韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2014.28.4.457
제 28집 제 4호, 2014. 11. 457-474

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 28, No. 4, Nov. 2014. 457-474

GeoGebra와 미분적분학 개념의 시각화

이 상 구 (성균관대학교)
장 지 은 (성균관대학교)
김 경 원 (성균관대학교)
박 경 은 (성균관대학교)

최근 테크놀로지가 발달함에 따라 대학 수학교육에서 시각화를 통한 추상적인 수학적 개념의 직관적 이해는 그 비중이 점점 커지고 있다. 본 연구에서는 대학 미분적분학을 학습하는 학생들의 이해를 도울 수 있고 웹만 연결되어 있으면 무료로 사용할 수 있는 그리고 필요한 내용을 직접 개발할 수 있는 도구 중 그 장점이 잘 알려져 있는 지오지브라(GeoGebra)를 활용한 무료 시각화 자료들을 개발하여 소개한다. 특히 미분적분학 교재의 순서에 맞추어 개발된 시뮬레이션 도구를 활용하여 개념의 이해와 함께 새로운 지식을 생산할 수 있는 교육환경을 제공하고자 하였다. 마지막으로 미적분학 개념들의 시각화를 마친 이번 시도가 대학수학의 다른 강좌와 중등 수학교육으로 확대될 수 있는 가능성에 대하여 논의하였다.

Ⅰ. 서론

우리나라의 수학교육현장에서는 학습을 하는데 주로 추상화된 내용을 기호로 나타내고 형식적으로 전개해 나가면서 논리적 엄밀성을 강조하기 때문에 많은 학생들이 수학을 딱딱하고, 어렵고, 지루하다고 인식한다(류희찬, 이지요, 1993; 문광호, 우정호, 1999). 이를 해결하기 위해서 추상적인 수학 내용을 직관적으로 이해하고 보다 흥미롭게 느낄 수 있도록 도움을 주는 교수자의 노력이 필요하다는 지적이 이어졌고, 그간 학생들의 수학에 대한 부정적인 인식에 변화를 주기 위한 노력으로 한국 수학계는 STEAM[1] 교육, 스토리텔링(storytelling) 방식의 교육 등 수학교육에 흥미를 더하는 다양한 시도를 하였으며 적지 않은 성과도 이루었다(권종겸, 이봉주, 2013; 오영범, 박상섭, 2010; 이승우 외, 2013). 구체적으로는 수학적 개념의 시각화 자료들을 활용하여 학생들의 수학에 대한 흥미를 높이는 연구도 다양한 방식으로 진행되었다(이상구 외, 2013).

수학적 개념의 시각화는 새로운 개념의 발견과 이해를 위해 수학적 이미지를 형성하고 활용하는 과정이다. 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하여 정적인 그림에 애니메이션을 이용한 동적인 시각화를 보태는 것은 학생들의 추상적인 수학 개념에 대한 이해를 도울 수 있다. 더 나아가 새로운 문제를 해결할 수 있는 창의적 사고 능력 개발에 대한 실마리를 제공한다(류희찬, 이지요, 1993).

대학 수학교육에서 시각화를 통한 수학적 개념의 직관적 이해는 그 비중이 점점 커지고 있다. 인간이 다양한 정보를 받아들이는 과정에서 눈의 역할은 매우 절대적이다. 특히 21세기 학생들은 책을 통해 내용을 습득할 뿐

* 접수일(2014년 9월 1일), 심사(수정)일(2014년 9월 29일), 게재확정일(2014년 10월 8일)
* ZDM 분류 : N85, U55, U65
* MSC2000 분류 : 97B40, 97C80, 97U50, 97U70
* 주제어 : 대학 수학교육, 시각화, 지오지브라, 미적분학
1) Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics

만 아니라 그림, 영상 등을 동원한 시각을 활용한 학습을 통해 직관적인 개념을 이해한다(채희정, 2001). 그리고 읽고 쓰기보다는 보거나 조작해 보면서 직관적으로 학습하는 성향이 높아지고 있다. 관련하여 컴퓨터 그래픽과 애니메이션은 학습내용의 전달이나 피드백(feed back)을 강화하기 위하여 사용되는 매우 중요한 도구로써 교과서나 책에서 나오는 정적인 시각화 이외에 역동적인 시각화를 사용하여 학생들이 학습내용을 인지적으로 구조화하고 수학적 개념을 쉽고 직관적으로 이해하는데 큰 도움을 준다(Pitcher, 1991; 신동선, 류희찬, 2002). 하지만 이를 위해서는 한국의 실정에 맞는 테크놀로지를 통한 학습 환경(그래프 그리기, 시뮬레이션, 모델링, 계산하기)이 뒷받침 되어야만 한다.

따라서 본 연구에서는 대학 미분적분학을 학습하는 학생들의 이해를 도울 수 있고 웹만 연결되어 있으면 무료로 다운로드 받아 사용할 수 있는 지오지브라(GeoGebra)를 활용한 무료 시각화 자료들을 개발하고 이용한 내용을 소개하고자 한다. 특히 모델연구가 아니라 미분적분학 교재의 순서를 따라가며 전체적으로 대부분의 콘텐츠를 개발하여 누구나 사용하여 수업을 할 수 있도록 제공하는 것이 특징이다.

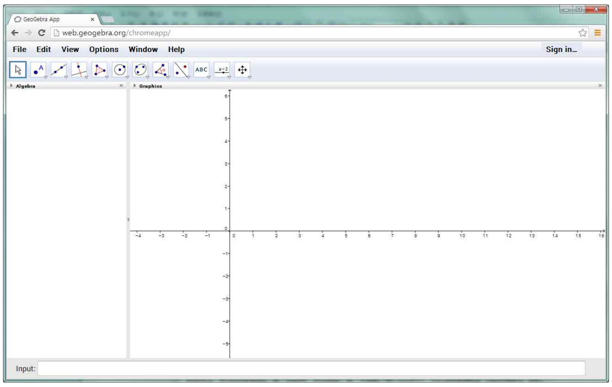
Ⅱ. 대학수학교육에서 지오지브라의 활용

그동안 수학적 개념의 기하학적인 이해를 위하여 Mathematica, Excel, GSP, Maple 등의 수학 소프트웨어가 활용된 다양한 시각화 모델들이 개발되었다(Macnab, Phillips & Norris, 2012; 강순자, 고상숙, 1999; 김경원 외, 2011; 김향숙, 2001; 문광호, 우정호, 1999; 한동숭, 2003; 한세호, 장경윤, 2009). 이에 보태어 본 연구에서는 컴퓨터를 활용한 시각화 및 시뮬레이션 도구로써 무료로 다운로드 받아 사용할 수 있는 지오지브라를 활용하였다.

