

A Brief History of Study on the Bound for Derivative of Rational Curves in CAGD

CAGD에서 유리 곡선의 미분과 그 상한에 관한 연구의 흐름

PARK Yunbeom 박윤범

CAGD(Computer Aided Geometric Design) is a branch of applied mathematics concerned with algorithms for the design of smooth curves and surfaces and for their efficient mathematical representation. The representation is used for the computation of the curves and surfaces, as well as geometrical quantities of importance such as curvatures, intersection curves between two surfaces and offset surfaces. The Bézier curves, B-spline, rational Bézier curves and NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) are basically and widely used in CAGD. The definitions and properties of these curves are presented in this paper. And a brief history of study on the bound for derivative of rational curves in CAGD is also presented.

Keywords: CAGD, Rational curves, Derivative of rational curves; 형상모델링, 유리 곡선, 유리 곡선의 미분.

MSC: 65D17, 68U05 ZDM: A30, G90, R60

1 서론

CAGD(Computer Aided Geometric Design)는 곡선, 곡면, 입체를 컴퓨터를 이용하여 수학적으로 표현하고 구성하는 알고리즘에 대하여 연구하는 응용수학의 한 분야로 형상 모델링(Geometric Modelling)이라고도 한다. CAGD는 산업디자인, 기계설계 등 다양한 산업 분야에서 비행기, 자동차, 선박 등 산업 제품을 설계하고 생산할 때, 산업 기술과 수학적 이론을 연결시켜주는 중요한 도구이다. 제품의 설계와 생산에 CAGD가 적용되면서 제품의 실제 모델에 대한 분석을 보다 적은 비용과 노력으로 컴퓨터에서 수행할 수 있게 되었다.

1950년대 후반에 컴퓨터로 제어할 수 있는 하드웨어를 이용하여 3차원의 입체를 나무나 금속으로 도장 찍듯이 만들 수 있게 되었는데 이를 CAM(Computer Aided Manufac-

이 연구는 2013년도 서원대학교 지원에 의한 결과임.

PARK Yunbeom: Dept. of Math. Edu., Seowon Univ. E-mail: ybpark@seowon.ac.kr

Received on Aug. 21, 2014, revised on Sep. 5, 2014, accepted on Sep. 16, 2014.

turing)이라 한다. 이와 같은 생산 방식의 변화로 곡선, 곡면, 입체를 컴퓨터에서 표현하고 다룰 수 있는 소프트웨어에 대한 요구가 더욱 커지게 되었고 이러한 소프트웨어에서 매개변수를 이용하여 곡선과 곡면을 표현하는 방식이 주로 적용되었다.

매개변수로 표현된 곡선과 곡면을 소프트웨어에 적용하기 위해서 필요한 이론은 수학, 특히 미분기하학에서 충분히 연구되어 있었지만, CAGD에 적용하기에 적절한 형태는 아니었다. 곡선과 곡면에 대한 기존의 연구 결과를 CAGD에 적용 가능한 형태로의 변환, 적용할 때 생기는 문제와 CAGD에서 도출되는 새로운 문제 등에 대한 해결이 CAGD의 연구 분야라 할 수 있다.

CAGD에 이용되는 곡선은 다항식을 근간으로 하는 Bézier 곡선과 구간별로 다항식으로 표현되는 B-spline이다. 또 이들 다항 곡선의 식을 분자와 분모로 하여 나타낸 유리 Bézier 곡선과 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)가 있다. 이 논문에서는 CAGD의 근간이 되는 Bézier 곡선, B-spline, 유리 Bézier 곡선과 NURBS의 매개변수를 사용한 정의와 특성을 알아보고 유리 곡선의 미분과 그 상한 계산의 연구 흐름에 대하여 살펴본다.

2 다항 곡선

2.1 Bézier 곡선

Bézier 곡선은 CAGD의 기초가 되며 널리 이용되는 곡선이다. 이 곡선은 1959년 프랑스의 자동차 회사 Citroen에 근무하던 de Casteljau와 1962년 프랑스의 자동차 회사 Renault에 근무하던 Bézier에 의해서 독립적으로 개발되었다. 개발 시기는 de Casteljau가 앞서지만 Bézier의 결과가 먼저 알려져서 Bézier 곡선이라는 이름으로 불리게 되었다. de Casteljau는 Bernstein 다항식의 성질을 적용하여 Bézier 곡선을 정의하였으나 1970년 Forrest가 Bézier의 성과가 Bernstein 다항식과 관련이 있다는 사실을 밝혀내기 전까지는 de Casteljau의 성과는 알려지지 않았다. Bézier와 de Casteljau는 각각 자신이 근무하던 회사에서 CAD(Computer Aided Design) 시스템을 자동차 설계에 적용하기 위해서 곡선 이론을 개발하였다. Bézier가 근무하던 Renault의 CAD 시스템 UNISURF는 여러 출판물에 의해서 많이 알려지게 되었고, 이 때문에 이 곡선에 Bézier의 이름이 붙게 된 것이다. Bézier 곡선에 관한 이론은 많은 CAD 시스템의 수학적 기초가 되었으며 CAGD에서 곡선에 관한 새로운 방법을 연구할 때 중요한 도구로 이용되고 있다. Farin은 이에 관한 기초적인 이론과 연구 문제를 많은 참고 문헌과 함께 잘 정리하여 제시했다[8].

