

## 수학적 과정 평가를 위한 서술형 문항 및 채점기준 개발 연구

도 종 훈 (서원대학교)

박 윤 범 (서원대학교)

박 혜 숙 (서원대학교)<sup>†</sup>

근래 수학의 학습에서 수학의 내용뿐만 아니라 수학적 과정을 평가할 수 있는 문항의 중요성에 대한 인식이 확산되고 있다. 본 연구에서는 수학의 내용과 더불어 수학적 과정 즉, 수학적 의사소통, 추론, 문제해결을 명시적인 평가요소로 포함하는 서술형 문항으로서 '수학적 과정 문항'이라는 개념을 제안하고, 수학적 과정 문항의 제작을 위한 예시 평가기준과 문항 및 채점기준 개발을 통해 서술형 문항을 활용한 수학적 과정 평가 방안을 논의한다.

### I. 서론

지금까지의 수학 평가 문항은 주로 수학의 내용에 해당하는 수학적 개념, 원리, 법칙을 묻고 측정하는 것에 초점을 맞추어 왔다. 그러나 근래 수학의 학습에서 수학적 과정이 중시됨에 따라 수학의 내용뿐만 아니라 수학적 과정을 평가할 수 있는 문항의 중요성에 대한 인식이 확산되고 있다(김도한 외, 2009; 교육과학기술부, 2011a; 박혜숙 외, 2013; 정상권 외, 2012). 즉, 이미 형성된 지식으로서의 수학 내용뿐만 아니라 수학의 학습 및 그 결과의 활용에 필요한 기능과 소양 및 역량까지도 평가할 수 있는 방법에 대한 관심이 높아지게 되었다. 이는 수학 내용과 지식에 대한 학생들의 학습 정도를 평가함과 동시에 학생들에게 수학 학습 방법을 안내하고 수학에 대한 학생들의 긍정적 태도와 수학적 역량을 신장시키기 위한 시도의 일환으로 결과 중심의 평가에서 과정 중심의 평가로의 변화를 통해 학생들의 다양하고 깊이 있는 사고력 신장을 도모하기 위한 것이라 할 수 있다.

실제로 2009 개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011a)에서는 수학과와 공통 목표에 미래 사회의 구성원에게 필요한 핵심 역량 증진을 위한 수학적 과정의 교수·학습을 다음과 같이 강조하고 있다.

복잡하고 전문화되어가는 미래 사회에서 사회 구성원에게 필요한 핵심 역량은 창의적 사고 능력, 문제 해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력 등으로, 이는 주로 수학적 추론, 수학적 문제 해결, 수학적 의사소통과 같은 수학적 과정의 교수·학습을 통하여 증진된다. 수학적 과정을 통해 길러진 핵심 역량은 타 교과의 성공적인 학습에 기반이 될 뿐 아니라, 나아가 개인의 전문적 능력의 증진과 창의·인성 중심의 21세기 지식 기반 사회의 민주 시민에게 필요한 소양과 경쟁력을 갖추는 데에도 토대가 된다(교육과학기술부, 2011a).

이런 흐름을 반영하여 교육과학기술부(2011b)는 서술형 평가 및 수행평가 개선, 고교 성취평가제 도입 등을 주요 내용으로 하는 「중등학교 학사관리 선진화 방안」을 발표하였는데, 이는 학생이 스스로 추론하고 자신의 추론 과정과 결과를 표현하고 의사소통함으로써 창의성, 문제해결력 등을 신장시킬 수 있도록 평가의 질을 제고

\* 접수일(2014년 10월 2일), 심사(수정)일(2014년 11월 17일), 게재확정일(2014년 11월 23일)

\* ZDM 분류 : D63, D64

\* MSC2000 분류 : 97C40

\* 주제어: 수학적 과정, 서술형 문항, 수학적 과정 문항, 채점기준

† 교신저자 : hyespark@seowon.ac.kr

하고자 하는 의도가 반영된 것이라 할 수 있다. 그러나 앞서 논의한 바와 같이 지금까지의 수학 학습 평가는 주로 교육과정에 제시된 여러 가지 수학적 주제와 성취기준에의 도달 여부 측정을 통해 수학 내용과 지식의 습득 여부 확인과 문제풀이 기술 향상에 그 초점이 맞추어져 왔고 수학적 의사소통, 추론, 문제해결 능력을 평가하기 위한 평가 문항과 평가 방법에 대한 논의는 상대적으로 부족한 실정이다. 이런 점에서 수학 내용과 지식에 대한 이해 및 관련 성취 기준에 대한 도달 여부 뿐 아니라 수학적 과정, 즉 수학적 의사소통, 추론, 문제해결 능력에 대한 평가기준 및 이에 대한 평가 방법에 대한 보다 적극적인 논의가 필요한 것으로 보인다.