지오지브라는 기하(geometry)를 의미하는 ‘Geo’와 대수(algebra)를 의미하는 ‘Gebra’의 합성어이다(김태환, 장강원, 2013). 프로그램 이름에서 확인할 수 있듯이 지오지브라는 초등학교 수학뿐만 아니 대학 수준의 기하 및 대수를 포함한 다양한 수학내용을 쉽게 다룰 수 있는 무료 수학 소프트웨어이다. 지오지브라는 처음 2001년도에 오스트리아 짤스브르그(Salzburg) 대학의 호헨월터(Markus Hohenwarter)교수에 의해 개발되었고, 2002년에 공개된 이후 현재는 많은 나라의 교사 및 학생들이 수학 개념의 시각화를 위해 사용하고 있다(Haciomeroglu, Bu, Schoen & Hohenwarter, 2009; Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis & Lavicza, 2008; Hohenwarter & Lavicza, 2007; 권윤신, 류성림, 2013). 우리나라에서도 2008년도부터 지오지브라의 번역 프로젝트가 진행되어 2009년에 지오지브라 도움말의 공식 매뉴얼의 번역이 완료되었다. 이와 같은 한글화된 지오지브라는 PC 뿐만 아니라 스마트폰 및 태블릿을 포함한 모바일 기기 등, 다양한 기기에서 무료로 제공되는 만큼 교사 및 학생들의 활용에 제약이 없고, 사용자 인터페이스가 직관적으로 구성되어 있어서 학생들이 프로그램을 배우고 활용하는 데까지 많은 시간이 필요하지 않다. 또한 지오지브라는 자바(Java)언어[2] 기반으로 개발되어 자바가 지니고 있는 “특정한 운영체제에 종속되지 않고 웹과의 연동이 쉽다”는 특징을 가지고 있기 때문에, 상호작용이 가능한 동적인 웹 페이지를 만들어 웹에서 손쉽게 다른 사람과 공유할 수 있다(Hohenwarter, Preiner & Yi, 2007).

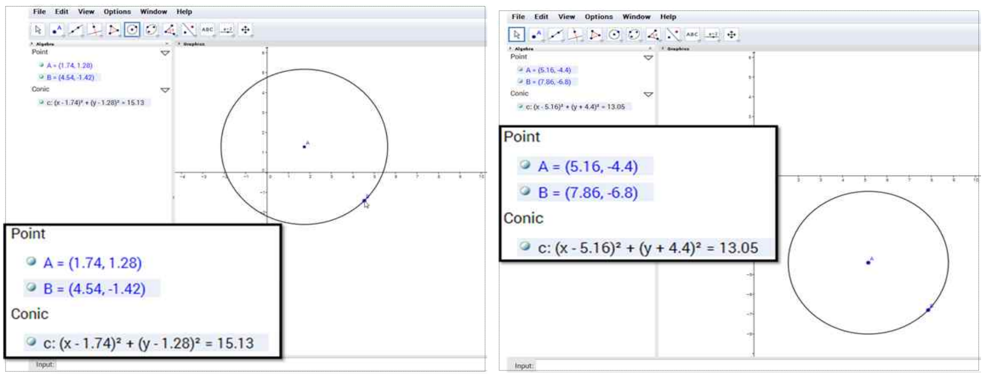
지오지브라는 대수창, 스프레드시트창, 기하창으로 구분되어 있으며, 이 창들이 자유롭게 연결되어 있다. 대수창에서는 기하창에 나타나는 여러 대상들의 정보를 보여준다. 특별히, 점, 선, 함수 그래프 등의 대수적 표현(수식)을 보여준다. 기하창에서는 대수창에 입력된 함수 및 성분들의 기하적 대상들을 시각화하여 보여준다.

2) Java언어: 객체지향언어



<그림 1> 지오지브라의 대수창과 기하창

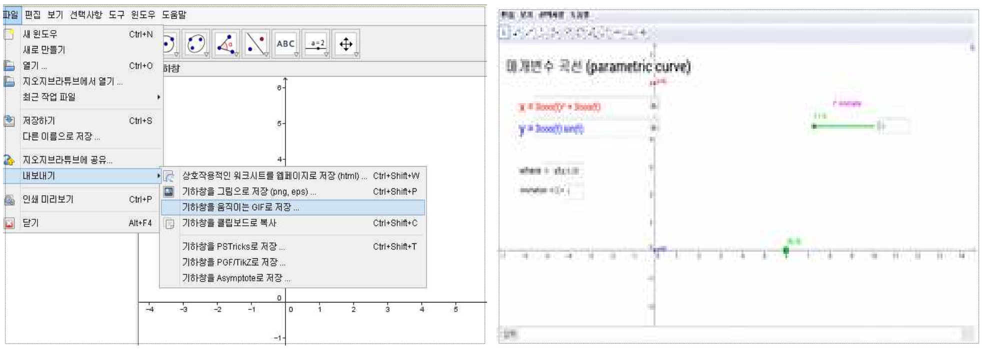
특히 지오지브라는 대수적 표현과 기하적 대상이 서로 연결되어 있기 때문에 기하창에서 기하적 대상에 변화가 있으면, 대수적 표현이 그에 따라 변화하며, 대수적 표현의 값을 변경하면 기하적 대상에 바로 그 변화가 나타난다. 예를 들어, 지오지브라에서 그린 <그림 2>의 원을 살펴보면, 원의 중심인 $(a,\ b)$를 마우스로 드래그 하여 점을 이동시키면 대수창에 원의 방정식이 함께 변화하는 것을 볼 수 있다. 즉, 기하창을 통해 변화된 원의 방정식을 볼 수 있다. 또한 대수창에 있는 원의 방정식을 클릭해 변수인 r의 크기를 바꿔주면 기하창에 원의 반지름이 변화하는 것을 볼 수 있고 대수창에 있는 원의 중심 $(a,\ b)$를 클릭해 변수인 a와 b의 값을 바꾸면 기하창에 원의 중심이 변화하는 것을 볼 수 있다. 즉, 대수창을 이용해 원의 방정식을 직접 조작 할 수도 있다.



<그림 2> 대수창과 기하창의 상호작용

또한 지오지브라는 <그림 3>과 같이 슬라이더를 활용한 시뮬레이션 기능을 이용하여 정적인 그림에 애니메이션을 포함한 동적인 시각화를 보탤 수 있고[3], 제작된 애니메이션은 움직이는 그림 파일로 얻을 수 있기 때문에 역동적인 학습 활동을 다양한 방법으로 기록할 수 있다.

3) http://www.youtube.com/watch?v=Vau9CTVrqp8, http://www.youtube.com/watch?v=SDqS6t87Sx8



<그림 3> 움직이는 그림 파일 얻기

대학 미분적분학 수업에서 지오지브라와 다른 수학 도구를 함께 활용하였을 때 얻을 수 있는 가장 큰 장점은 수학적 개념을 시뮬레이션 할 수 있는 도구이므로 지필환경에서 생각할 수 없었던 새로운 시도를 가능하게 해 주었다는 점이며 다음과 같은 근거들을 포함한다(이정곤, 2012). 첫째, 지오지브라는 학교 수학의 교과과정에서 제시되는 수학적 개념을 다룰 수 있는 대수, 기하, 미적분, 통계, 논리 등 모든 기능을 포함하고 있다. 둘째, 지오지브라는 무료로 제공되는 소프트웨어이며 국제적인 사용자 커뮤니티를 통해 다양한 학습 정보를 얻을 수 있다. 셋째, 학습자로 하여금 기능을 쉽게 익힐 수 있도록 직관적인 사용자 인터페이스를 제공한다. 즉, 대부분의 실행 절차가 복잡한 설정이 필요 없다.