Bézier 곡선 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ 는 2차원 평면 또는 3차원 공간에서 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k B_k^n(t), \quad (0 \leq t \leq 1)$$

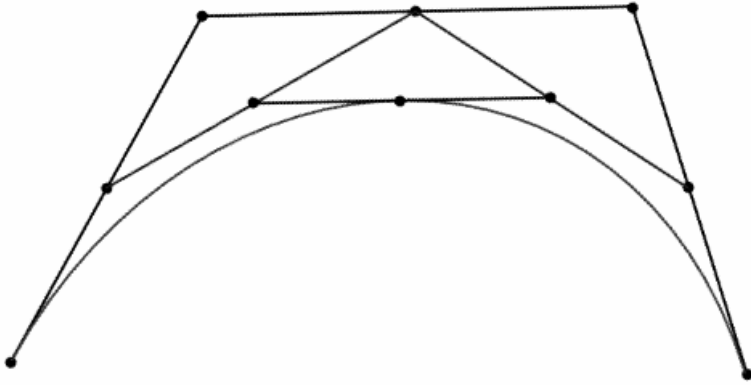


Figure 1. A Bézier curve of degree 3; 3차 Bézier 곡선의 예

$$\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^2 \text{ 또는 } \mathbb{R}^3, \quad B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

점 \mathbf{b}_k 를 곡선의 제어점 (control point) 라 하고 제어점을 차례로 연결한 다각형을 제어 다각형 (control polygon) 이라 부른다.

Bézier 곡선을 정의할 때 이용된 Bernstein 다항식은 다음과 같은 성질을 가지고 있다[8].

- Recursion

n 차 Bernstein 다항식을 $(n - 1)$ 차 Bernstein 다항식의 일차결합의 꼴로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} B_k^n(t) &= (1-t)B_k^{n-1}(t) + tB_{k-1}^{n-1}(t) \\ B_0^0(t) &= 1 \\ B_k^n(t) &= 0, \quad k \notin \{0, 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Bernstein 다항식의 점화식을 이용하면, 주어진 제어 다각형의 각 변의 내분점을 연결하여 얻은 선분을 다시 내분하는 과정을 반복함으로써 Bézier 곡선 위의 점을 구할 수 있다. Figure 1은 이와 같은 과정을 반복하여 구한 3차 Bézier 곡선의 예이다.

- Partition of Unity

각 점에서 Bernstein 다항식의 값은 0보다 크고 총합은 1이다.

$$B_k^n(t) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

위에서 서술한 Bernstein 다항식의 기본 성질과 간단한 계산을 통하여 Bézier 곡선의 다음과 같은 성질을 쉽게 알 수 있다[8].

- Affine Invariance

Bernstein 다항식이 Partition of Unity 성질을 가지고 있기 때문에 Bézier 곡선은 아핀 변환에 대하여 불변이다. 곡선의 각 점을 아핀 변환하여 얻은 곡선과 각 제어 점을 아핀 변환한 후에 얻은 곡선이 같다. 즉 아핀 변환 Φ 에 대하여

$$\Phi\left(\sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k B_k^n(t)\right) = \sum_{k=0}^n \Phi(\mathbf{b}_k) B_k^n(t)$$

이다.

- Convex Hull Property

제어 다각형의 볼록 덮개가 곡선을 포함한다. 따라서 제어 다각형이 평면에 있으면 그에 의해 정의되는 Bézier 곡선도 같은 평면에 있게 된다.

- Endpoint Interpolation

$B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1$ 이고 $k \neq n$ 이거나 $k \neq 0$ 이면 $B_k^n(0) = B_k^n(1) = 0$ 이므로 Bézier 곡선은 제어점 중에서 시작점 \mathbf{b}_0 와 끝점 \mathbf{b}_n 을 반드시 지난다.

- Symmetry

$B_k^n(t) = B_{n-k}^n(1-t)$ 이므로 $\sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k B_k^n(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_{n-k} B_k^n(1-t)$ 이다. 즉, 제어점 첨자의 순서를 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ 에서 $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0$ 와 같이 바꾸어도 같은 곡선을 나타낸다.

2.2 B-spline

spline은 같은 차수의 두 다항식을 경계에서 주어진 미분가능성을 갖도록 이어 붙여 정의한 곡선이라고 할 수 있다. spline이라는 용어는 옛날 제도사들이 사용하던 도구에서 유래했다고 한다. B-spline은 이러한 곡선을 기저를 이용하여 정의한 것으로 Bézier 곡선을 일반화한 것이라고 할 수 있다[6].

1946년 Schoenberg가 통계 자료의 근사에 구간의 간격이 일정한 B-spline을 사용했다고 하며 구간의 간격이 일정하지 않은 경우는 1947년 Curry의 논문에서 볼 수 있다 한다. 1960년대에 미국 자동차 회사 General Motors의 de Boor가 B-spline을 CAGD의 도구로 사용하기 시작했다. 후에 de Boor는 이 곡선을 근사이론에 사용하였으며 B-spline을 점插식으로 정의하는 de Boor 알고리즘을 개발하였다[9].

p 차 B-spline은 감소하지 않는 실수열과

$$U = \{t_0, \dots, t_p, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, t_{m-p}, \dots, t_m\}$$

$$(t_0 = \dots = t_p = a, \quad t_{m-p} = \dots = t_m = b)$$

주어진 제어점 $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^2$ 또는 \mathbb{R}^3 에 대하여

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{d}_k N_k^p(t), \quad a \leq t \leq b$$

와 같이 정의한다. 이 때 사용된 B-spline의 기저 함수 N_k^p 는 아래와 같이 주어진다.

$$N_k^0(t) = \begin{cases} 1, & t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

$$N_k^p(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+p} - t_k} N_k^{p-1}(t) + \frac{t_{k+p+1} - t}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_{k+1}^{p-1}(t)$$

이다. 실수 t_i 를 노트(knot)라 하고 실수열 U 를 노트 벡터라 한다.

B-spline의 기저함수 N_k^p 는 다음과 같은 성질을 가지고 있다[3].

- Local Support Property

구간 (t_k, t_{p+k+1}) 에서 $N_k^p(t) > 0$ 이고 $t \notin [t_k, t_{p+k+1}]$ 이면 $N_k^p(t) = 0$ 이다.

- Partition of Unity

구간 (t_k, t_{k+1}) 의 각 점에서 기저의 총합이 1이다. 즉, $\sum_{i=k-p}^k N_i^p(t) = 1$ 이다.

특히, B-spline의 기저함수 N_k^p 는 노트 벡터 U 가 $(p + 1)$ 개의 0과 $(p + 1)$ 개의 1로 구성되면 p 차 Bernstein 다항식이 된다. 따라서 B-spline을 Bézier 곡선의 확장이라고 볼 수 있다.

$$U = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \} \rightarrow N_k^p(t) = B_k^p(t)$$

B-spline은 Bézier 곡선이 갖는 성질을 포함하여 다음과 같은 특징이 있다[3].