이에 본 연구에서는 기존의 서술형 문항의 기능과 역할을 보완하여 ‘수학적 과정’을 명시적으로 평가하고 그 결과를 계량화할 수 있는 서술형 문항과 채점기준의 개발 방안을 모색한다. 이를 위해 수학의 내용뿐만 아니라 수학적 과정 즉, 수학적 의사소통, 추론, 문제해결을 명시적인 평가요소로 포함하여 평가할 수 있는 서술형 문항으로서 ‘수학적 과정 문항’이라는 개념을 제안하고 수학적 과정을 평가하기 위한 예시 평가기준과 각 평가기준 별 예시 수학적 과정 문항 및 채점기준에 대하여 살펴본다.<sup>2)</sup>

## II. 수학적 과정의 개념

NCTM(1989, 2000)은 유아~2학년, 3학년~5학년, 6학년~8학년, 9학년~12학년의 4개 단계를 관통하는 5개의 내용 기준과 과정 기준을 각각 제시하고 있는데, 그 중 과정 기준에서 각 단계의 내용 지식을 획득하고 활용하는 방법으로 문제해결, 추론과 증명, 의사소통, 연결성, 표현을 <표 1>과 같이 몇 개의 하위 성취기준으로 세분하여 제시하고 있다.

<표 1> NCTM(2000)의 과정 기준과 성취 기준

과정 기준	성취 기준
문제해결	<ul style="list-style-type: none"> <li>문제해결을 통해 새로운 수학적 지식을 만들어낼 수 있다.</li> <li>수학과 다른 교과 상황에서 나타나는 문제를 해결할 수 있다.</li> <li>문제를 해결하기 위하여 다양하고 적절한 전략을 선택하고 적용할 수 있다.</li> <li>수학 문제해결 과정을 관찰하고 반성할 수 있다.</li> </ul>
추론과 증명	<ul style="list-style-type: none"> <li>추론과 증명을 수학의 가장 근본적인 측면으로서 인식할 수 있다.</li> <li>수학적 추측을 만들고 조사할 수 있다.</li> <li>수학적 증명 능력을 개발하고 평가할 수 있다.</li> <li>다양한 유형의 추론과 증명 방법을 선택하고 사용할 수 있다.</li> </ul>
의사소통	<ul style="list-style-type: none"> <li>의사소통을 통하여 학생 자신의 수학적 사고를 조직하고 확고히 할 수 있다.</li> <li>학생 자신의 수학적 사고를 학급 친구, 교사 등 타인과 명확하게 의사소통할 수 있다.</li> <li>다른 사람의 수학적 사고와 전략을 분석하고 평가할 수 있다.</li> <li>수학적 아이디어의 정확한 표현을 위해 여러 가지 수학적 언어를 사용할 수 있다.</li> </ul>
연결성	<ul style="list-style-type: none"> <li>수학적 아이디어 간의 연결성을 인식하고 활용할 수 있다.</li> <li>수학적 아이디어 간의 연결성을 이해하고, 이를 토대로 전체에 대한 이해를 산출할 수 있다.</li> <li>수학 이외의 상황에서 수학을 인식하고 활용할 수 있다.</li> </ul>
표현	<ul style="list-style-type: none"> <li>수학적 아이디어를 조직하고 기록하며 적절하게 표현하고 의사소통에 활용할 수 있다.</li> <li>문제를 해결하기 위해서 수학적 표현을 선정하고 적용하며 변환할 수 있다.</li> <li>물리·사회·수학 현상을 모델링하고 해석하기 위해 수학적 표현을 활용할 수 있다.</li> </ul>

2) 본 연구는 박혜숙 외(2013)가 수행한 「서술형 중심의 지필평가 기반 조성」 연구의 일환으로 이루어졌으며, 본 논문의 주요 내용은 해당 연구보고서의 일부를 수정·보완하여 재구성한 것이다.

일본에서는 2008년 3월 신학습지도요령을 공표하여 2011년부터 적용하고 있는데, 이에 따르면 교육과정의 영역 구분에 이전 교육과정부터 이어져 온 내용 영역과는 다른 수학적 활동(중학교)과 산수적 활동(초등학교)을 <표 2>와 같이 새롭게 추가하여 강조하고 있다(일본문부성, 2008a, 2008b).