Ⅲ. 지오지브라를 이용한 미분적분학 시각화 도구 개발

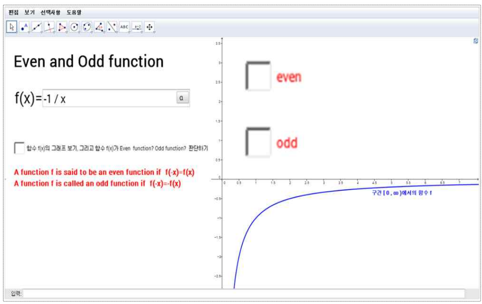
미국의 NCTM(1989, National Council of Teachers of Mathematics)에서는 수학수업에서 계산능력의 하락을 초래하지 않는 범위에서 공학적 도구의 사용을 강조하며, 문제를 탐구하고 해결하기 위해 그리고 정보를 처리하고 계산을 수행하는 도구로서 컴퓨터를 언제나 사용할 수 있어야 한다고 하였다. 또한 학습자의 활동을 중시하고 수학적 흥미와 자신감을 갖게 하기 위해 계산기와 구체적 조작물의 적극적 활용을 권장하고 있다(김응환 외, 2001; 전명일, 2003; 한동승, 2003). 뿐만 아니라 웹을 통하여 시간과 공간의 제약 없이 학습 기회를 가질 수 있기 때문에 상상력을 자극하는 웹상의 콘텐츠 개발이 필요하다고 지적하였다(김응환 외, 2001). 많은 보고서들에서 미분적분학을 공부하는 학생들의 상당수가 미분적분학을 정상적으로 이수하지 못하고 있으며, 미분적분학의 지식이 피상적인 경우가 많다고 지적하면서 우리나라 미분적분학 교육에 대한 우려를 나타내고 있다(한동승, 2003). 우리 대학에서의 미분적분학 교수 · 학습도 현재까지는 대개 정형화된 계산 문제를 해결하는 기능만을 습득하는 연산위주, 실질적이고 흥미가 반영된 교육보다는 형식적인 절차인 시험위주의 학습만 이루어져왔으며, 이에 대한 대책으로 최근 수학실습 시간을 추가하여 다양한 시도를 해왔다.

본 논문에서는 지오지브라를 활용하여 미분적분학의 주요 주제에 해당하는 CAS(Computer algebra system) 도구를 개발한 내용을 중심으로 서술한다. 다음은 개발된 지오지브라를 활용한 미분적분학의 시각화 자료들과 실제 활용하는 웹 주소와 방법 그리고 각 자료들을 분석한 후 그 의미를 논의한 것이다. 대학 수학교육에서 학생들은 개발된 결과물을 통하여 미분적분학의 핵심 개념들을 시뮬레이션을 통해 직관적으로 이해하고, 반복을 통하여 완전학습을 할 수 있다. 더불어 본 연구를 통하여 개발된 자료들에는 이미 중등 수학교육 과정에서 배우는 미분적분학 내용도 다수 포함되어 있어 고등학교 수업에서도 일부 활용가능하다. 학생들이 실습하며 느낀 내

용을 정리하여 웹상에서 쉽게 공유할 수 있고 공유된 웹 주소와 이미지를 보고서에 포함시켜 제출할 수 있도록 하였다. 이를 통하여 단순히 더 나은 이해를 위한 정적인 시각화 도구만을 제공하는 것이 아니라 시각적 대상을 탐구하고 더 나아가 도구를 활용해 새로운 시각적인 대상도 창출할 수 있는 환경을 마련하였다.

1. 함수와 모델: 우함수와 기함수

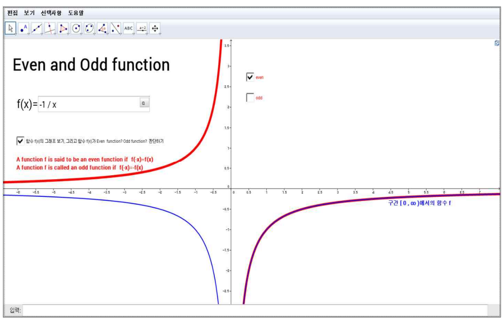
(http://www.geogebratube.org/student/m80727)



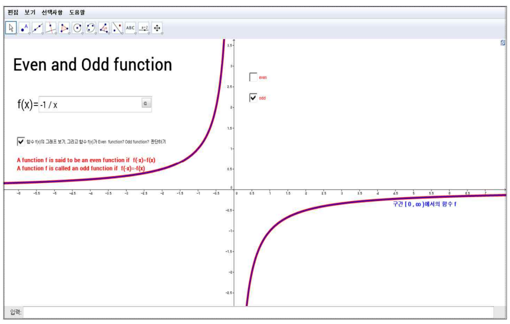
<그림 4> 우함수와 기함수

<그림 4>에서 파란색 그래프는 구간 $[0,\ \infty)$에서의 함수 $f(x)$을 나타낸다. 그리고 화면의 중앙 상단에는 선택할 수 있는 항목 'even(우함수)'와 'odd(기함수)'가 주어져 있고 화면의 왼쪽 상단에는 $(-\infty,\ \infty)$에서의 함수 $f(x)$의 그래프를 볼 수 있는 선택항목이 주어져 있다. 'even'을 선택하면 우함수(even)인 파란색 그래프가, 'odd'을 선택하면 기함수(odd)인 파란색 그래프가 나타나고 '함수 $f(x)$의 그래프 보기'를 선택하면 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서의 함수 $f(x)$의 빨간색 그래프가 나타난다.

'even'을 선택했을 때 나타나는 파란색 그래프가 함수 $f(x)$의 그래프인 빨간색 그래프와 일치하면 함수 $f(x)$는 우함수이고 'odd'을 클릭했을 때 나타나는 파란색 그래프가 함수 $f(x)$의 그래프인 빨간색 그래프와 일치하면 함수 $f(x)$는 기함수이다. <그림 5>는 $f(x) = -\dfrac{1}{x}$이 우함수가 아닌 상황을 보여준다.



<그림 5> 우함수가 아닌 예

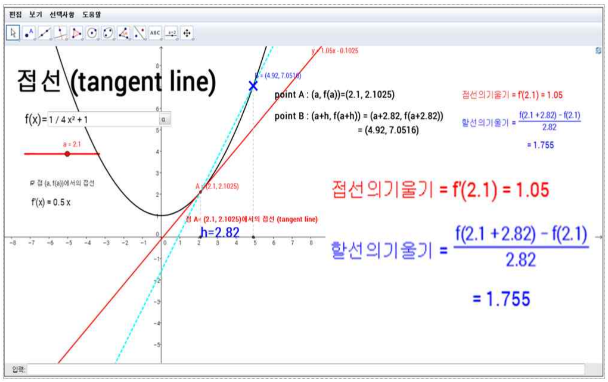


<그림 6> 기함수인 예

'even'을 선택했을 때 나타나는 파란색 그래프가 함수 $f(x)$의 그래프인 빨간색 그래프와 일치하지 않으므로 함수 $f(x)$는 우함수가 아니다. 그리고 'odd'을 선택했을 때 나타나는 파란색 그래프가 함수 $f(x)$의 그래프인 빨간색 그래프와 일치하므로 함수 $f(x)$는 기함수이다(<그림 6>). 주어진 함수 $f(x)$외에도 다양한 함수 $f(x)$을 입력함으로써 함수 $f(x)$가 우함수인지 기함수인지 쉽게 확인할 수 있다.

