*Journal for History of Mathematics*
Vol. 27 No. 4 (Aug. 2014), 285–297
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2014.27.4.285

# On Classical Studies for Summability and Convergence of Double Fourier Series

## 이중 푸리에 급수의 총합가능성과 수렴성에 대한 고전적인 연구들에 관하여

LEE Jung Oh 이정오

G. H. Hardy laid the foundation of classical studies on double Fourier series at the beginning of the 20th century. In this paper we are concerned not only with Fourier series but more generally with trigonometric series. We consider Norlund means and Cesaro summation method for double Fourier Series. In section 2, we investigate the classical results on the summability and the convergence of double Fourier series from G. H. Hardy to P. Sjölin in the mid-20th century. This study concerns with the $L^1(T^2)$-convergence of double Fourier series fundamentally. In conclusion, there are the features of the classical results by comparing and reinterpreting the theorems about double Fourier series mutually.

*Keywords:* double Fourier series, summability of double Fourier series, convergence of Fourier series; 이중 푸리에 급수, 이중 푸리에 급수의 총합가능성, 푸리에 급수의 수렴성.

*MSC:* 42A20, 42A32

## 1 서론

푸리에 급수는 여러 학문분야에 다양하게 활용되는 수학 이론이다. 푸리에 급수는 주기함수나 주기적 신호를 사인과 코사인의 일차결합인 삼각함수 가중치로 분해한 급수이다. 이러한 편리성 때문에 천문학, 전자공학, 음향학, 광학, 진동해석과 데이터 압축, 신호처리, 화상처리 등에 널리 이용된다. 또한, 푸리에 계수는 일반적으로 주어진 함수와 일대일 대응이고 본래 함수보다 다루기 쉽기 때문에 유용하게 쓰인다[10, 11].

일반적으로 푸리에 급수의 $L^p(T^k)$-수렴성 문제는 $L^2(T^k)$의 경우와 $L^1(T^k)$의 경우로 나누어 접근한다. $L^2(T^k)$의 경우는 분해 가능한 힐버트 공간의 성질을 이용하여 수렴성 문제를 용이하게 해결할 수 있다. 그러나 $L^1(T^k)$의 경우 바나흐 공간은 일반적으로 이것

LEE Jung Oh: Dept. of Math., Chosun Univ. E-mail: jolee@chosun.ac.kr
Received on Mar. 24, 2014, revised on Apr. 30, 2014, accepted on July 30, 2014.

의 놈(norm)에 대하여 푸리에 급수의 수렴성을 보장하지 못한다. 따라서 $L^1(T^k)$-수렴성 문제는 좀 더 복잡한 경우이다[12, 13].

이중 푸리에 급수인 경우는 기상학에서의 태풍의 진로 예보, 전기공학에서 출력전압의 고조파 특성분석, 영상학에서의 영상자료 3차원 디지털 필터링 등에 이용된다. 이중 푸리에 급수에 관한 20세기 중반까지 연구는 1906년 하디(G. H. Hardy)[8]를 시작으로 무어(C. N. Moore)[15], 거겐(J. J. Gergen)[4], 마르친키에비츠(J. Marcinkiewicz)와 지그문트(A. Zygmund)[14], 헤리오트(J. G. Herriot)[9], 차우(Y. S. Chaw)[3], 샤르마(P. L. Sharma)[17], 화이트(A. J. White)[23], 와타나베(H. Watanabe)[22], 시저린(P. Sjölin)[19]등 많은 사람들에 의해 진행되어왔다.

본 논문 2절에서는 필요한 정의를 소개하고 3절에서는 이중 푸리에 급수에 관한 고전적 연구의 토대를 마련한 하디[8]부터 1971년 시저린[19]까지 이중 푸리에 급수의 수렴성과 총합 가능성에 관한 고전적인 연구결과들을 순차적으로 살펴본다. 결론으로 4절에서는 고전적인 결과들 중 특징 있는 정리들을 중심으로 재해석한다.

## 2 이중 푸리에 급수에 관한 몇가지 정의

이 절에서는 3, 4절에서 필요한 몇가지 표현과 정의를 소개한다. $L^p(T^k)$-수렴성 문제에서 $k=1$일 때 임의의 함수 $f(t)\in L^p(T^1)$의 단일 푸리에 급수(single Fourier series) $S[f]$는

$$S[f](t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{int}$$

로 주어진다. 여기서 $f$의 푸리에 계수는 $a_n=\int_{T^1}f(t)e^{-int}dt$ 이다. 또한, 일차원 토러스 (torus) $T^1=\{t\in\mathbb{R}^1|-\pi\le t\le\pi\}$ 상에서 $L^p$-공간의 르베그 적분가능한 모든 복소함수의 집합을 $L^p(T^1)$라 하고 놈(norm)은, $f(t)\in L^p(T^1)$에 대하여

$$||f||_{L^p(T^1)}=\Big(\int_{T^1}|f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}=\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

이다. 이때, $f(t)\in L^p(T^1)$, 그리고 $t\in T^1$이다.