<표 2> 일본 수학과 교육과정(초등학교)의 구성 체계(일본문부성, 2008a)

1절. (산수 전체의) 목표		학년	1학년	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년
2절. 각 학년 목표와 내용	1. 목표							
	2. 내용	수와 계산						
		양과 측정						
		도형						
		수량관계						
		산수적 활동						
	용어·기호							
3. 내용의 취급								
3절. 지도계획의 작성과 내용의 취급								

이는 이전 교육과정에서 수학과목의 목표로서 언급되었던 수학적(산수적) 활동을 더욱 충실하게 하기 위해 각 학년별 내용 영역에 수학적(산수적) 활동을 추가한 것으로, 중학교의 경우 각 학년에서 수행할 수학적(산수적) 활동의 구체적인 성취기준을 ① 기존의 학습내용을 기초로 하여 수나 도형의 성질을 이끌어 내거나 발전시키는 활동, ② 일상생활 또는 사회에서 수학을 이용하는 활동, ③ 수학적 표현을 사용하여 근거를 명확히 하고 수순을 밝히 설명하며 전달하는 활동 등으로 제시하고 있다(일본문부성, 2008b).

국내에서는 김도한 외(2009)가 수학적 과정을 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 기능 혹은 능력으로 간주하고, 그 하위 구성 요소로 수학적 의사소통, 추론, 문제해결을 설정한 뒤, 각 구성 요소 별 성취 기준을 <표 3>과 같이 제시한 바 있다.

<표 3> 김도한 외(2009)의 수학적 과정 성취 기준

수학적 과정	성취 기준
수학적 의사소통	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 수학적 의사소통 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 수학적 생각을 개선시킬 수 있다.</li> <li>• 수학적 언어를 사용하여 학생 자신의 수학적 아이디어를 정확하게 표현할 수 있다.</li> <li>• 학생 자신의 수학적 사고 과정을 학급 친구나 교사에게 논리적이고 명확하게 의사소통할 수 있다.</li> <li>• 다른 사람의 수학적 아이디어와 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.</li> </ul>
수학적 추론	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 수학을 하는데 있어서 추론하기를 기본적이며 중요한 요소로 인식하며, 경험이나 구체적 사실에 근거하여 간단한 추론을 할 수 있다.</li> <li>• 학습한 수학적 개념, 원리, 법칙 등에 근거해서 수학적 추측(수학적 주장)을 만들고 정당화할 수 있다.</li> <li>• 직관, 유비 추론, 귀납 추론, 연역적 추론 등을 활용하여 수학적 추측을 만들고 정당화할 수 있다.</li> <li>• 귀납적 추론과 연역적 추론의 차이를 알고 설명할 수 있다.</li> <li>• 제시된 추론 과정에서 논리적 오류를 찾고 설명할 수 있다.</li> <li>• 수학적 언어를 사용하여 학생 자신의 수학적 아이디어와 추론 과정을 설명할 수 있다.</li> </ul>
수학적 문제해결	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 기본적인 문제해결 전략을 이해하고 문제에 따라 적절한 전략을 선택하여 사용할 수 있다.</li> <li>• 주어진 문제에서 필요한 정보와 필요 없는 정보를 구분하고 문제를 해결할 수 있다.</li> <li>• 주어진 문제에서 부족한 정보를 확인하고 필요한 정보를 보완하여 문제를 해결할 수 있다.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 논리적 추론, 산술적 기법, 기하적 직관 등을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.</li> <li>• 수학적 언어를 활용하여 문제해결 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.</li> <li>• 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결할 수 있다.</li> <li>• 개방형 문제에 대해 여러 개의 답을 산출할 수 있다.</li> <li>• 간단한 문제에서의 전략과 결과를 보다 복잡한 문제에 적용할 수 있다.</li> <li>• 문제해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.</li> <li>• 문제의 조건을 바꾸어 새로운 문제를 만들고 해결할 수 있다.</li> <li>• 수학의 여러 영역이 통합된 문제나 타 교과 상황에서 나타나는 문제를 해결할 수 있다.</li> </ul>
--	---

한편 2009 개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011a)에서는 수학과와 공통 ‘목표’에 미래 사회의 구성원에게 필요한 핵심 역량 증진을 위한 수학적 과정의 교수·학습을 강조하고 있고, ‘교수·학습’에서 수학적 창의력 신장을 위한 방안으로 수학적 문제 해결력, 수학적 추론 능력, 수학적 의사소통 능력 신장을 위한 유의 사항을 제시하고 있으며, 특히 ‘평가’에서 학습의 결과 뿐 아니라 과정도 중시하도록 다음과 같이 권고하고 있다.