2. 극한과 도함수: 접선
(http://www.geogebratube.org/student/m80386)

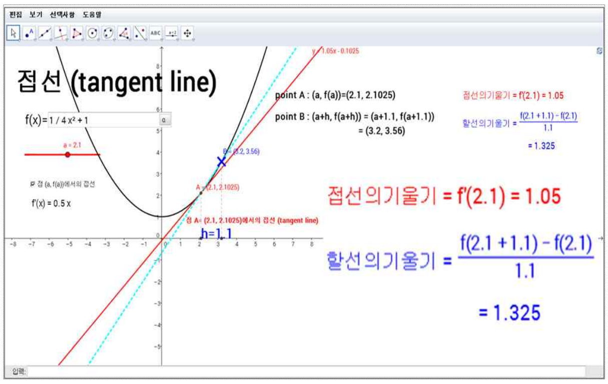
곡선 C가 $y=f(x)$의 그래프일 때 곡선 위의 점 $\mathrm{A}=(a,\ f(a))$에서 함수 $f(x)$의 접선을 구해보면 다음과 같다(<그림 7> 참조). 함수 $f(x)$의 접선을 구하기 위해 우선 인접한 점 $\mathrm{B}=(a+h,\ f(a+h))\ (h\neq 0)$을 잡으면 두 점 A와 B에 의해 결정된 직선(할선)의 기울기는 $m_{\mathrm{AB}}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$이다. 그리고 곡선 위의 점 B가 곡선 C를 따라 점 A에 접근하도록 마우스를 이용해 점 B을 이동시킨다.



<그림 7> 두 점 A와 B에 의해 결정된 할선과 점 A에서의 접선

위의 과정을 통해 '곡선 상의 점 B가 점 A에 가까이 다가갈수록 두 점 A와 B에 의해 결정된 직선(할선)은 점 A에서의 (곡선의) 접선에 근사하게 된다.'라는 사실을 시각적으로 확인할 수 있다. 뿐만 아니라 할선의 기울기가 $\dfrac{f(2.1+2.82)-f(2.1)}{2.82}=1.755$에서 $\dfrac{f(2.1+1.1)-f(2.1)}{1.1}=1.325$로 h의 값을 작게 함에 따라 할선의 기울기가 접선의 기울기인 1.05에 가까이 다가가고 있다는 것도 수치적으로 확인할 수 있다.

<그림 8>을 통해 점 B가 점 A에 근접하면 할선(하늘색 점선)과 접선(빨간색 실선)이 거의 일치하는 것을 시각적으로 확인할 수 있다. 즉, 점 B가 점 A에 한없이 다가가면 두 점 A와 B에 의해 결정된 직선은 점 A에서만 접한 접선의 기울기가 된다. 그리고 접선의 기울기를 구할 수 있으므로 점 $\mathrm{A}=(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식도 쉽게 구할 수 있다. 이외에도 스크롤바를 이용해 a의 값을 수정함으로써 다양한 점에서의 (곡선의) 접선도 같은 방법으로 구할 수 있다. 또한 함수 $f(x)$을 다르게 입력함으로써 다양한 함수의 접선도 실습할 수 있다.

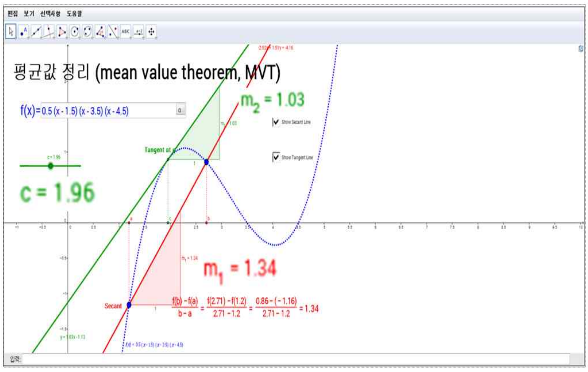


<그림 8> 점 A와 A에 근접한 점 B에 의해 결정된 할선과 점 A에서의 접선

3. 미분의 응용: 평균값의 정리

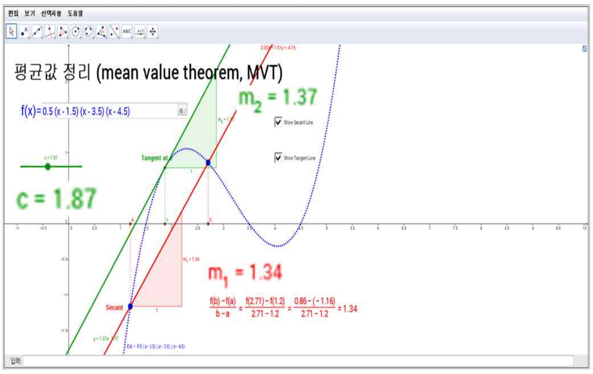
(http://www.geogebratube.org/student/m90585)

본 시각화 도구는 '함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능일 때, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$을 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 반드시 하나 이상 존재한다.'라는 사실을 시각적으로 보여주는 자료이다. 예를 들어, $[a,\ b]$에서 정의된 함수 $f(x)=0.5(x-1.5)(x-3.5)(x-4.5)$에서 스크롤바를 이용해 c의 값을 변화시키는 시뮬레이션을 통해 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 특징을 시각적으로 확인할 수 있다. 스크롤바를 이용해 $c=1.96$로 설정하면 $f'(c)=1.03$이고 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=1.34$으로 $f'(c)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 <그림 9>에서 확인 가능하다.



<그림 9> 평균값 정리($f'(c)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 경우)

그리고 스크롤바를 이용해 $c=1.87$로 설정하면 $f'(c)=1.37$이고 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=1.34$으로 $f'(c)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 <그림 10>에서 확인 가능하다.



<그림 10> 평균값 정리($f'(c)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 경우)

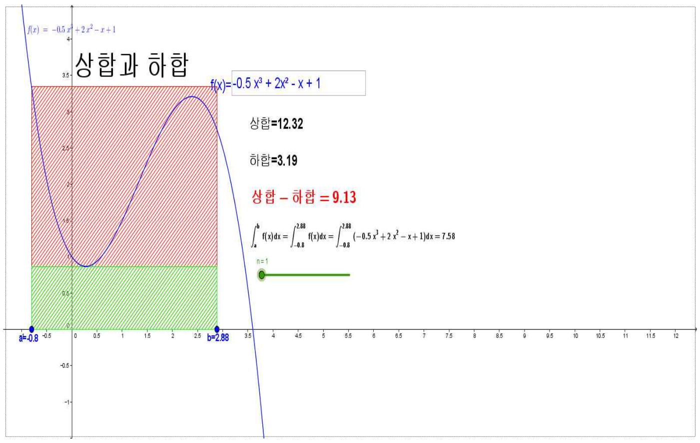
따라서 상수 c가 구간 $(1.87,\ 1.96)$안에 존재한다는 사실을 시각적으로 확인할 수 있다. 즉, $(1.2,\ 2.71)\supset(1.87,\ 1.96)$이기 때문에 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1.2,\ 2.71]$에서 연속이고 열린구간 $(1.2,\ 2.71)$에서 미분 가능일 때, $f'(c)=\dfrac{f(2.71)-f(1.2)}{2.71-1.2}$을 만족하는 c가 열린구간 $(1.2,\ 2.71)$에 존재한다. 이외에도 함수 $f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$와 점 $(b,\ f(b))$ 즉, 곡선 위 파란색의 두 점을 마우스를 이용해 이동시킴으로써 더 다양한 문제를 실습할 수 있다.