한편 $k=2$일 경우는 이중 푸리에 급수(double Fourier series)를 다루게 된다. 즉 2차원 토러스

$$T^2=\{(t,u)\in\mathbb{R}^2|-\pi\le t,u\le\pi\}$$

상에서 $2\pi$의 주기를 가진 복소 함수 $f(t,u)$를 다룬다. $0<p<1$일 때 $L^p$-공간의 르베그 적분가능한 모든 복소함수의 집합을 $L^p(T^2)$라 하자. 그러면 함수 $f(t,u)\in L^p(T^2)$의 이중 푸리에 급수는

$$S[f](t,u)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{mn}e^{i(mt+nu)} \tag{1}$$

로 주어진다. 이때 함수 $f(t,u)$의 이중 푸리에 급수의 계수는

$$a_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{T^2} f(t,u)e^{-i(mt+nu)}dtdu, \quad (m,n\in\mathbb{Z}) \tag{2}$$

이다. 그리고 $L^p(T^2)$에서의 놈(norm)은

$$||f||_{L^p(T^2)} = \Big(\int_{T^2}|f(t,u)|^p dtdu\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t,u)|^p dtdu\Big)^{\frac{1}{p}}$$

로 정의한다. 또한, 푸리에 급수의 부분합을

$$S_{mn}(t,u) = S_{mn}[f](t,u) = \sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n} a_{kl}e^{i(kt+lu)}$$

로 표현한다. 한편, 푸리에 급수의 수렴성을 논하는 부분합의 총합방법(summability or summation method)으로 가장 잘 알려진 대표적인 페예르 평균(Fejer means)은 부분합의 산술평균으로 표현되는데 이 페예르 평균을 일반화한 리스 평균(Riesz means)등이 있다. 기존의 몇가지 단점을 극복하여 수렴성을 확장하는 개념으로, 만약 양항의 수열 $\{p_n\}_{n\geq 0}$이

$$\frac{p_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}\to 0$$

이면, 임의의 수열 $\{s_n\}$에 가중 평균을 주도록 수열 $\{p_n\}$를 사용하여

$$t_n = \frac{p_n s_0 + p_{n-1}s_1+\cdots+p_0 s_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}$$

을 정의하여 $\lim_{n\to\infty} t_n$를 수열 $\{s_n\}$의 노르룬드 평균(Norlund means)이라 한다. 이러한 부분합 평균의 극한을 이용한 무한급수의 수렴성 조사로는 노르룬드 평균 중에 가장 중요한 세자로 총합(Cesaro summability 혹은 Cesaro summation)이 있다. 즉 수열 $\{p_n^\alpha\}$을

$$p_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}$$

로 잡아, 수열 $s=\{s_n\}$의 노르룬드 평균을 구하여 세자로 총합 $C_\alpha(s)$ 또는 $(C,\alpha)$로 표현한다. 또한 세자로 총합은 푸리에 급수 수렴성인 총합 가능성 여부를 따지는 중요한 도구이다. $\alpha=0$일 경우 $(C,0)$는 통상적인 보통의 합과 같고 $\alpha=1$일 경우 $(C,1)$는 세자로 총합이고 일반적으로 만약 $\beta>\alpha$인 경우 $C_\beta$의 합은 $C_\alpha$합보다 더 크다.

## 3 이중 푸리에 급수의 수렴성과 총합에 관한 고전적인 연구들

바나흐 공간인 $L^1$-공간에서 푸리에 급수의 부분합 $S_{mn}(t,u)$가 주어진 본래 함수 $f(t,u)$에 수렴하는 문제

$$||S_{mn}(t,u)-f(t,u)||_{L^1(T^2)} = o(1)$$

와 필요충분조건인

$$a_{mn}\log mn = o(1), \quad m,n\to\infty$$

인 푸리에 계수의 특징을 이용 수렴성 연구를 하는데 이중 푸리에 급수의 수렴은

$$f(t,u) \sim S[f(t,u)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{i(mt+nu)}$$

의 식에서 $f(t,u)$가 어떤 의미로 (2)에 의해 표현($\sim$) 되느냐가 관건이 된다. 따라서 푸리에 급수의 수렴성을 논하는데 총합방법은 중요한 도구 중 하나이다. 이때 직사각형 부분합들은

$$S_{mn}(t,u) = \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} a_{kl} e^{i(kt+lu)} \tag{3}$$

이고 특히 $m = n$ 경우에는 정사각형 부분합이라 한다. 만약 부분합 (3)에 대하여 $\min(m,n) \to \infty$일 때 $S_{mn}(t,u) \to \alpha$이면 $f(t,u)$의 푸리에 급수 $S[f]$는 $(t,u)$에서 $\alpha$로 프링스하임[1)] 의미 (Pringsheim sense)에서 수렴한다고 말한다[12, 13].

이 절에서는 1906년 하디[8] 연구부터 1971년 시저린[19]까지 이중 푸리에 급수의 수렴성에 관한 연구들을 순차적으로 간략하게 살펴본다. 지금까지 많은 사람들에 의해 이중 푸리에 급수의 수렴성에 대한 연구가 활발하게 이루어지고 있다. 그 중에서 고전적인 연구들을 중심으로 살펴본다. 우선 하디[8], 무어[15], 거젠[4], 마르친키에비츠와 지그문트[14] 등의 연구들을 차례로 소개하고자 한다.