- 마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수·학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.
- (1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
  - (2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력
  - (3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력
  - (4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력
  - (5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력
  - (6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
  - (7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

사실 수학적 의사소통, 추론, 문제해결 능력의 신장은 현행 교육과정에서만 아니라 제7차 교육과정이나 2007 개정 교육과정 등 이전 교육과정에서도 이미 논의되어 왔고 관련 연구(이중희·김선희·채미애, 2001; 이중희·김선희, 2002; 전평국·김은희·김원경, 2002 등)도 적지 않게 이루어졌지만, 학교 현장에서 실제로 활용 가능한 구체적인 성취기준이나 평가 방안에 대한 논의가 충분치 않아 실질적인 교수·학습이나 평가로 이어지지 못했고(방정숙·김상화, 2006), 이러한 사정은 지금까지도 크게 개선되지 않은 것으로 보인다. 다만 최근 정상권 외(2012)가 「과정 중심의 수학교과 평가방안 연구」를 통해 수학적 과정에 대한 평가 방안을 모색하여 그 결과를 보고하였는데, 이를 통해 수학적 과정의 하위 구성 요소 즉, 의사소통, 추론, 문제해결 각각에 대한 평가 요소를 <표 4>와 같이 제시한 바 있다. 그리고 <표 4>에 제시된 수학적 과정 평가 요소를 반영한 예시 문항을 통해 그 예시 문항을 해결하는 과정에 관련된 수학적 과정의 하위요소를 함께 제시하였다

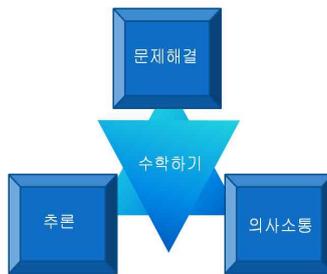
<표 4> 정상권 외(2012)의 수학적 과정 평가 요소

수학적 과정	수학적 과정의 평가 요소	약어
문 제 해 결	실세계 상황에서 수학적 문제를 구성하는 능력	P1
	다른 교과 관련 상황에서 수학적 문제를 구성하는 능력	P2
	문제를 수학적 기호, 그림을 사용하여 다시 표현하는 능력	P3
	문제해결에 필요한 조건의 확인 또는 보완 능력	P4
	문제해결에 적절한 형태로 표현을 변환하는 능력	P5
	문제해결에서 사용되는 개념들 간의 연결성을 인식하고 활용하는 능력	P6
	문제해결에서 적절한 전략을 활용하여 문제를 해결하는 능력	P7

	문제해결 과정과 결과의 타당성을 수학적 방법으로 점검하는 능력	P8
	문제해결을 위한 다양한 전략 또는 방법을 찾는 능력	P9
	관련된 문제를 만드는 능력	P10
	문제해결 전략 또는 결과를 새로운 문제에 적용하는 능력	P11
	실세계 상황에서 주어진 문제를 해결하는 능력	P12
	다른 교과 상황에서 주어진 문제를 해결하는 능력	P13
추론	수학적 관계를 파악하는 능력	R1
	수학적 관계를 찾아 표현하는 능력	R2
	수학적으로 추측하는 능력	R3
	수학적 추론에 근거한 정당화 능력	R4
	수학적 추론 과정을 점검하는 능력	R5
	추론 과정과 결과를 해석하거나 평가하는 능력	R6
	추론 과정과 결과를 변환하거나 확장하는 능력	R7
의사소통	수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력	C1
	자신의 문제해결 또는 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력	C2
	자신의 문제해결 또는 추론 과정을 반성적으로 점검하여 표현하는 능력	C3
	다른 사람의 문제해결 또는 추론 과정에 대한 설명을 해석하거나 평가하여 표현하는 능력	C4
	문제해결 또는 추론 과정을 수학적 언어로 표현하는 능력	C5
	문제해결 또는 추론 과정의 표현을 다른 방식으로 변환하는 능력	C6
	문제해결 또는 추론 과정의 표현을 확장 또는 일반화하는 능력	C7

본 연구에서는 이상 살펴본 NCTM의 과정 기준, 일본의 신학습지도요령에 제시된 수학적 활동, 김도한 외(2009)의 수학적 과정 성취 기준, 2009 개정 수학과 교육과정에 나타난 수학적 과정, 정상권 외(2012)의 수학적 과정 및 평가 요소 등을 토대로 이들 기준 논의를 가능한 한 포괄할 수 있도록 수학적 과정의 개념 및 그 구성 요소와 의미를 다음과 같이 설정하였다.<sup>3)</sup>

수학적 과정이란, 수학의 내용인 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해(습득)하고 적용하는 과정에서, 즉 수학을 하는 (doing mathematics) 과정에서 활성화되어야 하는 기능 혹은 능력으로 수학적 의사소통, 수학적 추론, 수학적 문제해결을 구성 요소로 포함한다.