4. 적분: 상합과 하합

(http://www.geogebratube.org/student/m67928)

a로부터 b까지의 곡선 $y=f(x)$의 아래에 놓여 있는 영역 S의 넓이는 먼저 영역 S을 직사각형들로 근사시킨 다음에 이들 직사각형들의 수를 증가시켜서 직사각형들의 넓이의 극한을 취함으로써 구할 수 있다. 자세히 말하면, <그림 11>과 같이 구간 $[a,\ b]$을 일정한 간격 $\dfrac{b-a}{n}$으로 분할한 다음 $\dfrac{b-a}{n}$을 밑변으로 하고 높이가 $\left|f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)\right|$ $(0\le k\le n)$인 직사각형을 그려 넣으면 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형들의 넓이의 합으로 근사된다. 이 때, 직사각형들의 넓이의 합을 리만합(Riemann Sum)이라고 한다.

높이를 결정하는 방법에는 구간의 왼쪽 끝 함숫값을 이용하는 경우, 구간의 중점의 함숫값을 이용하는 경우, 구간의 오른쪽 끝 함숫값을 이용하는 경우 등 다양한 경우가 있지만 본 도구에서는 구간의 오른쪽 끝과 왼쪽 끝의 함숫값 중 큰 값을 높이로 결정하는 상합과 작은 값을 높이로 결정하는 하합을 선택하여 시각화하였다. 따라서 면적 S는 상합과 하합의 사이에 놓일 것이다.



<그림 11> 상합과 하합

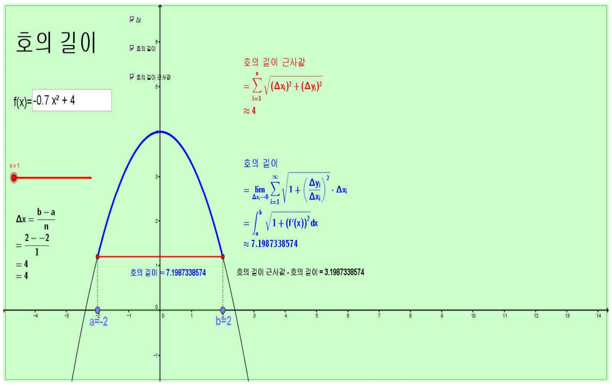
<그림 11>은 함수 $f(x) = -0.5x^3 + 2x^2 - x + 1$에 대하여 상합과 하합의 차가 $n = 15$일 때는 1.29, $n = 50$일 때는 0.39임을 보여준다. 즉, n의 값을 증가시킴으로써 간격 $\dfrac{b-a}{n}$을 더 작게 취하면 상합과 하합의 값이 면적 S의 값으로 수렴하고 있다는 것을 알 수 있다.

만약 간격을 극한까지 좁힌 경우 구간의 왼쪽 끝 점과 오른쪽 끝 점의 극한값이 같아지므로 당연히 구하려는 면적도 그 극한값과 일치한다. 결과적으로 직사각형은 선으로 생각하면 되고 세로의 길이는 $f(x)$의 값과 일치한다. 따라서 상합 = 하합 = $\int_a^b f(x)\,dx$ 이다. 이 도구는 위의 과정을 즉, 적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값이 상합과 하합 사이에 존재하며 n이 커질수록 상합과 하합의 값이 적분 값으로 수렴한다는 사실을 시각적으로 보여주는 자료이다.

5. 적분의 응용: 호의 길이

(http://www.geogebratube.org/student/m71105)

곡선의 길이는 어떻게 구할 수 있을까? 우리는 곡선에 근사하는 다각형을 이루는 선분들의 길이를 모두 더함으로써 구할 수 있을 것이다. 따라서 일반적으로 곡선에 먼저 하나의 다각형을 접근시킨 후에 그 다각형의 선분의 개수를 늘려 나가는 것으로 극한을 취함으로써 곡선의 길이를 정의한다. <그림 12>의 시각화 도구를 이용해 곡선의 길이를 예측해보면 다음과 같다.



<그림 12> 호의 길이

함수 $f(x) = -0.7x^2 + 4$에 대하여 $n=7$일 때와 $n=50$일 때를 비교해본다면 $n=7$일 때, n개의 선분의 길이의 합과 호의 길이의 차가 약 0.036이다. 그리고 $n=50$일 때, 호의 길이의 근삿값이 $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2} \approx 7.19803$이고 호의 길이가 $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1+(-1.4x)^2}\,dx$ ≈ 7.19873으로 그 차가 약 0.0007이다. 즉, n의 값이 증가할수록 근삿값과 참값의 차가 거의 0에 가까워지고 있다는 것을 알 수 있다. 또한 빨간색 다각형이 $n=7$일 때보다 $n=50$일 때에 곡선의 모양과 더 유사하다는 것을 시각적으로도 쉽게 확인할 수 있다.

즉, n이 증가함에 따라 간격 $\dfrac{b-a}{n}$의 길이가 좁아지고 n개의 선분으로 이루어진 다각형이 곡선의 모양과 유사해져 결국 n개의 선분의 길이의 합이 호의 길이에 근사하게 된다는 것을 시각적으로 확인할 수 있다. 함수 $f(x) = -0.7x^2 + 4$ 뿐만 아니라 함수 f을 다양하게 입력함으로써 임의의 곡선 $f(x)$의 길이도 위와 같은 방법으로 쉽게 구할 수 있다.

6. 무한수열과 무한급수: 함수 f의 $x=a$에서의 테일러급수

(http://www.geogebratube.org/student/m92767)

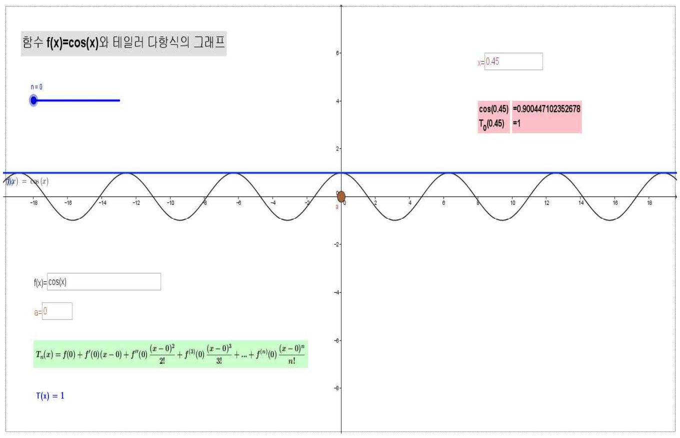
함수 f가 $x=a$에서 멱급수 표현을 갖는다면

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

의 형태이다. 이 급수를 함수 f의 $x=a$에서의 ‘테일러급수’라고 한다. 즉, 미분가능한 어떤 함수를 급수의 형태로 근사하는 방법이다. 그리고 처음 n개의 항까지를 선택함으로써 그 부분합을 $x=a$ 주변에서 $f(x)$의 근사식으로 사용할 수 있는데 그 식