- Affine Invariance

Bézier 곡선의 경우와 같이 B-spline도 기저함수 N_k^p 의 Partition of Unity 성질로부터 아핀 변환에 대하여 불변성을 갖는다. 곡선의 각 점을 아핀 변환하여 얻은 곡선과 각 제어점을 아핀 변환한 후에 얻은 곡선이 같다. 즉 아핀 변환 Φ 에 대하여

$$\Phi \left(\sum \mathbf{d}_k N_k^p(t) \right) = \sum \Phi(\mathbf{d}_k) N_k^p(t)$$

이다.

- Convex Hull Property

제어점을 연결한 다각형의 볼록 덮개 내부에 곡선이 있다.

- Endpoint Interpolation

B-spline은 제어점 중에서 시작점과 끝점을 반드시 지난다.

- Differentiability

노트 t_i 들 사이의 점에서는 무한히 미분가능하며 중복도 m 인 노트 t_i 에서는 적어도 $(p - m)$ 번 미분가능하다.

3 유리 곡선

CAGD를 제품 설계와 생산에 이용하면서 다항 곡선이나 다항 곡면으로 정확하게 표현되지 않는 곡선이나 곡면을 표현해야 하는 문제가 많아지고 다양한 CAGD 소프트웨어가 개발되면서 서로 다른 시스템 사이의 호환성 문제가 많아지게 되었다. 이러한 문제를 해결하고자 유리 곡선을 도입하게 되었다.

CAGD에서 사용하는 유리 곡선은 분수식의 모양으로 분자와 분모가 같은 차수의 Bézier 함수이거나 B-spline 함수이다. 일반적으로 분모의 1차원 함수를 결정하는 계수를 0보다 큰 값으로 가정한다.

\mathbb{R}^n 에서 유리 곡선을 정의할 때, \mathbb{R}^{n+1} 의 다음과 같은 사영사상을 이용한다. \mathbb{R}^2 의 경우를 예를 들어 설명하면 다음과 같다. $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 : w > 0\}$ 이라 하고 3차원 공간 \mathbb{R}_+^3 에서 원점을 지나는 직선 위의 점을 같은 점으로 보고 2차원 사영평면 \mathbb{P}^2 를 정의하고 이를 동차좌표계라고 한다. 3차원 공간 \mathbb{R}_+^3 와 동차좌표계 \mathbb{P}^2 의 관계는 다음과 사상 ψ 로 정의할 수 있다.

$$\psi : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad \psi(x, y, w) = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1 \right)$$

동차좌표계 \mathbb{P}^2 에서 평면 \mathbb{R}^2 로의 자연사영사상 π 를 정의하면

$$\pi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, 1) = (x, y)$$

이다. 이 두 사상의 합성사상 $\Phi = \pi \circ \psi$ 는 3차원 공간 \mathbb{R}_+^3 에서 평면 \mathbb{R}^2 로의 사상이다.

$$\Psi : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Psi(x, y, w) = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w} \right)$$

사상 Ψ 는 일대일 대응이 아니다. 점에 대한 사상 Ψ 의 역상은 직선이고 곡선에 대한 사상 Ψ 의 역상은 단면이 곡선 모양을 갖는 뿔이 된다.

3.1 유리 Bézier 곡선

2절에서 살펴보았듯이 n 차 Bézier 곡선은

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k B_k^n(t), \quad (0 \leq t \leq 1)$$

와 같이 표현된다.

그런데 원, 타원, 쌍곡선과 같은 원추곡선을 Bézier 곡선과 같은 다항 곡선으로 정확하게 표현할 수는 없다. 하지만 원추곡선은

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 \omega_0 B_0^2(t) + \mathbf{b}_1 \omega_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 \omega_2 B_2^2(t)}{\omega_0 B_0^2(t) + \omega_1 B_1^2(t) + \omega_2 B_2^2(t)}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

와 같이 분자와 분모가 2차 Bézier 곡선인 분수식의 모양으로 표현할 수 있다[8]. 여기서 점 b_0, b_1, b_2 는 제어점이고 실수 $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ 는 각 제어점의 가중치이다. 이와 같은 원추곡선을 CAGD에 처음 이용한 것은 1940년대에 Liming이 비행기 설계에 적용한 것이다[8].

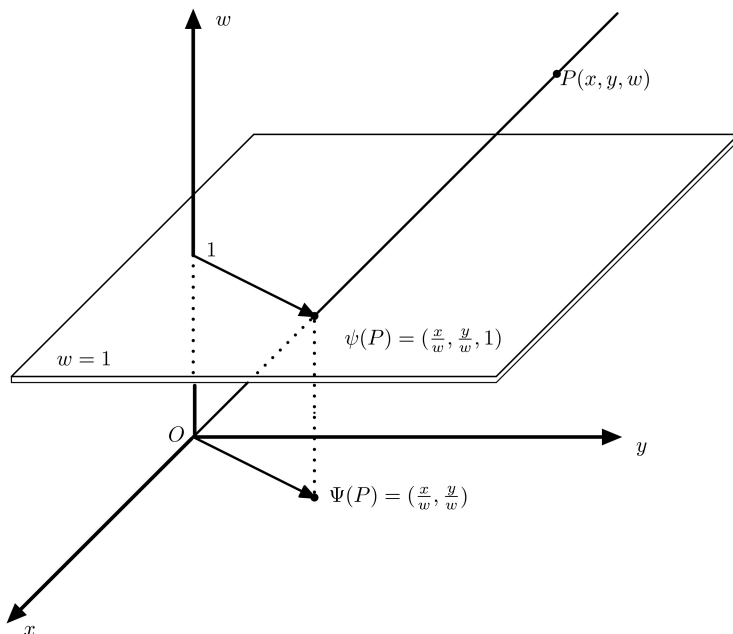


Figure 2. Euclidean model of the projective plane; 사영평면의 3차원 공간 모델

모든 제어점 \mathbf{b}_k 가 3차원 공간 \mathbb{R}_+^3 의 점이면 곡선 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ 도 \mathbb{R}_+^3 에 있고 따라서 $\Psi(\mathbf{b}(t))$ 를 생각할 수 있다. 제어점 \mathbf{b}_k 를 $(\omega_k x_k, \omega_k y_k, \omega_k)$ 이라 하면 평면 \mathbb{R}^2 에서 n 차 유리 Bézier 곡선을 3차원 공간 \mathbb{R}_+^3 에서 정의된 사상 Ψ 의 상으로 정의할 수 있다.