<그림 1> 수학적 과정의 개념

수학적 의사소통의 의미

- 자신의 수학적 아이디어나 생각을 다른 사람과 주고받는 수학적 의사소통 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통해 자신의 수학적 아이디어나 생각 개선하기

3) 본 연구에서 설정한 수학적 과정의 개념은 2009 개정 수학과 교육과정과 김도한 외(2009)에서 제시한 개념과 거의 동일하며, 각 구성 요소의 의미는 기존의 연구들이 제시한 개념을 가능한 한 포괄하고자 하였다..

- 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 언어를 사용하여 자신의 수학적 아이디어를 정확하게 표현하기
- 자신의 수학적 사고 과정을 학급 친구나 교사에게 논리적이고 명확하게 의사소통하기
- 다른 사람의 수학적 아이디어와 사고 과정을 이해하고 평가하기

#### 수학적 추론의 의미

- 학습한 수학적 개념, 원리, 법칙과 유비 추론, 귀납적 추론, 연역적 추론 등을 활용하여 수학적 추측을 만들고 정당화하기
  - 귀납, 유추 등을 통해 새로운 성질이나 명제, 문제의 해법이나 명제의 진위 등을 추측(발견)하기
  - 삼단논법에 의한 연역적 추론, 간접증명법(귀류법), 수학적 귀납법, 반례 들기 등의 여러 가지 증명법을 이용하여 수학적 추측(명제)을 증명(하거나 반증)하기
  - 제시된 추론이나 증명을 읽고 이해하고 점검하기
- 귀납적 추론과 연역적 추론의 차이를 알고 설명하기
- 제시된 추론 과정에서 논리적 오류 찾고 설명하기
- 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 언어를 사용하여 학생 자신의 수학적 아이디어와 추론 과정 설명하기

#### 수학적 문제해결의 의미

- 기본적인 문제해결 전략을 이해하고 문제에 따라 적절한 전략을 선택하여 사용하기
- 주어진 문제에서 필요한 정보와 필요 없는 정보를 구분하여 문제 해결하기
- 주어진 문제에서 부족한 정보를 확인하고 필요한 정보를 보완하여 문제 해결하기
- 논리적 추론, 산술적 기법, 기하적 직관 등을 활용하여 문제 해결하기
- 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 언어를 활용하여 문제해결의 과정과 결과의 타당성 설명하기
- 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결하기
- 개방형 문제에 대해 여러 개의 답 산출하기
- 간단한 문제에서의 전략과 결과를 보다 복잡한 문제에 적용하기
- 문제해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용하기
- 문제의 조건을 바꾸어 새로운 문제를 제기하고 해결하기
- 수학의 여러 영역이 통합된 수학 내적인 문제 해결하기
  - 두 가지 이상의 수학적 개념, 원리, 법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제 해결하기
  - 두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐서 문제 해결하기
- 실생활이나 다른 교과 상황에서 나타나는 수학 외적인 문제 해결하기
  - 실생활 상황에서 관련된 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 파악하고 이를 적용하여 문제 해결하기
  - 타교과 소재를 사용한 상황에서 관련된 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 파악하고 이를 적용하여 문제 해결하기

### III. 수학적 과정 문항의 개념과 평가기준

앞서 살펴본 수학적 과정의 평가와 관련된 선행 연구 중에서 정상권 외(2012)의 경우 수학적 의사소통, 추론, 문제해결 등의 수학적 과정이 거의 대부분의 수학 문제해결 과정에 적용된다고 보고 <표 4>에 제시된 수학적 과정 평가 요소를 반영한 예시 문항을 통해 그 예시 문항을 해결하는 과정에 관련된 수학적 과정의 하위요소를 함께 제시하였다는 점에서 그 의미가 있으나, 수학적 과정 및 그 구성 요소를 명시적으로 평가하는 문항 및 체점기준에 대한 논의를 별도로 하지 않았다는 점에서 한계 또한 있었던 것으로 보인다. 이 장에서는 수학적 과정을 명시적으로 평가하기 위한 서술형 문항으로서 수학적 과정 문항의 개념과 수학적 과정 문항 개발을 위한 평가기준 설정에 대하여 논의한다.

### 1. 수학적 과정 문항의 개념

앞서 논의한 바와 같이 수학적 과정을 평가하고 그 결과를 계량화하여 학생들에게 피드백하기 위해서는 기존의 문항과 달리 수학의 내용 뿐 아니라 수학적 과정을 명시적인 평가요소로 포함하는 문항이 필요하다. 이에 본 연구에서는 <그림 2>와 같이 수학의 내용 뿐 아니라 수학적 과정을 명시적인 평가 요소로 포함하는 서술형 문항을 기존의 문항과 구별하기 위해 ‘수학적 과정 문항’이라 부르기로 한다.