영국의 수학자 고드프리 해롤드 하디 (G. H. Hardy, 1877–1947)는 1896년 케임브리지 대학교에 입학, 1903년 석사 학위를 수료하고 케임브리지대 조교수로 임용되어 그의 나이 29세 되던 해인 1906년에 이중 푸리에 급수에 관한 연구결과[8]를 발표한다. 그는 24명의 제자와 2834명[2)]의 후학을 두게 된다. 뒤이어 무어 (C. N. Moore, 1882–1967)는 1908년 하버드대학에서 "수렴 인자와 응용에 관한 이론"을 연구하여 학위를 받고 연구를 계속하여 "이중 급수와 이중 푸리에 급수의 수렴인자에 관하여"[15]를 발표한다. 유한 르베그 적분가능 이변수 함수 $f(t,u)$에 대하여

$$P_{mn}(t,u,t',u') = \cos[(m-1)(t'-t)]\cos[(n-1)(u'-u)]$$

일 때 이중 급수의 총합을

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{E(1/m)+E(1/n)}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t',u') P_{mn}(t,u,t',u') dt' du'$$

으로 표현하고 이중 푸리에 급수의 총합 가능성을 "주어진 정사각 영역구간

$$-\pi \le t \le \pi, \quad -\pi \le u \le \pi \tag{4}$$

에서 만약 함수 $f(t,u)$가 유한 적분가능하면 이중 푸리에 급수 함수 전개식은 구간 (4)의 모든 내부점에서 함수값을 세자로 총합가능이다." 라고 소개한다. 이 정리는 무어가 페예르

1) Alfred Pringsheim(1850–1941) :독일의 수학자, 프링스하임 판정법, 프링스하임 정리로 잘 알려짐.

2) The Mathematics Genealogy Project 자료를 조사 인용함.

(Leopold Fejér)[3)]방법을 응용하여 이중 푸리에 급수의 이변수 함수를 전개하여 얻은 것으로 삼중 푸리에 급수에도 적용될 수 있음을 소개한다. 또한 그는 이 논문의 정리들을 응용하여 수리 물리 문제들을 해결하는 데에 급수들의 수렴인자가 관련되어 있음을 설명한다. 특히 열전도의 수리 물리 문제에 응용됨을 함께 부연한다.

한편 듀크대학에서 무어가 학위를 수여한 제자 중에 우리에게 친숙한 해석학 책 함수해석(Functional Analysis), 수학적 해석의 원리(Principles of Mathematical Analysis), 실복소해석(Real and Complex Analysis) 등의 저자인 월터 루딘(Walter Rudin, 1921–2010)이 있다. 영국의 영(W. H. Young)은 1913년에 "다중 푸리에 급수에 관하여"[4)]라는 50페이지에 달하는 논문을 발표한다. 거겐(J. J. Gergen ; 1903–1967)은 1933년 "이중 푸리에 급수에 대한 수렴기준"[4]과 1937년 "이중 푸리에 급수의 총합 가능성"[5] 등 연속해서 3편의 연구결과를 내놓는다. [4]에서 그는 "주어진 함수가 르베그의 수렴판정과 그린의 일반화된 적분을 만족하면 $\sum_{mn=0}^{\infty} \lambda_{mn} a_{mn}$ 에 대하여

$$\lambda_{00} = \frac{1}{4}, \quad \lambda_{m0} = \lambda_{0n} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{mn\neq 0} = 1 \tag{5}$$

이고

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int\int_Q f(t,u) \cos mt \cos nu \, dtdu,$$

$Q = \{(t,u) | 0 \le t, u \le \pi\}$ 일 때 이중 푸리에 급수의 차수가 $m, n$인 멱급수 부분합

$$S_{mn}(t,u;f) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} a_{ij} = \frac{1}{\pi^2} \int\int_Q f(t,u) \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u} dtdu \tag{6}$$

이 $f(t,u)$로 수렴함"을 보인다. 1933년 거겐은 [4]에서 여러 수렴 판정법을 폭넓게 소개하고 이중 급수에서 여러 수렴 판정법의 논리적 관계성을 논한다.

이어서 1939년 폴란드 출신의 마르친키에비츠(J. Marcinkiewicz)와 안토니 지그문트(A. Zygmund ; 1900–1992)는 공동연구를 통해 그들의 기존 연구 결과들을 확장하여 "이중 푸리에 급수의 총합가능성에 대하여"[14]를 소개한다. 즉 "$f(t,u)$를 변수 $t,u$에 대한 $2\pi$ 주기함수라고 하자. $f(t,u)$가 구간 (4) 위에서 적분가능이면 함수$f(t,u)$의 푸리에 급수는 (1)이고 푸리에 계수는 (2)이다. 또한, 푸리에 급수 (1)의 첫 번째 산술적 평균을

$$\sigma_{mn}(t,u) = \sum_{\mu=-m}^{m} \sum_{\nu=-n}^{n} \left(1 - \frac{|\mu|}{m+1}\right)\left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right) a_{\mu\nu} e^{i(\mu t + \nu u)}$$

로 표현"하고 [14]의 정리1에서 "$2\pi$ 주기함수 $f(t,u)$가 구간 (4) 위에서 적분가능인 $f(t,u) \in L^p,\ p > 1$이고 임의의 고정된 수 $\lambda \ge 1$라 하자. 그러면 $m, n \to \infty$ 이고

$$\frac{m}{n} \le \lambda, \quad \frac{n}{m} \le \lambda$$

3) Leopold Fejér(1880–1959) 헝가리 수학자로 평생을 조화해석과 푸리에 급수 연구에 몰두 수렴성 문제에 중요한 Fejér kernel 과 Fejér's theorem 등을 남김.