$$\Psi(\mathbf{b}(t)) = \frac{\sum_{k=0}^n \mathbf{r}_k \omega_k B_k^n(t)}{\sum_{k=0}^n \omega_k B_k^n(t)}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$\mathbf{r} = (x_k, y_k)$ 이고 ω_k 는 점 \mathbf{r}_k 의 가중치로 본다.

이와 같은 방법으로 일반적으로 평면 또는 공간에서의 n 차 유리 Bézier 곡선 $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k \omega_k B_k^n(t)}{\sum_{k=0}^n \omega_k B_k^n(t)}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^2$ 또는 \mathbb{R}^3 이고 가중치 ω_k 는 양의 실수이다. 모든 가중치 ω_k 가 같은 값이면 유리 Bézier 곡선은 다항 Bézier 곡선이 된다.

유리 Bézier 곡선의 기저를 다음과 같이 생각해 볼 수 있다. 위의 식에서

$$C_k^n(t) = \frac{\omega_k B_k^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

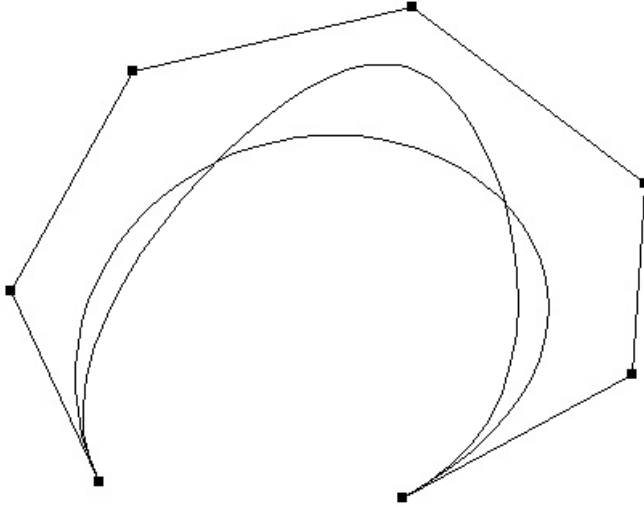


Figure 3. Influence of the weights in a rational Bézier curve; 유리 Bézier 곡선에서 가중치의 영향

이라 하면

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k \omega_k B_k^n(t)}{\sum_{k=0}^n \omega_k B_k^n(t)} = \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k C_k^n(t)$$

로 쓸 수 있다. 이때, 기저함수 C_k^n 는 Bernstein 다항식 B_k^n 이나 B-spline의 기저함수 N_k^p 와 같이 Partition of Unity의 성질을 갖는다[8].

- Partition of Unity

각 점에서 기저함수 C_k^n 의 값은 0보다 크고 총합은 1이다.

$$C_k^n(t) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^n C_k^n(t) = 1, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

기저함수의 이 성질로부터 유리 Bézier 곡선은 아핀 변환에 불변임을 알 수 있다. 또한, Symmetry, Endpoint Interpolation의 성질을 갖고 특히, 모든 가중치 ω_k 가 0보다 크거나 같으면 Convex Hull Property를 갖는다[8].

유리 Bézier 곡선에서 가중치 ω_k 는 곡선의 모양을 결정하는 변수로 작용한다. Figure 3과 같이 제어점 \mathbf{b}_k 에 대응하는 가중치 ω_k 의 값이 증가하면 곡선이 점 \mathbf{b}_k 로 가까이 접근하고 감소하면 멀어진다[8].

Bézier 곡선과 구별되는 유리 Bézier 곡선의 가장 큰 특징은 아핀 변환을 포함하여 사영 변환에 불변인 것이다[8]. 곡선의 각 점을 사영 변환하여 얻은 곡선과 각 제어점을 사영

변환한 후에 얻은 곡선은 같다. 즉 사영 변환 Φ 에 대하여

$$\Phi\left(\sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k C_k^n(t)\right) = \sum_{k=0}^n \Phi(\mathbf{b}_k) C_k^n(t)$$

이다.

3.2 NURBS

B-spline이나 유리 Bézier 곡선은 모두 구간별 다항 유리식으로 나타낼 수 있기 때문에 B-spline을 확장하여 정의한 NURBS는 CAD/CAM 산업의 표준으로 자리 잡았다. 구간별 다항 유리식이란 분자와 분모가 각각 구간별로 다항식인 유리식 즉, (구간별 다항식)/(구간별 다항식)의 꼴로 생긴 분수식을 뜻한다.

B-spline을 정의하는 노트의 간격이 일정한 경우 uniform B-spline이라 하고 그렇지 않은 경우 nonuniform B-spline이라 한다. 그러나 NURBS에서는 위의 두 경우 모두를 나타내므로 NURBS라는 이름에 포함된 nonuniform은 적절한 용어가 아니라고 할 수 있다.

미국의 항공기 제조회사인 Boeing에서는 회사 내의 각 개발 부서에서 곡선과 곡면의 정의식을 다르게 사용하여 생기는 호환성 문제를 해결하기 위해 NURBS를 기본으로 하는 시스템을 개발하기 시작했다. 후에 NURBS는 서로 다른 시스템 간에 기하 데이터를 교환하는 방식인 IGES(Initial Graphics Exchange Standard)의 표준으로 채택되었다[9].