<그림 2> ‘수학적 과정 문항’의 개념

하나의 수학적 과정 문항에는 수학적 과정의 구성 요소인 수학적 의사소통, 추론, 문제해결 능력이 평가 대상으로 모두 포함되어 있을 수도 있고 부분적으로 포함되어 있을 수도 있다. 그 중에서 특히 수학적 의사소통, 추론, 문제해결 능력을 평가하기 위한 수학적 과정 문항을 각각 ‘수학적 의사소통 문항’, ‘수학적 추론 문항’, ‘수학적 문제해결 문항’이라 부르기로 한다. 이들 각 문항에는 수학적 과정을 구체적인 채점 요소로 포함하여 수학적 과정에 대한 평가 결과를 점수로 계량화할 수 있도록 해주는 채점기준이 포함된다.

### 2. 수학적 과정 문항 개발을 위한 예시 평가기준 설정

기존의 논의(김도한 외, 2009; 정상권 외, 2012 등)에서 알 수 있듯이 수학적 과정의 구성 요소 즉, 수학적 의사소통, 추론, 문제해결은 각각 그 의미가 다양하고, 평가 방법 역시 서술형 평가를 포함한 지필 평가, 관찰, 면담, 프로젝트, 포트폴리오 등 다양할 수 있다. 그러나 학교 현장에서 수학적 과정 문항을 통해 수학적 과정을 실제로 평가하고 그 결과를 활용할 수 있으려면 수학적 과정의 각 구성 요소에 대한 다양한 의미 중에서 보다 명시적이고 구체적인 의미를 지닌 평가기준의 추출 및 설정이 필요하다. 이에 본 연구에서는 여러 차례의 논의를 거쳐 수학적 과정 문항에 대한 구성 요소별 예시 평가기준을 다음과 같이 설정하였는데,<sup>4)</sup> 무엇보다 수학적 과정의 각 구성 요소가 지닌 여러 가지 의미 중에서 ‘서술형 문항을 통해 측정’할 수 있고, 그 결과를 ‘점수로 계량화’할 수 있는 기본적인 능력(기능)을 중심으로 평가기준을 설정하였고, 수학교육과 교수 및 수학교사 등의 수학교육 전문가로부터 받은 검토 및 자문 결과를 반영하였다.

예시 수학적 의사소통 평가기준<sup>5)</sup>

- C-1. 주어진 상황·맥락을 적절한 수학적 용어, 기호, 문자, 식, 그림(도형, 표, 그래프) 등의 수학적 언어로 표현할 수 있다.
- C-2. 자신의 사고 과정을 수학적 언어로 논리정연하게 정리하여 기술할 수 있다.

예시 수학적 추론 평가기준

- R-1. 수학적 관계나 사실을 추측(발견)할 수 있다.
- R-2. 수학적 추측을 정당화할 수 있다.

4) 물론 여기에 제시된 평가기준은 예시 평가기준이므로 다른 형태로 기술될 수 있고, 평가자의 판단에 따라 다른 평가기준을 추가적으로 설정할 수 있다.

5) 여기서 C, R, P는 각각 Communication(의사소통), Reasoning(추론), Problem solving(문제해결)의 첫 글자를 이용하여 나타낸 것이다.

R-3. 추론 과정을 이해하고 점검할 수 있다.

예시 수학적 문제해결 평가기준

P-1. 수학적 개념, 원리, 법칙 등의 관련성을 파악하고 종합하여 수학 내적인 문제를 해결할 수 있다.

P-2. 실생활, 사회현상, 자연현상, 타 교과와 관련된 수학 외적인 문제를 수학적으로 해결할 수 있다.

#### IV. 수학적 과정 문항과 채점기준

본 연구에서 제안하는 수학적 과정 문항은 서술형 문항의 일종이지만 수학의 내용뿐 아니라 수학적 과정을 명시적인 평가 요소로 포함하고 채점기준 역시 앞 절에서 설정한 수학적 과정 평가기준을 채점 요소로 포함함으로써 문항에 대한 학생들의 반응 결과를 내용 점수와 과정 점수로 구분하여 계량화한다는 점에서 기존의 서술형 문항과 차이가 있다. 이 장에서는 수학적 과정 문항 제작을 위한 기본 틀과 채점기준 틀 및 예시 수학적 과정 문항에 대하여 살펴본다. 앞서 설정한 예시 평가기준과 이 장에서 제시하는 수학적 과정 문항의 기본 틀과 채점기준 틀 및 예시 수학적 과정 문항과 채점기준은 수학 및 수학교육 전공 교수 4명과 경력 10년 이상의 수학교사 12명의 전문가 자문 및 검토 결과를 반영한 것이다.