4) W. H. Young, On multiple Fourier series, *Proc. London Math. Soc.* s2-11(1) (1913), 133–184.

을 만족할 때

$$\sigma_{mn}(t,u) \to f(t,u)$$

성립함" 을 산술적 평균이 주어진 본래 함수에 수렴함을 보인다. 이 정리는 근본적으로 "거의 모든 점 $(t,u)$ 에 대하여 만약 $\frac{h}{k} \le \lambda, \quad \frac{k}{h} \le \lambda, \quad t \to 0$ 이면

$$\lim_{h,k\to+0} \frac{1}{hk} \int_0^h \int_0^k f(t+x,u+y)dxdy = f(t,u)$$

와 같이 본래 함수에 수렴한다" 는 르베그의 주장과 같은 의미이다.

1940년대에 이중 푸리에 급수에 관한 연구가 더 활발하게 진행되어진다. 1942년 헝가리 출신인 리버스(G. E. Revés)와 사즈(O. Szász ; 1884–1952)는 "이중 삼각계 급수에 관한 몇 가지 정리"[16]를 발표한다. 같은 해에 미국 스탠포드대학교 교수 헤리오트(J. G. Herriot ; 1916–2003)는 "이중 푸리에 급수의 노르룬드 총합가능성"[9]에서 노르룬드평균을 이중 푸리에 급수 (1)에 적용 함수$f(t,u)$가 구간 (4) 위에서 르베그 적분가능하고 $2\pi$ 주기함수 일 때 이중 푸리에 급수 $S[f(t,u)]$의 직사각형 부분합 $S_{mn}(t,u)$은 (3)과 같음을 전제하고 특히, 정사각 부분합 수열 $\{S_{nn}(t,u)\}$의 노르룬드 평균은 임의의 상수 수열 $\{p_n\}$이

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0$$

을 만족할 때

$$N_n(t,u) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, S_{kk}(t,u)$$

로 정의한다. 여기서 만약 $n \to \infty$ 일 때 $N_n(t,u)$이 수렴하면 정사각 부분합 수열 $\{S_{nn}(t,u)\}$은 극한값 $N_p$에 총합가능이라 한다. $n \to \infty$ 일 때 $N_p$에 관한 총합가능 정칙 노르룬드 평균의 조건은

$$\sum_{k=0}^{n} |p_k| = O(|P_n|), \quad \frac{p_n}{P_n} \to 0$$

이다. 그는 주 정리에서 "$N_p$ 을 총합가능성인 이중 노르룬드 평균이라 할 때

$$\sum_{j=1}^{n} j|p_j^k - p_{j-1}^k| \left(\frac{n}{j}\right)^a = O(|P_n^k|), \quad k = 1,2.$$

와

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|P_j^k|}{j} \left(\frac{n}{j}\right)^a = O(|P_n^k|), \quad k = 1,2.$$

인 두 식을 만족하는 상수 $a > 0$가 존재한다고 가정하면 직사각형 부분합 수열 $\sigma_{mn}(t,u)$는 함수 $f(t,u)$에 대한 거의 모든 점에 대하여 $N_p$ 제안된 총합가능" 임을 증명한다. 헤리오트의 결과를 재해석하면 세자로(Cesaro) 총합방법은 정칙 노르룬드 평균중의 하나임을 알 수 있다.

또한 영국의 그린(A. E. Green, 1912–1999)은 그의 스승 테일러로부터 학위를 받고 연구를 진행하여 "이중 푸리에 급수와 경계치 문제들"[7]을 발표한다. 1946년 첼리즈(V. G. Chelidze)는 "이중 푸리에 급수의 절대수렴성에 관하여"[2]를 발표하고 1947년 두 인도 출신

수학자 찬드라세크란(K. Chandrasekharan)과 미낙쉬수드람(S. Minakshisundaram)은 "이중 푸리에 급수에 대한 결과들"[1]이라는 공동 연구 결과를 내놓는다.