NURBS는 유리 Bézier 곡선의 경우와 유사한 방법으로 정의한다. p 차 NURBS는 감소하지 않는 실수열과

$$U = \{t_0, \dots, t_p, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, t_{m-p}, \dots, t_m\}$$

$$(t_0 = \dots = t_p = a, \quad t_{m-p} = \dots = t_m = b)$$

주어진 제어점 \mathbf{d}_k 와 가중치 ω_k 에 대하여

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum \mathbf{d}_k \omega_k N_k^p(t)}{\sum \omega_k N_k^p(t)}, \quad a \leq t \leq b$$

와 같이 정의한다. 이 식에서 N_k^p 는 B-spline의 기저함수, $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^2$ 또는 \mathbb{R}^3 이고 가중치 ω_k 는 양의 실수이다. 모든 가중치 ω_k 가 같은 값이면 NURBS는 B-spline이 된다.

NURBS의 기저를 다음과 같이 생각해 볼 수 있다. 위의 식에서

$$R_k^p(t) = \frac{\omega_k N_k^p(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_i^p(t)}$$

이라 하면

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum \mathbf{d}_k \omega_k N_k^p(t)}{\sum \omega_i N_i^p(t)} = \sum \mathbf{d}_k R_k^p(t)$$

로 쓸 수 있다. 이때, 유리 기저함수 R_k^p 는 모든 가중치가 서로 같으면 B-spline의 기저함수 N_k^p 와 같고, 모든 가중치가 서로 같으면서 노트 벡터 U 가 $(p+1)$ 개의 0과 $(p+1)$ 개의 1로 구성되어 있으면 p 차 Bernstein 다항식이 된다.

$$R_k^p(t) = \begin{cases} N_k^p(t), & \omega_k = \omega \text{ for all } k \\ B_k^p(t), & \omega_k = \omega \text{ for all } k, \quad U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\} \end{cases}$$

유리 기저함수 R_k^p 도 위에서 살펴본 다른 기저함수와 마찬가지로 Partition of Unity 성질을 갖는다[6].

- Partition of Unity

각 점에서 기저함수 R_k^p 의 값은 0보다 크고 총합은 1이다.

$$R_k^p(t) \geq 0, \quad \sum R_k^p(t) = 1, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

- Local Support Property

구간 (t_k, t_{p+k+1}) 에서 $R_k^p > 0$ 이고 $t \notin [t_k, t_{p+k+1}]$ 이면 $R_k^p(t) = 0$ 이다.

B-spline의 기저함수 N_k^p 가 Bernstein 다항식의 확장이고 유리 기저함수 R_k^p 가 B-spline의 기저함수 N_k^p 와 유리 Bézier 곡선의 기저함수 C_k^p 의 확장이므로 B-spline은 Bézier 곡선을 확장한 것이고 NURBS는 B-spline과 유리 Bézier 곡선을 확장한 것이라고 볼 수 있다. 따라서 NURBS는 Bézier 곡선, B-spline이 갖는 아핀 변환에 대한 불변성과 같은 성질을 그대로 갖고 있을 뿐만 아니라 유리 Bézier 곡선이 갖는 사영 변환에 대한 불변성도 가지고 있다. 또한, Symmetry, Endpoint Interpolation의 성질을 갖고 특히, 모든 가중치 ω_k 가 0보다 크거나 같으면 Convex Hull Property를 갖는다[18].

4 곡선의 미분

4.1 다항 곡선의 미분

Bernstein 다항식의 미분을 구하면

$$\frac{d}{dt} B_k^n(t) = n \{ B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t) \}$$

이고 이 식을 이용하여 Bézier 곡선의 미분을 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{k=1}^n B_{k-1}^{n-1}(t) \mathbf{b}_k - n \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \mathbf{b}_k$$

첨자를 조정하면

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \mathbf{b}_{k+1} - n \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \mathbf{b}_k$$

이므로

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} \{ \mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}_k \} B_k^{n-1}(t)$$

를 얻을 수 있다. 즉 n 차 Bézier 곡선의 미분은 제어점의 차 $n(\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}_k)$ 를 새로운 제어점으로 하는 $n - 1$ 차 Bézier 곡선이다. 이와 같이 곡선을 미분하여 얻은 새로운 곡선을 hodograph라고 한다[8].

한편, 다음과 같이 정의된 B-spline의 미분도 그 기저함수 N_k^p 의 미분식을 이용하여 구한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{d}_k N_k^p(t), \quad a \leq t \leq b \\ U &= \{t_0, \dots, t_p, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, t_{m-p}, \dots, t_m\} \\ &\quad (t_0 = \dots = t_p = a, \quad t_{m-p} = \dots = t_m = b) \\ \mathbf{d}_k &\in \mathbb{R}^2 \text{ 또는 } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

기저함수 N_k^p 의 미분은

$$\frac{d}{dt} N_k^p(t) = \frac{p}{t_{k+p} - t_k} N_k^{p-1}(t) - \frac{p}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_{k+1}^{p-1}(t)$$

이고 이를 이용하여 B-spline의 미분을 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{p}{t_{k+p} - t_k} N_k^{p-1}(t) \mathbf{d}_k - \sum_{k=0}^n \frac{p}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_{k+1}^{p-1}(t) \mathbf{d}_k$$

첨자를 조정하여 정리하면

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}(t) = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_{k+1}^{p-1}(t)$$

이다. 새로운 노트 벡터 V 를 다음과 같이 정의하면 노트 벡터 U 에서 계산한 N_{k+1}^{p-1} 와 노트 벡터 V 에서 계산한 N_k^{p-1} 는 서로 같다.

$$\begin{aligned} V &= \{t_1, \dots, t_p, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, t_{m-p}, \dots, t_{m-1}\} \\ &\quad (t_1 = \dots = t_p = a, \quad t_{m-p} = \dots = t_{m-1} = b) \end{aligned}$$

따라서 B-spline의 미분은

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}(t) = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_k^{p-1}(t)$$

이다. p 차 B-spline의 미분은 제어점의 차

$$\frac{p}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} (\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k)$$

를 새로운 제어점으로 하는 $(p - 1)$ 차 B-spline이 된다. Bézier 곡선의 경우와 마찬가지로 B-spline의 미분도 B-spline이다[18].