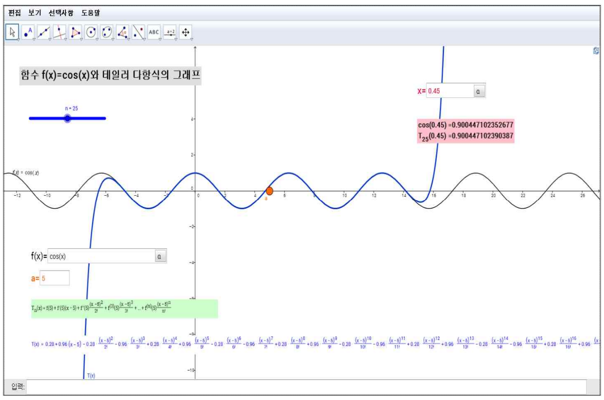
$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

을 f의 $x=a$에서의 ‘n차 테일러 다항식’이라고 한다. n차 테일러 다항식과 함수 $f(x)$의 관계를 직접 확인해 볼 수 있다(<그림 13>).



<그림 13> 함수 f의 $x=a$에서의 테일러급수

함수 $f(x)=\cos(x)$에 대하여 살펴보면 $n=9$일 때보다 n의 값을 증가시킨 $n=25$일 때 n차 테일러 다항식의 그래프가 $f(x)$에 더 근사하게 수렴한다는 사실을 쉽게 확인할 수 있다. 그리고 n의 값을 $n=50$으로 더 증가시켜보니 n차 테일러 다항식의 그래프가 화면에 나타난 함수 $f(x)$와 거의 일치한다는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라 a의 값을 조정하면서 시뮬레이션을 통해 f의 $x=a$에서의 'n차 테일러 다항식'에서 a가 미치는 영향에 대해서도 알아볼 수 있다. $n=25$인 상태에서 $a=5$로 설정하는 시뮬레이션 과정을 통해 a의 역할은 함수 $f(x)$을 n차 테일러 다항식으로 근사했을 때 $x=a$ 주변을 중심으로 근사하도록 한다는 것을 알 수 있다(<그림 14>).



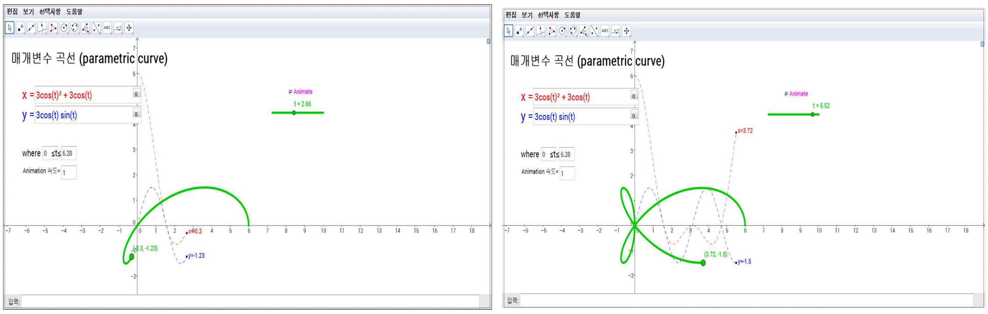
<그림 14> 함수 f의 $x=5$에서의 테일러급수

따라서 이 시각화 도구는 n차 테일러 다항식이 주어졌을 때, n과 a에 따라 n차 테일러 다항식이 어떻게 변화하는지를 함수 $f(x)$와 비교하여 둘의 관계를 시각적으로 보여주는 자료이다. 함수 f, a, x을 다양하게 설정함으로써 더 다양한 테일러 다항식의 그래프를 그릴 수 있다.

7. 벡터함수: Graphing Parametric Curves

(http://www.geogebratube.org/student/m97566)

f, g를 구간 I에서 정의된 연속인 실함수라 하면, 구간 I의 모든 t(매개변수)에 대하여 $x=f(t)$, $y=g(t)$ (매개변수 방정식)로 주어지는 점 $(x,\ y)$ 전체의 집합 C을 곡선이라 부른다. 곡선 C는 시간 t에서 그 위치가 $(f(t),\ g(t))$인 동점이 움직인 자취로 이해할 수 있다.



<그림 15> $(3\cos(t)^2+3\cos(t), 3\cos(t)\sin(t))$의 자취

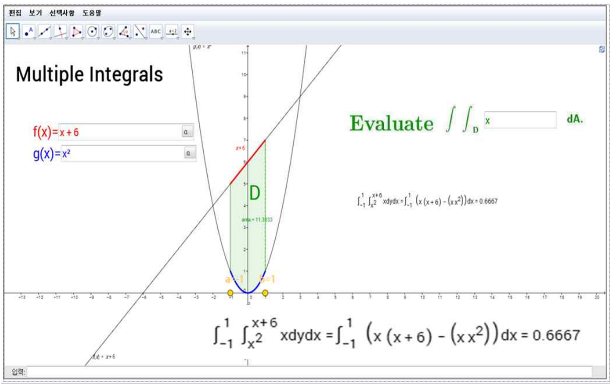
<그림 15>의 초록색 선은 주어진 범위에서 점 $(3\cos(t)^2+3\cos(t), 3\cos(t)\sin(t))$의 자취를 나타낸다. 즉, 초록색의 스크롤바를 이동하면 t의 값에 따라 점 $(3\cos(t)^2+3\cos(t), 3\cos(t)\sin(t))$이 어떻게 이동하는지 쉽게 확인할 수 있다. 그리고 t의 최솟값과 최댓값을 지정해줌에 따라 t가 구간의 범위에서 어떤 곡선을 나타내는지도 함께 확인할 수 있다. 뿐만 아니라 빨간색의 점선과 파란색의 점선은 각 $(t,\ x(t))$와 $(t,\ y(t))$을 나타내는 것으로 t가 변함에 따라 $x(t)$, $y(t)$의 값이 어떻게 변화하는지도 확인할 수 있다.

더불어 화면 중앙 상단에 있는 'Animate' 항목을 선택하면 애니메이션의 기능을 활용할 수 있다. t가 자동적으로 움직이며 초록색의 점 $(3\cos(t)^2+3\cos(t), 3\cos(t)\sin(t))$이 구간의 범위에서 곡선을 그릴 때, 화면 좌측 중앙에 있는 '애니메이션 속도' 조절 기능을 활용하여 원하는 'Animate' 속도를 입력할 수도 있다. 따라서 구간 I의 모든 t(매개변수)에 대하여 주어진 벡터방정식 $\mathbf{r}(t)$가 어떤 곡선을 나타내는지 시각적으로 보여주는 자료이다.

