수학에서 다루는 정적분과 관련해 모든 종류의 양(원시함수, $F(x)$)을 그 양의 종류(길이, 넓이, 부피, 무게 등등)에 관계없이 그것의 변화율(도함수, $f(x)$)을 나타내는 곡선 아래의 넓이(면적함수, $S(x) = \int_a^x f(t)dt$)로 동일한 방식에 의해 나타내고, 넓이(값) 역시 길이(값)으로 간주할 수 있기에, 결국 그 면적함수 $S(x)$도 그래프로 나타내어 길이화할 수 있다는 것을 체계적으로 강조해서 지도할 필요가 있다. 다시 말해, 학생들에게 정적분 계산을 잘 하도록 지도하는 것 못지않게 정적분의 이면에 '모든 종류의 양을 길이화한다.' 는 해석기하학적 아이디어가 녹아있음을 알게 하는 것도 중요하다 하겠다.

첫 번째 제안과 관련해선, <Figure 7> 에서와 같이, 평면도형에 두께 1을 부여하는 전략을 통해 넓이 x^2을 길이 x^2으로 간주하여 정적분을 수행하는 활동이 타당함을 직관적으로 알게

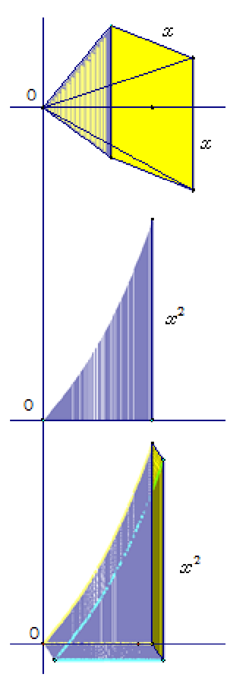

Figure 7. Idea of analytic geometry; 해석기하학 아이디어

하는 것도 도움이 될 것으로 판단된다.

이 연구의 결과로부터 도출되는 두 번째 교육적 시사점은 아르키메데스의 '해석기하학적 착상' 의 유연한 사고와 함께 자리하고 있는 그의 조심성을 교육적으로 이용할 필요가 있다는 점이다. 아르키메데스는 매우 제한된 조건에서 불가분량 사이의 대응에 기초해 불가분량의 총합 사이를 직접 비교하였다. 즉, 그가 불가분량 a, b, c, d에 대해 $a : b = c : d$로부터 $\int a : \int b = \int c : \int d$이 된다고 주장할 때는 a와 b(또는 a와 c)가 모두 어떤 고정된 값을 가진 경우뿐이었다. 물론, 이것은 아르키메데스가 불가분량 사이의 대응에 기초해 불가분량의 총합을 직접 비교하는 것이 자칫 오류에 빠질 수 있다는 점에 유의했음을 보여준다.

한편, 그러한 오류가능성은 양의 변화율을 고려하지 못하는 상황에서 종종 발생한다. 예를 들어, 어떤 원과 그 지름이 두 배인 원에 대해, 같은 중심에서 그은 선분의 비가 $1 : 2$이므로 불가분량의 총합을 직접 비교하는 방식에 의해 넓이의 비도 $1 : 2$가 된다고 판단하는 실수를 할 수 있다. 하지만 대수식을 활용해 시간당 넓이가 변화되는 정도를 비교하면 변화율의 비가 $1 : 4$임이 곧 드러난다.

이러한 사항을 반영한다면, 이 연구의 두 번째 교육적 시사점을 다음과 같이 말할 수 있다: 불가분량법의 장점을 활용해 여러 도형의 넓이나 부피를 구하는 활동을 하더라도, 불가분량법의 선부른 이용이 변화율의 측면을 반영하지 못함으로써 오류에 이를 수 있다는 것을 인식하게 하고, 그러한 불가분량법의 한계에 대한 인식을 바탕으로 변화량, 변화율 및 그 사이의 관계를 대수식과 그래프로 다루면서 불가분량법의 한계를 극복하는 해석기하학의 장점을 경험하도록 한다.

사실, 불가분량과 무한소의 사용과 표준적 해석학을 어떻게 연결시킬 것인가의 문제는 미적분 교수-학습과 관련한 중요한 교육적 난제라 할 수 있다[10]. 이 연구의 두 번째 제안은, 이에 대한 하나의 접근방향을 보여주는 것으로, 변화율을 매개로 하여 불가분량법과 해석기하학의 교육적 연결을 시도하자는 것이라 하겠다.

이 연구에서의 이러한 두 가지 교육적 시사점 및 제안은 학생들로 하여금 미적분 교수-학습에서 해석기하학의 특징을 인식하게 하려는 작은 시도라 할 수 있다. 이런 점에서, 이 연구는 아르키메데스의 《The Method》의 해석기하학적 특성을 드러내고 그 특성을 미적분학 교육에 접목시켰다는 의의를 가진다고 하겠다.

References

1. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, 1991. 양영오, 조윤동 역, 수학의 역사(상), 경문사, 2000.
2. J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Method*, New York, Dover Publications, 1963.
3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer-Verlag, 1979.

4. T. L. HEATH, *The Works of Archimedes with the Method of Archimedes*, New York, Dover Publications, 1912.
5. HONG G. J., *An Educational Study on Archimedes' Mathematics*, Doctoral Dissertation of Seoul National University, 2008. 홍갑주, 아르키메데스 수학의 교육적 연구, 서울대학교 박사학위논문, 2008.
6. PARK S. Y., The New Interpretation of Archimedes' 'Method', *The Korean Journal for History of Mathematics* 23(4) (2010), 47–58. 박선용, 아르키메데스 '방법' 에 대한 새로운 해석, 한국수학사학회지 23(4) (2010), 47–58.
7. PARK S. Y., HONG G. J., An Assumption on How Archimedes Found out the Center of Gravity of Cones in 《The Method》, *Journal for History of Mathematics* 26(5–6) (2013), 371–388. 박선용, 홍갑주, 아르키메데스가 《The Method》에서 원뿔의 무게중심을 구한 방식에 대한 하나의 가설, 한국수학사학회지 26(5–6) (2013), 371–388.
8. G. POLYA, *Induction and Analogy in Mathematics*, New Jersey, Princeton University, 1973. 이만근 외 역, 수학과 개연추론-수학에서의 귀납과 유추, 서울, 경문사, 2003.
9. D. E. SMITH, *History of Mathematics*(Vol. 2), New York, Dover Publications, 1953.
10. WOO J. H., *The Basis of School Mathematics*, Seoul, SNU Press, 2010. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울, 서울대학교 출판문화원, 2010.