1950년대에 들어서, 먼저 1953년 타이완에서 일리노이대학으로 자리를 옮겨 연구를 계속하던 차우(Y. S. Chow)는 1954년 확률론을 연구한 "이중 푸리에 급수의 세자로 총합에 대하여"[3]를 발표한다. 그의 결과를 살펴보면 만약

$$\phi_x(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2s]$$

일때

$$\int_0^t \phi_x(u)du = o\left(\frac{t}{\log\frac{1}{t}}\right) \quad t \to 0$$

이면 $f(t)$의 푸리에 급수는 $t = x$ 에서 $(C, 1)$ 총합가능이고 만약 $0 < \alpha < 1$일 때

$$\int_0^t \phi_x(u)du = o\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\right) \quad t \to 0$$

이면 $f(t)$의 푸리에 급수는 $t = x$ 에서 $(C, \alpha)$ 총합가능임을 증명한 왕(F. T. Wang)의 결과[5)]를 이중 푸리에 급수로 일반화하여 소개한다. 즉 "함수 $f(u, v)$가 구간 (4) 위에서 르베그 적분가능이고 $2\pi$주기 함수이고

$$\begin{aligned}\phi(u,v) = \phi_{x,y}(u,v) =& \frac{1}{4}[f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) \\ &+ f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v) - 4s].\end{aligned}$$

라 하자. 만약 $u \to +0$ 이고 $v \to +0$일 때

$$\Phi(u,v) = \int_0^u ds \int_0^v \phi(s,t)dt = o\left(\frac{uv}{\log\frac{1}{u}} \log\frac{1}{v}\right),$$

$$\int_0^\pi dt \left| \int_0^u \phi(s,t)ds \right| = O\left(\frac{u}{\log\frac{1}{u}}\right),$$

$$\int_0^\pi ds \left| \int_0^v \phi(s,t)dt \right| = O\left(\frac{v}{\log\frac{1}{v}}\right),$$

이면 이중 푸리에 급수 $f(u, v)$는 합 $s$에 대해 $(C, 1, 1)$ 총합가능이다. 1958년 인도 수학자 샤르마(P. L. Sharma)는 1933년 거젠(J. J. Gergen)이 연구한 이중 푸리에 급수에 대한 수렴 기준을 인용한 결과인 "이중 푸리에 급수의 조화 총합가능성에 관하여"[18]를 발표한다. 고셀린(R. P. Gosselin)은 1951년 시카고 대학에서 안토니 지그문트(A. Zygmund)로부터 학위를 받고 코네티컷대학 교수로 재직중인 1958년 "$L^2$ 이중 푸리에 급수의 수렴정리"[6]를 소개한다. 또한 샤르마는 1961년 "이중 푸리에 급수의 조화 총합가능성"[17]을 소개한다.

한편 같은 해 영국 스코틀랜드 애버딘대학교 화이트(A. J. White)는 "이중 푸리에 급수의 제한된 세자로 총합가능성에 관하여"[23]를 소개한다. 즉 $\phi(u, v) \in L^1(0, 0; \pi, \pi)$인 $2\pi$주기를 가진 함수이면

$$\phi(u,v) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos mu \cos nv \tag{7}$$

5) F. T. Wang, A note on Cesaro summability of Fourier series, *Ann. of Math.* 44 (1943), 397–400.
-, A remark on (C) summability of Fourier series, Journ. *London Math. Soc.* 22 (1947), 40–47.

이고 부분합 $S_{mn}$

$$S_{mn}[\phi] = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$$

과 $\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}$ 는

$$A_m^\alpha = \binom{m+\alpha}{m}$$

에 대하여

$$\sigma_{mn}^{\alpha,\beta} = \left(A_m^\alpha A_n^\beta\right)^{-1} \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} A_{m-r}^\alpha A_{n-s}^\beta a_{rs} = \left(A_m^\alpha A_n^\beta\right)^{-1} S_{mn}^{\alpha\beta} \tag{8}$$

이고 $(a,b), (a,b \geq 0)$ 차수에 대한 (7) 의 부분적분은 $u^a v^b \phi_{a,b}(u,v)$ 로 표현된다고 그는 소개한다. 여기서 $(a > 0, b > 0)$ 일 때

$$\phi_{a,b}(u,v) = abu^{-a}v^{-b} \int_0^u \int_0^v (u-x)^{a-1}(v-y)^{b-1}\phi(x,y)dxdy \tag{9}$$

임을 전제하고 주 정리에서 "만약 $a-2 > \alpha \geq 0, \quad b-2 > \beta \geq 0$ 이면 (9) 가 어떤 양수 $\delta$ 에 대하여 $(0,0;\delta,\delta)$ 위에서 유계이고 만약 $(m,n) \to (\infty,\infty)$ 이면 식 $(8) \to s$ 이다. 반면에 $(u,v) \to (+0,+0)$ 일때는 $(9) \to s$ 가 성립함" 을 보인다.

한편 1963년 와타나베 (H. Watanabe) "이중 푸리에 급수의 총합가능성"[22] 을 소개한다. 와타나베는 구간 (4) 위의 르베그 적분가능 함수 $f(t,u)$ 가 푸리에 급수 (1) 과 푸리에 계수 (2) 에 대하여 $(mn)$-번째 부분 합들을 (3) 이라고 전제하고 마루야마 (G. Maruyama) 의 결과[6)] 를 일반화된 정리 즉 "만약 $f(t,u) \in L^1(T^2)$ 이면 다음 두식이 성립한다. 즉 거의 모든 점에서

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t,u) = f(t,u)$$

이고

$$|\{\gamma^*(t,u) > t\}| < \frac{A}{t} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t,u)|dtdu,$$

을 만족한다. 여기서, $p_n = [n^k], \quad 0 < k \leq 1$, 이고

$$\gamma_n(t,u) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} s_{p_m}, p_m(t,u),$$