4.2 유리 곡선의 미분

3절에서 소개한 유리 Bézier 곡선과 NURBS는 모두 아래와 같은 모양으로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{p}(t)}{\omega(t)}, \quad \mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ 또는 } \mathbb{R}^3, \quad \omega(t) \in \mathbb{R}^1$$

따라서 유리 곡선의 미분은 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\omega(t)} \{ \dot{\mathbf{p}}(t) - \dot{\omega}(t)\mathbf{x}(t) \}$$

고계도함수는 $\mathbf{p}(t) = \omega(t)\mathbf{x}(t)$ 를 r 번 미분하면

$$\mathbf{p}^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \omega^{(j)}(t) \mathbf{x}^{(r-j)}(t)$$

이고 이 식을 $\mathbf{x}^{(r)}(t)$ 에 대하여 풀면

$$\mathbf{x}^{(r)}(t) = \frac{1}{\omega(t)} \left\{ \mathbf{p}^{(r)}(t) - \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \omega^{(j)}(t) \mathbf{x}^{(r-j)}(t) \right\}$$

을 얻을 수 있다. 이 식에는 다항식의 미분으로 표현되어 있고 반복 적용하여 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ 의 r 계 도함수를 구할 수 있다[8, 18].

매개변수로 표현된 곡선에 대한 미분을 구한 식은 CAGD나 응용수학에서 중요하게 활용된다[15, 17, 19, 20]. 그런데 곡선의 성질 중에서 접선, 곡률 등 미분을 포함하는 성질은 다항 곡선에서 유리 곡선으로 확장이 쉽지 않다. 이는 \mathbb{R}^n 에서 유리 곡선의 미분과 \mathbb{R}^{n+1} 에서 다항 곡선의 미분의 사영이 서로 다르기 때문이다. 이것이 유리 곡선을 CAGD에서 사용할 때 발생하는 어려움이다. 실제로 유리 곡선의 미분을 컴퓨터를 이용하여 계산하는 과정은 다항 곡선의 경우보다 시간이 많이 걸리고 덜 안정적이다[11].

Floater는 이 같은 상황을 개선하기 위해 미분에 대한 다음과 같은 두 가지 식을 제시하였다[11]. 유리 Bézier 곡선이

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k \omega_k B_k^{n(t)}}{\sum_{k=0}^n \omega_k B_k^n(t)}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

와 같이 주어졌을 때, 첫째 식은

$$\mathbf{c}'(t) = n \frac{\omega_{0,n-1}(t)\omega_{1,n-1}(t)}{\omega_{0,n}^2(t)} \{ \mathbf{c}_{1,n-1}(t) - \mathbf{c}_{0,n-1}(t) \}$$

이다. 위 식의 $\mathbf{c}_{i,r}$ 와 $\omega_{i,r}$ 는 $i, r \in \{0, 1, \dots, n\}$ 에 대하여 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{cases} \mathbf{c}_{i,r}(t) = (1-t) \frac{\omega_{i,r-1}(t)}{\omega_{i,r}}(t) \mathbf{c}_{i,r-1}(t) + t \frac{\omega_{i+1,r-1}(t)}{\omega_{i,r}}(t) \mathbf{c}_{i+1,r-1}(t) \\ \mathbf{c}_{i,0}(t) = \mathbf{b}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{i,r}(t) = (1-t)\omega_{i,r-1}(t)\omega_{i+1,r-1}(t) \\ \omega_{i,0}(t) = \omega_i \end{cases}$$

이와 같이 정의하면 $\omega_{0,n}(t) = \sum_{k=0}^n \omega_k B_k^n(t)$ 이고 $\mathbf{c}_{0,n}(t) = \mathbf{c}(t)$ 이다[7].

Floater가 제시한 둘째 식은

$$\mathbf{c}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(t) (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)$$

이다. $\lambda_i(t)$ 는 아래와 같다.

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{(1-t)t\omega_{0,n}^2(t)} \sum_{j=0}^i \sum_{k=i+1}^n (k-j)\omega_j\omega_k B_j^n(t)B_k^n(t)$$

NURBS 곡선에 대해서도 유리 Bézier 곡선과 유사하게 두 가지 식을 계산하였다[10]. 노트 벡터 U 와 주어진 제어점 \mathbf{d}_k 와 가중치 ω_k 에 대하여 정의된 p 차 NURBS 곡선을

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum \mathbf{d}_k \omega_k N_k^p(t)}{\sum \omega_k N_k^p(t)}, \quad a \leq t \leq b$$

다음과 같은 방법으로 정의할 수도 있다[8].

$t \in [t_I, t_{I+1})$ 라 가정하고 $i \in \{I-p+1, \dots, I+1\}$, $r \in \{1, 2, \dots, p\}$ 일 때

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{i,r}(t) = (1 - \alpha_{i,r}) \frac{\omega_{i-1,r-1}(t)}{\omega_{i,r}} \mathbf{r}_{i-1,r-1}(t) + \alpha_{i,r} \frac{\omega_{i,r-1}(t)}{\omega_{i,r}} \mathbf{r}_{i,r-1}(t) \\ \mathbf{r}_{i,0}(t) = \mathbf{d}_i \end{cases}$$

$\alpha_{i,r}$ 와 $\omega_{i,r}$ 는 각각

$$\alpha_{i,r} = \frac{t - t_{i-1}}{t_{i+p-r} - t_{i-1}}, \quad \omega_{i,r}(t) = (1 - \alpha_{i,r})\omega_{i-1,r-1}(t) + \alpha_{i,r}\omega_{i,r-1}(t)$$

이다. 이와 같이 정의하면 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{I+1,p}(t)$ 이다. NURBS 곡선의 미분에 대한 첫째 식은

$$\mathbf{r}'(t) = \sum \lambda_i(t)(P_i - P_{i-1})$$

이다. $\lambda_i(t)$ 는 아래와 같다.