8. 다중적분

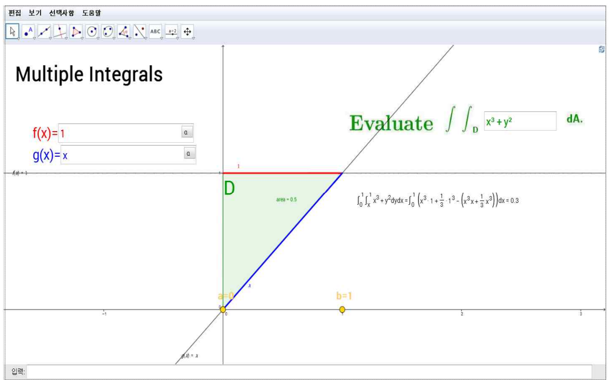
(http://www.geogebratube.org/student/m97525)

단일적분에 대해서는 적분하는 영역은 언제나 구간이다. 그러나 이중적분에 대해서는 직사각형뿐만 아니라 <그림 16>에서 제시한 영역처럼 좀 더 일반적인 형태의 영역 D에 대해서도 함수 f를 적분할 수 있도록 하고자 한다. 그렇다면 예를 들어, D가 포물선 $y=x^2$와 직선 $y=x+6$에 의해 둘러싸인 영역일 때, $\iint_D x\,dA$의 값은 어떻게 구하며 영역 D의 변화에 따라 적분식과 적분값이 어떻게 변화하는지 확인할 수 있다.



<그림 16> 다중적분

a와 b의 (노란색) 점을 마우스로 이동시키면서 값을 -1와 1로 수정하면 적분식이 $\int_{-2}^{3}\cdots$에서 $\int_{-1}^{1}\cdots$으로 바뀌고 적분 값은 약 10.4167에서 약 0.6667로 변한다. 그리고 시뮬레이션 과정을 통해 영역 D가 변함에 따라 $\iint_D x\,dA$의 적분식이 어떻게 변화하는지 또한 적분식이 변함에 따라 적분 값이 어떻게 변화하는지를 시각적으로 확인할 수 있다. 뿐만 아니라 $f(x)$, $g(x)$, 적분하고자 하는 함수 등 함수를 다양하게 입력함으로써 다중적분에 관한 여러 가지 문제를 <그림 17>의 시각화 도구를 이용해 해결할 수 있다.



<그림 17> $f(x)=1$, $g(x)=x$, y축으로 둘러싸인 영역 D에서의 함수 x^3+y^2의 적분

9. 본 연구를 통하여 개발된 미분적분학 지오지브라 콘텐츠 목록과 웹주소

<표 1>미분적분학 개념들의 시각화 도구와 웹 주소

Composite Functions	http://www.geogebratube.org/student/m83233
f(x)-Grapher	http://www.geogebratube.org/student/m84358
sine 그래프 그리기	http://www.geogebratube.org/student/m67942
cosine 그래프 그리기	http://www.geogebratube.org/student/m67943
tangent 그래프 그리기	http://www.geogebratube.org/student/m67944
삼각함수의 값 구하기	http://www.geogebratube.org/student/m67945
Exponential Function	http://www.geogebratube.org/student/m80724
Power Function	http://www.geogebratube.org/student/m80731
Logarithmic Functions	http://www.geogebratube.org/student/m83250
Translation-V-H-Shifts	http://www.geogebratube.org/student/m83225
Vertical-Horizontal-Stretching	http://www.geogebratube.org/student/m83230
Reflection	http://www.geogebratube.org/student/m83232
f′(x)의 그래프 그리기	http://www.geogebratube.org/student/m67935
선형근사와 미분	http://www.geogebratube.org/student/m92771
Newton′s Method	http://www.geogebratube.org/student/m80350
Rolle′s theorem	http://www.geogebratube.org/student/m89345
적분의 정의	http://www.geogebratube.org/student/m67933
입체의 부피구하기(x축 회전)	http://www.geogebratube.org/student/m70792
함수 f를 x축 둘레로 회전	http://www.geogebratube.org/student/m69307
함수 f를 y축 둘레로 회전	http://www.geogebratube.org/student/m69311
호의 길이 (원)	http://www.geogebratube.org/student/m70806
곡선의 길이 (함수)	http://www.geogebratube.org/student/m71101
직선의 매개방정식	http://www.geogebratube.org/student/m70798
공간곡선 그리기	http://www.geogebratube.org/student/m69306
다변수 함수의 등위곡선	http://www.geogebratube.org/student/m90607

http://tube.geogebra.org/student/b121552

본 절에서 소개한 결과물과 그에 대한 분석은 수학적 개념의 이해를 향상시킬 수 있는 도구로서 시각화 자료들의 가능성을 보여준다. 이는 일반적인 학생들이 기존의 지필 수업만으로 도달 할 수 없는 체험적 이해를 자기 주도적으로 이룰 수 있음을 보여주며 미분적분학의 교육에 널리 활용될 수 있음을 시사한다. 동시에 더 많은 수학 콘텐츠의 개발이 지속적으로 뒤따라와야 한다는 것을 확인시켜준다. 더불어 앞의 개발된 결과물들은 실제 현장에서 미분적분학의 학습을 통한 검증을 통해 다양한 교육학적 분석을 가능하게 한다. 그리고 수학을 강의하는 연구자들이 개발하는 위와 같은 자료들은 수학교육 연구자들에게 다양한 논의를 위한 논제로 제시된다.

Ⅳ. 결론 및 제언

수학적 개념의 시각화는 단순히 학생들의 학습에 대한 이해를 도울 뿐만 아니라 학생으로 하여금 시각화 과정을 통하여 스스로 발견하며 깨우치는 자기주도적인 교육이 가능하게 한다. 특히 대학수학 중 미분적분학의 경우 수학적 개념의 시각화를 통한 기하학적 이해가 동시에 이루어 질 때 정확한 의미전달이 되는 경우가 많기 때문에 그 어느 대학수학 과목보다 시각화 과정이 중요하다.

본 연구에서는 무료로 사용할 수 있는 수학 시뮬레이션 소프트웨어인 지오지브라를 활용하여 기본적인 미분적분학 개념들의 시각화 도구들을 위와 같이 소개하였다. 현재 공개된 지오지브라 관련 자료들은 외국에서의 자료와 국내에서의 자료로 나눌 수 있는데, 대개 고등수학의 개념을 다루지 않아 본 연구에서는 미분적분학 관련 지오지브라 자료를 수십여 개 개발하고 그 자료의 이용에 대한 연구에 집중하였다.

보강된 양방향의 시뮬레이션 자료들은 수업의 보조 자료로서 기존의 미분적분학 교수ㆍ학습과정에 효과적으로 적용이 가능하다. 그리고 이러한 개발이 미분적분학뿐만 아니라 다른 대학수학 과목에도 이루어져 더 많은 교육 콘텐츠가 개발되고 대학 강의에 도움을 줄 수 있는 방향으로 나아가야 할 것이다. 더 나아가 중등교육에도 많은 도움을 줄 수 있는 교육 콘텐츠가 개발되고 보급되어진다면 이러한 연구는 대학 수학교육의 다른 강좌는 물론 중등 수학교육에서도 직접적인 영향을 미칠 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강순자, 고상숙 (1999). 공간 능력을 신장하기 위한 기하 학습자료 개발 : GSP를 이용하여 정다면체 구성, 수학교육 38(2), 179-187.

Kang, S., Koh, S. (1999). Development of Instructional Materials Using Computer Software, Geometer's Sketchpad for Enhancing Spatial Ability in Regular Polyhedrons, *The Mathematical Education 38*(2), 179-187.