##### 1. 수학적 과정 문항의 기본 틀

서술형 문항에는 여러 가지가 있을 수 있지만 문항의 출발상황과 목표상황의 단힘 정도에 따라 개방형 문항과 폐쇄형 문항으로 분류할 수 있고, 문항의 자료 제시 유형에 따라 단독과제형 문항과 과제제시형 문항 등으로 분류할 수 있다(Pehkonen, 1991, 1997; 도종훈·허선희, 2012; 한국교육과정평가원, 2007). 수학적 과정 문항 또한 서술형 문항이므로 실제 문항을 개발할 때는 이와 같은 여러 가지 서술형 문항 유형에 대한 고려가 필요하고, 더불어 앞서 설정한 수학적 과정의 구성 요소인 의사소통(C), 추론(R), 문제해결(P) 각각에 대한 평가기준 즉, C-1, C-2, R-1, R-2, R-3, P-1, P-2 등에 대한 고려가 필요하다. 본 연구에서는 서술형 문항의 여러 가지 유형 및 수학적 과정의 하위 구성 요소를 고려하여 수학적 과정 문항 제작의 기본 틀과 개별 수학적 과정 문항에 대한 정보를 포함하는 문항정보표의 양식을 <그림 3>, <그림 4>와 같이 각각 제안한다.



<그림 3> 수학적 과정 문항 기본 틀

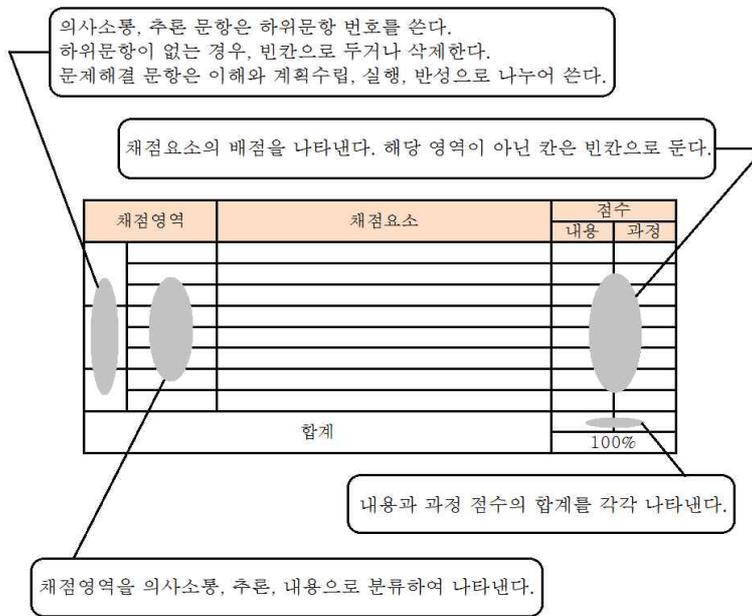
	학교급	내용 영역	수학적 과정	문항 유형
성취기준				
평가기준	내용			
	과정			

<그림 4> 수학적 과정 문항의 문항정보표 양식 예시

문항정보표에서 ‘학교급’과 ‘내용 영역’란에는 해당 문항이 평가하는 내용을 다루는 학교급(초등학교, 중학교, 고등학교)과 내용 영역(수와 연산, 문자와 식, 함수, 확률과 통계, 기하 등)을 제시하고, ‘수학적 과정’란에는 해당 문항이 평가하고자 하는 수학적 과정의 구성 요소, 즉 수학적 의사소통, 추론, 문제해결 중 하나를 제시하며, ‘문항 유형’란의 왼쪽에는 단독과제형과 자료제시형 중 해당하는 유형을 기록하고 오른쪽에는 폐쇄형과 개방형 중 해당하는 유형을 제시한다. 그리고 ‘성취기준’란에는 해당 문항이 평가하고자 하는 내용의 성취기준을 교육과정에 제시된 내용에 근거하여 제시하고, ‘평가기준’의 ‘내용’란에 수학 내용 평가기준을, ‘과정’란에 수학적 과정 평가기준을 제시한다.

## 2. 수학적 과정 문항에 대한 채점기준 틀

사실 대부분의 수학문제 해결 과정에는 수학적 과정의 각 요소들이 포함되어 있다. 그러나 통상적인 서술형 문항 채점에서는 주어진 문항을 풀어서 답을 구하는 과정이나 오류 여부에 초점을 맞추므로, 수학적 과정에 대한 채점기준이 명확하지 않고 수학적 과정을 별도의 채점 요소로 명료화하지도 않는다. 이에 비해 수학적 과정 문항에서는 수학 내용 뿐 아니라 수학적 과정을 명시적으로 평가하여 점수화할 수 있는 채점기준이 오히려 중요한 역할을 한다. 본 연구에서는 수학 내용 뿐 아니라 수학적 과정도 함께 채점 요소로 설정하여 점수화할 수 있도록 수학적 과정 문항에 대한 채점기준의 기본 틀을 <그림 5>와 같이 설정한다.