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{\omega_{I+1,n}^2(t)} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=i}^{L+p-1} \omega_j \omega_k \{N_k^{p'}(t)N_j^p(t) - N_k^p(t)N_j^{p'}(t)\}$$

또 다음과 같은 식도 제시하였다.

$$\mathbf{r}'(t) = n \times \frac{\omega_{I,n-1}(t)\omega_{I+1,n-1}(t)}{\omega_{I+1,n}^2(t)} \times \frac{\mathbf{r}_{I+1,n-1}(t) - \mathbf{r}_{I,n-1}(t)}{t_{I+1} - t_I}$$

다항 곡선을 미분하여 얻은 곡선은 미분하기 전의 곡선과 같은 유형의 곡선이다. 즉 Bézier 곡선의 미분은 Bézier 곡선이고 B-spline의 미분은 B-spline이다. 그러나 유리 곡선의 경우는 미분하여 얻은 곡선이 원래의 곡선과 같은 유형은 아니다.

4.3 미분의 상한

미분의 상한에 대한 계산은 근사이론[17], CAGD[13]나 컴퓨터 그래픽스[17, 21] 등에서 중요한 부분을 차지한다. 유리 곡선의 미분의 상한에 대해서도 여러 방법으로 계산이 이루어졌다. 특히 유리 Bézier 곡선의 미분의 상한은 많은 연구자가 다양한 결과를 발표하였다[1, 2, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22].

제어점 $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ 와 각 제어점에 대한 가중치 $\omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$ 가 주어진 유리 Bézier 곡선 $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ 에 대하여 그 미분의 상한 $\|\mathbf{c}'\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \|\mathbf{c}'(t)\|$ 을 계산한 결과를 그 형태에 따라 아래와 같이 세 가지로 분류할 수 있다. 아래에서 ϕ 는 가중치 ω 만의 함수이다.

(1) $\Delta_1 = \max_{0 \leq i, j \leq n} \|\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j\|$ 를 포함하는 모양

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi(\omega) \max_{0 \leq i, j \leq n} \|\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j\|$$

(2) $\Delta_2 = \max_{0 \leq i \leq n-1} \|\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i\|$ 를 포함하는 모양

$$\|\mathbf{c}'\| = n\phi(\omega) \max_{0 \leq i \leq n-1} \|\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i\|$$

(3) (1)과 (2) 외의 모양

먼저 (1)의 경우를 살펴보면, Floater[11]가

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi_f \Delta_1, \quad \phi_f = \frac{\max\{\omega_i\}}{\min\{\omega_i\}}$$

Selimovic[20]가

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi_s \Delta_1, \quad \phi_s = \max\left\{\max\left\{\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}}\right\}, \max\left\{\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}\right\}\right\}$$

Zhang과 Ma[22]가

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi_z \Delta_1, \quad \phi_z = \max\left\{\frac{n-i}{n} \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} + \frac{i}{n}, \frac{n-i}{n} + \frac{i}{n} \frac{\omega_{i-1}}{\omega_i}\right\}$$

를 계산하였다. 각각의 결과를 비교하면

$$\phi_z \leq \phi_s \leq \phi_f$$

이다[20, 22]. (2)의 경우에는, Floater[11]가

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi_f^2 \Delta_2$$

Selimovic[20]가

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi_s^n \Delta_2$$

Zhang과 Ma[22]가 7차 이하의 유리 Bézier 곡선에 대하여

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi_s^{f(n)} \Delta_2, \quad f(2) = f(3) = 1, f(4) = f(5) = f(6) = 2, f(7) = 3$$

를 계산하였고, Deng[4]은 아래 결과를 얻었다.

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi_z \left(\frac{2M}{1+M}\right)^{n-1} \Delta_2, \quad M = \sqrt{\max\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}} \max\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}}$$

Li와 3인[14]은 $n = 2m$ 또는 $n = 2m + 1$ 일 때

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n\phi_s^{\frac{2n+1}{3}} \Delta_2$$

임을 밝혔다. 이는 Zhang과 Ma의 결과를 $n \geq 8$ 의 경우로 확장한 것이다. Deng의 결과와 Li와 3인의 결과는 모두 Selimovic의 상한보다는 강한 것이다[14].

Li와 3인[14]은 (2)의 경우에 대하여 많은 예에서 성립하는 것을 확인하였다고 주장하며 다음과 같은 추측을 발표하였으나 아직 증명이 발표되지는 않았다.

$$\|\mathbf{c}'\| \leq n \cdot \max\left\{\max\left\{\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}}\right\}, \max\left\{\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}\right\}\right\} \cdot \max\|\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i\|$$

(3)의 경우는 위의 두 경우보다 복잡한 모양을 갖는다. 먼저 Wu의 3인[21]은

$$\|\mathbf{c}'\| \leq \max_{0 \leq k \leq 2n} \left\{ \frac{\|V_k\|}{W_k} \right\}$$

여기서

$$W_k = \sum_{i=\max\{0, k-n\}}^{\min\{k, n\}} \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} \omega_k \omega_{k-i}$$

$$\|V_k\| = \sum_{i=\max\{0, k-n\}}^{\min\{k, n-1\}} (n-i) \binom{n}{k-i} \binom{n}{i+1} \omega_{k-i} (\omega_{i+1} (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_{k-i}) - \omega_i (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{k-i}))$$

$$+ \sum_{i=\max\{0, k-1-n\}}^{\min\{k-1, n-1\}} (n-i) \binom{n}{k-1-i} \binom{n}{i+1} \omega_{k-1-i} (\omega_{i+1} (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_{k-1-i}) - \omega_i (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{k-1-i}))$$

이다. Huang과 Su[13]는

$$\|\mathbf{c}'\| \leq \max_{0 \leq i, j \leq n} \|\mathbf{B}_{i,j}\|$$

$$\mathbf{B}_{ij} = (n-i) \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_j) + i \frac{\omega_{i-1}}{\omega_i} (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_{i-1}) + (n-2i) (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_i)$$

를 Deng과 Li[5]는

$$\|\mathbf{c}'\| \leq \max_{0 \leq i, j \leq n} \|\hat{\mathbf{B}}_{i,j}\|$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ (n-i) \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_j) + i \frac{\omega_{i-1}}{\omega_i} (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_{i-1}) + (n-j) \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_i) \right.$$

$$\left. + j \frac{\omega_{j-1}}{\omega_j} (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{j-1}) + 2(i-j) (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j) \right\}$$

를 각각 발표하였다. Deng과 Li의 상한이 Huang과 Su의 상한보다 강한 결과이다[5].