인데 $\gamma^*(t,u)$ 는 $\gamma^*(t,u) = \sup_n |\gamma_n(t,u)|$ 이다." 를 소개한다. 계속해서, 1967년 러시아의 취취아쉬빌리 (L. V. Zhizhiashvili) 는 "이중 푸리에 급수의 총합에 관하여"[24] 에서 $f(t,u)$ 는 $2\pi$ 주기를 가진 구간 (4) 에서 총합가능한 함수라 전제하고

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(t,u) \tag{10}$$

를 $f(t,u)$ 의 푸리에 급수라 정의한다. 또한 (5) 와

$$\begin{aligned} A_{mn}(t,u) =& a_{mn}\cos mt \cos nu + b_{mn} \sin mt \cos nu \\ &+ c_{mn} \cos mt \sin nu + d_{mn} \sin mt \sin nu \end{aligned}$$

6) G. Maruyama, Summability of Fourier series, *Tohoku Math. Journ.* 47 (1940), 255–260.

를 만족하는 (8) 의 $\sigma_{mn}^{\alpha\beta}$ 은 푸리에 급수 (10) 의 세자로 평균임을 설명한다. 단, $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}$ 그리고 $d_{mn}$ 들은 $f(t,u)$ 의 푸리에 계수이다. 특히 $n \to \infty$ 일 때

$$||\sigma_n^{\alpha}(t,u) - f(t,u)||_{L^p(T^2)} \longrightarrow 0$$

이면 $L^p(T^2)$ 에서 푸리에 급수 (10) 이 세자로 방법 $(C,\alpha), (\alpha > -1, \alpha \neq 0)$ 에 의해 함수 $f(t,u)$ 로 총합 가능이고 $\sigma_n^{\alpha}(t,u)$ 를 (10) 의 $(C,\alpha)$-평균임을 새롭게 정의한다. 그는 주 정리에서 "만약 $f(t,u) \in L^p(T^2), (1 \leq p \leq +\infty)$ 이면

$$||\sigma_n^{\alpha}(t,u) - f(t,u)||_{L^p(T^2)} = O(\phi_n), \quad (n > 5).$$

을 만족함" 을 보이는데 이때

$$\phi_n = \lambda(n,\alpha)\left[w_1\left(\frac{1}{n}\right)_{L^p(T^2)} + w_2\left(\frac{1}{n}\right)_{L^p(T^2)}\right] + w_1\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{L^p(T^2)} + w_2\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{L^p(T^2)}$$

이고

$$\begin{aligned} \lambda(n,\alpha) = & n^{\alpha}\ln n, \quad -1 < \alpha < 0 \\ & 1, \qquad -1 < \alpha < 0 \end{aligned}$$

이다. 이 정리의 중요성은 마르친키에비츠의 증명[7] $\sigma_n^1(t,u) = f(t,u)$ 에 대하여 함수 $f(t,u)$ 와 $\sigma_n^{\alpha}(t,u)$ 에 관하여 구체적으로 일반화한 표현으로 증명한 정리를 소개하고 있다는 점을 들수있어 더욱 주목 받는다. 한편 1970 년 캐나다 앨버타 대학 (University of Alberta) 의 프레드 어스티나 (Fred Ustina) 는 "이중 푸리에 급수의 수렴성"[21] 을 발표한다. 같은 해 테브자아데체 (Tevzadze) 의 "정사각형 가합 함수에서의 이중 푸리에 급수의 수렴성"[20] 을 소개한다. 이어서 퍼 시저린 (Per Sjölin) 은 루진 (Lusin) 의 추측 (conjecture) 의 증명으로 유명한 그의 스승 칼레슨(Lennart Carleson) 으로부터 스웨덴 웁살라 대학에서 1971 년 "푸리에 급수와 푸리에 적분의 총합과 합성변환에 관련된 연산자"[8] 논문으로 학위를 받는다. 이후 그는 스웨덴 왕립 기술연구소에서 해석학 교수로 2007 년 은퇴할 때까지 재직하였는데 1971 년 "이상 적분과 다중 푸리에 급수의 거의 모든 점에서의 수렴성"[19] 을 발표한다. 즉 "만약 $p > 1$ 일 때 $f(t,u) \in L^1(T_2)$ 이면 거의 모든 점에서 $(t,u) \in T_2$ 에 대하여 정의된 (3) 의 직사각형 부분합

$$S_{mn}f(t,u) = o(\log\min(m,n)), \quad m,n \to \infty$$

임" 을 디리클레 커널을 이용 소개한다.

이중 푸리에 급수의 총합가능성과 수렴성에 관한 다양한 연구들은 지금도 계속되고 있다.

## 4 결론 : 이중 푸리에 급수의 고전적인 결과들의 재해석

본 절에서는 이중푸리에 급수의 수렴성과 총합 가능성에 관한 고전적인 결과들 중 특징 있는 정리 몇 개를 중심으로 상호 특징과 관계성을 재해석한다. $L^1$-의미에서 푸리에 급수의 수렴성

7) J. Marcinkiewicz, Sur une Méthode Remarquable de Sommation des Séries Doubles de Fourier, *Anal. della Scuolo Norm. Sup. di Pisa* VIII (1939), 149–160.