권윤신, 류성림 (2013). GeoGebra를 활용한 귀납활동이 초등수학영재의 증명능력 및 증명학습태도에 미치는 영향, 초등수학교육 16(2), 123-145.

Kwon, Y., Ryu, S. (2013). The Effects of Inductive Activities Using GeoGebra on the Proof Abilities and Attitudes of Mathematically Gifted Elementary Students, *Education of Primary School Mathematics 16*(2), 123-145.

권종겸, 이봉주 (2013). 스토리텔링 수학 교수·학습에 대한 초등 현직교사와 예비교사의 인식 분석, 수학교육논문집 27(3), 283-299.

Kwon, J. & Lee, B. (2013). An analysis on the in-service and pre-service teachers' perception of teaching and learning mathematics based on storytelling in elementary, *Communications of Mathematical Education 27*(3), 283-299.

김경원, 이상구, 이재화 (2011). Excel Grapher: 역동적 함수 그래프 도구, 수학교육논문집 26(2), 309-321.

Kim, K., Lee, S. & Lee, J. (2011). Excel Grapher: Dynamical Graphing Tool, *Communications of Mathematical Education 25*(2), 309-321.

김응환, 김승동, 변두원 (2001). 미분적분학 대학교육콘텐츠 개발, 한국학교수학회논문집 4(2), 143-155.

Kim, Y., Kim, S. & Byun, D. (2001). A Development of college education contents for Calculus, *Journal of the Korean School Mathematics Society 4*(2), 143-155.

김태환, 장강원 (2013). 지오지브라를 활용한 공학수학에서의 여러 가지 방정식의 그래프에 관한 미적분학 교육, 대한기계학회 춘추학술대회, 1744-1749.

Kim, T., Jang, G. (2013). *Teaching Calculus on Graphs of Various Equations in Engineering Mathematics using Geogebra*, Proceedings of the KSME Meetings 2013, 1744-1749.

김향숙 (2001). 평면변환기하에 있어서 Mathematica를 이용한 교수-학습방법, 수학교육 40(1), 93-102.

Kim, H. (2001). Teaching-Learning Method for Plane Transformation Geometry with Mathematica, *The Mathematical Education 40*(1), 93-102.

류희찬, 이지요 (1993). 수학교육에서의 시각화의 중요성과 LOGO, 수학교육학연구 3(1), 75-85.

Lew, H., Lee, J. (1993). Visualization in Mathematics Education and LoGo, *Journal of Educational Research in Mathematics 3*(1), 75-85.

문광호, 우정호 (1999). 중·고등학교 수학의 시각화, 학교수학 1(1), 135-156.

Mun, K., Woo, J. (1999). A Study on the Visualization of Middle & High School Mathematics, *School Mathematics 1*(1), 135-156.

신동선, 류희찬 (2002). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

Shin, D., Lew, H. (2002). *Mathematics Education and Computer*, Seoul: Kyungmoon publishers.

오영범・박상섭 (2010). 초등학교 수학과 개념학습을 위한 스토리텔링 기반 학습 콘텐츠 개발, 정보교육학회논문지 14(4), 537-545.

Oh, Y., Park, S. (2010). Development of Mathematics Learning Contents based on Storytelling for Concept Learning, *Journal of The Korean Association of Information Education 14*(4), 537-545.

이상구, 장지은, 김경원 (2013). Sage와 GeoGebra를 이용한 선형대수학 개념의 Visual-Dynamic 자료 개발과 활용, 수학교육 논문집 27(1), 1-17.

Lee, S., Jang, J, & Kim, K. (2011). Visualization of Linear Algebra concepts with Sage and GeoGebra, *Communications of Mathematical Education 27*(1), 1-17.

이승우, 백종일, 이정곤 (2013). 융합인재교육(STEAM)을 적용한 초등 수학영재 교육 프로그램의 개발과 적용효과, 초등수학교육 16(1), 35-55.

Lee, S., Baek, J. & Lee, J. (2013). The Development and the Effects of Educational Program applied on STEAM for the Mathematical Prodigy, *Education of Primary School Mathematics 16*(1), 35-55.

이정곤 (2012). GeoGebra 환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 개념이미지 형성 학습 개선방안. 한국수학사학회지 25(1), 71-88.

Lee, J. (2012). A study for Build the Concept Image about Natural Logarithm under GeoGebra Environment, *The Korean Journal for History of Mathematics 25*(1), 71-88.

전명일 (2003). 미분개념 지도를 위한 학습자료 개발 및 적용. 석사학위논문, 한국교원대학교.

Joen, M. (2003). *Development of learning instructional materials and it's application for teaching differentiation concepts*, Master's degree, Korea national university of education.

채희정 (2001). Visualization of concepts in Matrix Theory. 석사학위논문, 성균관대학교.

Chae, H. (2001). *Visualization of concepts in Matrix Theory*, Master's degree, Sungkyunkwan university.

한동숭 (2003). Maplet을 이용한 미적분학 교수-학습 방법, 한국학교수학회논문집 6(2), 71-85.

Han, D. (2003). Teaching-Learning Method for Calculus Education with Maplet, *Journal of the Korean*

School Mathematics Society 6(2), 71-85.

한세호, 장경윤 (2009). 고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생, 학교수학 11(3), 527-546.

Han, S., Chang, K. (2009). Instrumental Genesis of Computer Algebra System(CAS) in Mathematical Problem Solving among High School Students, *School Mathematics 11*(3), 527-546.

Haciomeroglu, E. S., Bu, L., Schoen, R. C. & Hohenwarter, M. (2009). Learning to Develop Mathematics Lessons with GeoGebra, *MSOR Connections 9*(2), 24-26.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y. & Lavicza, Z. (2008). *Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra*, 11th International Congress on Mathematical Education.

Hohenwarter, M., Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 27*(3), 49-54.

Hohenwarter, M., Preiner J. & Yi, T. (2007). Incorporating GeoGebra into Teaching Mathematics at the College Level, *Proceedings of ICTCM 2007,* 1-7.

Macnab, J. S., Phillips, L. M. & Norris, S. P. (2012). Visualizations and Visualization in Mathematics Education, *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education*, 103-122.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Pitcher, Neil (1991). Visualization in linear algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 22*(3), 387-394.

Visualization of Calculus Concepts with GeoGebra

Sang-Gu Lee
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : sglee@skku.edu

Ji-Eun Jang
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : jieun0426@skku.edu

Kyung-Won Kim
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : kwkim@skku.edu

Kyung-Eun Park
Department of Mathematics Education, Sungkyunkwan University, Jongno-gu, Seoul, 110-745, Korea
E-mail : postmedu@skku.edu

Recently, with the development of technology, intuitive understanding of abstract mathematical concepts through visualizations is growing in popularity within college mathematics. In this study, we introduce free visualization tools developed for better understanding of topics which students learn in Calculus. We visualize important concepts of Calculus as much as we can according to the order of most Calculus textbooks. In this process, we utilized a well-known, free mathematical software called GeoGebra. Finally, we discuss our experience with visualizations in Calculus using GeoGebra in our class and discuss how it can be effectively adopted to other university math classes and high school math education.

* ZDM Classification : N85, U55, U65
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B40, 97C80, 97U50, 97U70
* Key Words : Mathematics Education, Visualization, GeoGebra, Calculus