NURBS의 미분의 상한에 대해서는 Floater[10]의 계산 결과 이후 진전된 결과가 발표되지는 않았다. NURBS의 미분을 활용한 예[6, 16]는 찾을 수 있으나 미분 식을 변형하거나 그 상한을 새롭게 계산한 연구 결과를 찾기 어렵다.

Floater[10]는 노트 벡터 U 와 주어진 제어점 \mathbf{d}_k 와 가중치 ω_k 에 대하여 정의된 p 차 NURBS 곡선

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum \mathbf{d}_k \omega_k N_k^p(t)}{\sum \omega_k N_k^p(t)}, a \leq t \leq b$$

의 미분의 상한이

$$\|\mathbf{r}'\| \leq p \left(\frac{\max\{\omega_k\}}{\min\{\omega_k\}} \right)^2 \max \left\{ \frac{\|\mathbf{d}_k - \mathbf{d}_{k-1}\|}{t_{k+p-1} - t_{k-1}} \right\}$$

이 됨을 계산하였다. 이 식은 유리 Bézier 곡선의 미분의 상한과 유사한 형태이다.

5 결론

위에서 CAGD의 근간이 되는 다항 곡선인 Bézier 곡선과 B-spline의 정의와 특성을 살펴보고 유리 곡선인 유리 Bézier 곡선과 NURBS의 정의와 특성도 알아보았다. 유리 곡선은 사영사상을 이용하여 다항 곡선으로부터 정의하였다.

NURBS는 Bézier 곡선, B-spline, 유리 Bézier 곡선의 성질을 확장한 성질을 갖는다. 특히, Bézier 곡선, B-spline은 아핀 변환에 대하여 불변이며 유리 Bézier 곡선과 NURBS는 사영 변환에 대하여 불변이다.

또한, 유리 곡선의 미분과 그 상한 계산의 연구 흐름에 대하여 살펴보았다. 유리 Bézier 곡선과 NURBS의 미분 식은 유사한 모양의 두 가지 형태가 있다. 이를 이용한 미분의 상한은 유리 Bézier 곡선의 경우는 다양한 모양의 상한이 발표되었다. 특히, 유리 Bézier 곡선의 미분의 상한의 한 형태에 대한 추측을 소개하였다.

유리 Bézier 곡선의 경우 많은 연구 결과가 있는 반면 NURBS의 경우는 그렇지 못하였다. 향후 위에서 소개한 유리 Bézier 곡선의 미분의 상한에 대한 추측과 NURBS의 미분의 상한에 대한 연구가 계속 되기를 기대한다.

References

1. H. E. BEZ, N. BEZ, On derivative bounds for the rational quadratic Bézier paths, *Computer Aided Geometric Design* 30 (2013), 254–261.
2. H. E. BEZ, N. BEZ, New minimal bounds for the derivatives of rational Bézier paths and rational rectangular Bézier surfaces, *Applied Mathematics and Computation* 225 (2013), 475–479.
3. C. de BOOR, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, 2001.
4. C. DENG, Improved bounds on the magnitude of the derivative of rational Bézier curves, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2011), 204–206.
5. C. DENG, Y. LI, A new bound on the magnitude of the derivation of rational Bézier curve, *Computer Aided Geometric Design* 30 (2013), 175–180.
6. E. DIMAS, D. BRIASSOULIS, 3D geometric modelling based on NURBS: a review, *Advances in Engineering Software* 30 (1999), 741–751.
7. G. FARIN, Algorithms for rational Bézier curves, *Computer Aided Design* 15 (1983), 73–77.
8. G. FARIN, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, Academic Press, 1996.
9. G. FARIN, J. HOSCHEK, M.-S. KIM, *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier Science, 2002.
10. M. FLOATER, Evaluation and properties of the derivative of a NURBS curve, *Mathematical Methods in CAGD*, T. Lyche Ed., 1992.
11. M. FLOATER, Derivative of rational Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design* 9 (1992), 161–174.
12. T. HERMANN, On the derivatives of second and third degree rational Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design* 16 (1999), 157–173.
13. Y. HUANG, H. SU, The bound on derivatives of rational Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design* 23 (2006), 698–702.

14. Y. LI, C. DENG, W. JIN, N. ZHAO, On the bounds of the derivative of rational Bézier curves, *Applied Mathematics and Computation* 219 (2013), 10425–10433.
15. H. LIN, On the derivative formula of a rational Bézier curve at a corner, *Applied Mathematics and Computation* 210 (2009), 197–201.
16. V. P. NGUYENA et al, An introduction to Isogeometric Analysis with Matlab implementation: FEM and XFEM formulations, preprint, 2012.
17. L. PIEGL, W. MA, W. TILLER, An alternative method of curve interpolation, *Visual Computer* 21 (2005), 104–117.
18. L. PIEGL, W. TILLER, *The NURBS Book*, Springer-Verlag, 1995.
19. J. PROCHAZKOVA, D. PROCHAZKA, Implementation of NURBS curve derivatives in engineering practice, WSCG'2007 Posters Proceedings, V. Skala Ed., 2007.
20. I. SELIMOVIC, On NURBS algorithms using tangent cones, *Computer Aided Geometric Design* 26 (2009), 772–778.
21. Z. WU, F. LIN, H. S. SEAH, K. Y. CHAN, Evaluation of difference bounds for computing rational Bézier curves and surfaces, *Computers & Graphics* 28 (2004), 551–558.
22. R. J. ZHANG, W. MA, Some improvements on the derivative bounds of rational Bézier curves and surfaces, *Computer Aided Geometric Design* 23 (2006), 563–572.