8) Operators Connected with Convolution and Summation of Fourier Series and Fourier Integrals.

연구는 적분 가능한 복소함수가 일반적으로 노름에 대하여 수렴성을 보장하지 못한다. 따라서 바나흐 공간인 $L^1$-공간에서 푸리에 급수의 부분합 $S_n(f)$ 이 주어진 본래 함수 $f$ 에 수렴하는 문제와 동치관계인 푸리에 계수의 특징을 이용하여 수렴성을 밝히는 연구가 1913년 영(W. H. Young)[9)]의 연구를 시작으로 진행되어왔다. 이러한 연구들은 일반적으로 2가지 방법으로 접근되는데 공액함수를 이용하는 방법과 $L^1$-수렴족을 이용하는 방법을 들수 있다. 전자는 $L^1$-수렴성 문제의 어려움을 바나흐공간 특성으로 바꾼 것이고 후자는 푸리에 계수족을 특성화하는 것이다. 결국, $L^1$-의미에서 푸리에 급수의 수렴성 문제는 부분합의 총합방법과 푸리에 계수 $a_n$ 의 부가적인 성질들을 찾는 연구로 귀결될 수 있다. 다시 말하면

$$||S_n(f) - f||_{L^1(T)} = o(1)$$

와 필요충분조건

$$a_n \log |n| = o(1), \quad |n| \to \infty$$

을 이용 $L^1$-수렴성 여부를 규명하는 많은 연구가 진행되어 왔다. 푸리에 급수의 수렴성을 논하는 여러 가지 방법이 있다. 총합방법(summability or summation method)에는 대표적으로 잘 알려진 부분합의 산술평균으로 표현되는 페예르 평균(Fejer means)과 페예르 평균을 일반화한 리스평균(Riesz means), 몇가지 단점을 극복 수렴성을 확장한 노르룬드 평균(Norlund means) 그리고 부분합 평균의 극한을 이용 무한급수의 수렴성을 조사하는 방법으로 노르룬드 평균중에 가장 중요한 세자로 총합등이 있다. 본 논문에서는 노르룬드 평균과 세자로 총합등을 중심으로 재해석한다. 이중 푸리에 급수의 수렴 판정기준은 단일 푸리에 급수 수렴 판정기준과 유사하며 수렴 판정기준 연구는 여러사람들에 의해 진행되어 왔는데 그 중 하디, 거젠, 마르친키에비츠와 지그문트, 리들우드(J. E. Littlewood)[10)] 등이 있다.

먼저, 1919년 무어[15]는 '제안된 총합가능성' 의 개념을 소개하였는데 즉 이중 급수 $b_{mn}$ 이 $s$에 제한적으로 수렴한다는 개념은 모든 $\lambda \geq 1$에 대하여

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$$

이면 $b_{mn} \to s$ 이고 기호로 $b_{mn} \to s(R)$로 나타낸다. 또한 $(m, n) \to (-\infty, \infty)$ 일때

$$\sigma_{mn}^{\alpha,\beta} \to s(R)$$

이면 $S[\phi]$는 $s$로의 $(C; \alpha, \beta)(R)$ 총합 가능이라고 말한다. 마르친키에비츠와 지그문트[14]의 정리는 기존 그들의 정리[11)]를 더 일반화하여 얻은 결론이다. 특히, 지그문트[14]의 정리는 "만약 함수 $f(t, u) \log^+ |f(t, u)|$ 가 구간 (4)에서 적분가능이면 거의 모든 점 $(t, u)$에

9) W. H. Young, On the Fourier series of bounded functions, *Proc. London Math. Soc.* 12(3) (1913), 41–70.
10) John Edensor Littlewood (1885–1977) ; 영국의 수학자 하디의 공동연구자로 더 유명.
11) Jessen, B., J. T. Marcinkiewicz, and Antoni Zygmund, Note on the differentiability of multiple integrals, Fundamenta Mathematicae 25(1) (1935), 217–234.

서 $\lim_{m,n\to\infty}\sigma_{mn}f(t,u) = f(t,u)$ 이 성립" 한다는 기존 증명을 이용 만약 $h,k$ 가 $h/k \leq \lambda, k/h \leq \lambda$을 만족하고 $h,k \to 0$ 이면 [5]의 정리에서 식

$$\lim_{h,k\to+0}\frac{1}{hk}\int_0^h\int_0^k f(t+x,u+y)dxdy = f(t,u)$$

을 만족함을 증명한다. 한편, 헤리오트[9]의 주 정리는 마르친키에비츠와 지그문트[14]의 결과를 일반화한 정리로 임의의 점 $(t,u)$에서 연속함수 $f(t,u)$의 정사각 부분합 $S_{nn}f(t,u)$가 함수 $f(t,u)$ 에 대해 $(C,1)$ 총합 가능이고 정사각 부분합 $S_{nn}f(t,u)$가 함수 $f(t,u)$의 거의 모든 점에 대해 $(C,2)$ 총합 가능성을 확장하여 $(C,\alpha),\alpha>0$에서도 총합가능임을 보인 결론이다. 또한, 헤리오트는 [9]에서

$$S_{mn}[\phi] = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}$$

의 총합 $(C;\alpha,\beta)(R) \quad (\alpha \geq 1, \beta \geq 1)$ 은 $\phi(u,v)\to(0,0)$ 여부에 의존되어 있음을 보였고 반면에 마르친키에비츠와 지그문트[14]는 식 (7)에서 급수 $a_{mn}$가 거의 모든 점 $(u,v) \in (0,0;\pi,\pi)$에 대하여 함수 $\phi(u,v)$는 $(C;\alpha,\beta)(R)$에서 (단, $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$) 총합가능임을 보였다. 샤르마[12]는 이중급수 $\{S_{mn}\}$가 만약

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\log m\log n}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{s_{m-l,n-k}}{(l+1)(k+1)}$$

의 극한값이 존재하면 이중급수를 $(H,1,1)$총합 가능이라 정의하고 차우[3]의 결과와 유사한 정리를 소개한다. 그리고 시저린[19]은 $f(t,u)$의 이중 푸리에 급수가 $T^2 = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$ 상의 거의 모든 점에서 수렴성 여부를 고찰하는 중요한 단초를 제공하는 정리를 소개한다. 즉 "급수 $\{a_{mn}\}$가

$$\sum_{m,n,\to-\infty}^{\infty}|a_{mn}|^2\log(\min\{(|m|+2),(|n|+2)\}) < \infty \tag{11}$$

을 만족한다면 이중푸리에 급수 (1)이 수렴하고 극한

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{mn}e^{i(mt+nu)}$$

이 $T^2 = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$상의 거의 모든 점에서 존재함" 을 소개한다. 이 결과로 이후 많은 사람들이 '만약 함수 $f(t,u)$에 부가된 조건들이 조건 (11)을 만족하면 $f(t,u)$의 이중 푸리에 급수가 $T^2 = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$상의 거의 모든 점에서 수렴여부를 보장하는지' 를 알아보는 연구가 활발하게 이어지고 있다.

## References


1. Komaravolu CHANDRASEKHARAN and Subbaramiah MINAKSHISUNDARAM, Some results on double Fourier series, *Duke Math. J.* 4(3) (1947), 731–753.

2. Vladimir G. Chelidze, On the absolute convergence of double Fourier series, *Doklady AN SSSR.* 54(2) (1946), 117–120.
3. Chow Yuan Shih, On the Cesàro summability of double Fourier series, *Tohoku Math. J.* 5(3) (1954), 277–283.
4. John J. Gergen, Convergence criteria for double Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* 35 (1933), 29–63.
5. John J. Gergen, Summability of double Fourier series, *Duke Math. J.* 3 (1937), 133–148.
6. Richard P. Gosselin, A convergence theorem for double $L^2$ Fourier series. *Can. J. Math* 10 (1958), 392–398.
7. Albert E. Green, Double Fourier series and boundary value problems, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 40(3) (1944), 222–228.
8. Godfrey H. Hardy, On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters, *Quart. J. Math.* 37(1) (1906), 53–79.
9. John G. Herriot, Norlund Summability of Double Fourier Series, *Trans. Amer. Math. Soc.* 52(1) (1942), 72–94.
10. Lee Jung Oh, The life of Fourier, the minor Lineage of his younger scholars and a theorem of Telyakovskii on $L^1$-convergence, *The Korean Journal for History of Mathematics* 22(1) (2009), 25–40.
11. Lee Jung Oh, Partial sum of Fourier series, the reinterpret of $L^1$-convergence results using Fourier coefficients and theirs minor lineage, *The Korean Journal for History of Mathematics* 23(1) (2010), 53–66.
12. Lee Jung Oh, A brief study on Stanojevic's works on the $L^1$-convergence, *Journal for History of Mathematics* 26(2–3) (2013), 163–176.
13. Lee Jung Oh, A brief study on Bhatia's research of $L^1$-convergence, *Journal for History of Mathematics* 27(1) (2014), 1–13.
14. Jozef Marcinkiewicz, Antony Zygmund, On the summability of double Fourier series, *Fundamenta Mathematicae* 32(1) (1939), 122–132.
15. Charles N. Moore, On convergence factors in double series and double Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* 14 (1913), 73–104.
16. George E. Revés, Otto Szász, Some theorems on double trigonometric series, *Duke Math. J.* 9 (1942), 693–705.
17. P. L. Sharma, On the harmonic summability of double Fourier series, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 56(1) (1961), 159–175.
18. P. L. Sharma, On harmonic summability of double Fourier series, *Proc. Amer. Math. Soc.* 9 (1958), 979–986.
19. Per Sjölin, Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series, *Arkiv für Matematik* 9(1-2) (1971), 65–90.
20. N. R. Tevzadze, The convergence of the double Fourier series at a square summable function, *Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe* 58 (1970), 277–279.
21. Fred Ustina, Convergence of double Fourier series, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 85(1) (1970), 21–47.

22. Hiroshi Watanabe, Summability of double Fourier series, *Tohoku Math. J.* 17(2) (1965), 150–160.
23. Anthony J. White, On the restricted Cesaro summability of double Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* 99(2) (1961), 308–319.
24. Levan V. Zhizhiashvili, On the summation of double Fourier series, *Siberian Mathematical Journal* 8(3) (1967), 402–414.