<그림 5> 수학적 과정 문항에 대한 채점기준의 기본 틀

이에 따르면 평가자는 문항을 통해 평가하고자 하는 바를 채점 영역으로 크게 구분하고 채점 영역별 채점 요소를 수학 내용과 수학적 과정으로 구분하여 작성하며, 이를 토대로 학생의 답안을 채점한다. 그리고 나서 수학 내용에 대한 합계 점수와 수학적 과정에 대한 합계 점수를 각각 산출하고, 이들 두 점수를 합하여 문항에 대한

합계 점수를 산출하게 된다. 이때 수학 내용이나 수학적 과정을 평가하지 않아서 빈 칸이 되는 경우가 있을 수 있는데, 이를테면 다음 절에서 살펴볼 예시 문항 중에서 수학 내용 없이 수학적 의사소통 능력만 평가하는 예시 C-1 문항의 경우 내용 점수 부분은 비어 있게 된다. 결국 수학적 과정 문항에 대한 채점 결과는 '내용 점수'와 '과정 점수'를 각각 산출한 뒤 이들 두 점수를 합하여 산출하고, 이를 통해 수학 내용에 대한 이해와 성취 정도 뿐 아니라 수학적 과정에 대한 진단도 가능해지는 것이다.

### 3. 예시 수학적 과정 문항과 채점기준

본 연구의 목적은 기존에 존재하지 않았던 새로운 서술형 문항의 개발이 아니라 수학적 과정을 평가할 수 있는 문항 및 채점기준의 예시를 통해 교사들이 실제로 수학적 과정 문항과 그 채점기준을 손쉽게 작성하고 활용할 수 있도록 안내하는 것이다. 따라서 본 연구에서 제시하는 예시 수학적 과정 문항의 상당 부분은 수학 교과서 등에 제시되어 있는 기존의 문항들을 수학적 과정을 평가할 수 있도록 문항 내용과 형식 및 채점기준을 변형한 것이며, 크게 수학적 의사소통 문항, 수학적 추론 문항, 수학적 문제해결 문항으로 구분된다.<sup>6)</sup>

#### 가. 예시 수학적 의사소통 문항

앞서 설정한 평가기준에 따라 주어진 상황·맥락을 적절한 수학적 용어, 기호, 식, 그림(도형, 표, 그래프) 등의 수학적 언어로 표현하는 능력(C-1)과 자신의 사고 과정을 수학적 언어로 논리정연하게 정리하여 기술할 수 있는 능력(C-2)을 평가하는 예시 문항에 대하여 살펴본다.

##### (1) C-1 문항의 예

C-1 문항에는 수학적 개념, 원리, 법칙의 의미를 이해하여 이를 수학적 언어(용어, 기호, 문자, 식, 도형, 표, 그래프 등)로 표현하는 문항, 수학적 언어의 의미를 이해하여 주어진 상황을 다른 형태로 바꾸어 표현하는 문항 등이 있을 수 있다. 이때 수학적 언어가 수학적 용어, 기호, 문자, 식, 도형, 표, 그래프 등으로 다양하기 때문에 C-1 문항 역시 그 형태가 다양할 수 있다.<sup>7)</sup> 다음은 수학적 언어의 의미를 이해하여 주어진 상황을 다른 형태로 바꾸어 표현하는 문항으로서, 특히 '그림'으로 주어진 상황을 '수학 용어와 기호'로 바꾸어 표현하는 능력을 평가하는 예시 문항이다.

<예시 C-1 문항과 채점기준> '그림'으로 주어진 상황을 '수학 용어와 기호'로 바꾸어 표현하는 문항

	학교급	내용 영역	수학적 과정	문항 유형	
	중학교	기하	의사소통	단독과제형	폐쇄형
성취기준	간단한 도형을 작도할 수 있다.				
평가기준	내용				
	과정	C-1. 주어진 상황·맥락을 적절한 수학적 용어, 기호, 식, 그림(도형, 표, 그래프) 등의 수학적 언어로 표현할 수 있다.			

6) 이 절에서 제시되는 예시 문항 이외의 보다 다양한 문항 예시는 박혜숙 외(2013) 참고.

7) 이를테면 다음과 같은 형태의 C-1 문항을 구성할 수 있다.

- 수학적 용어나 기호(식)가 포함되지 않은 문장이나 상황을 수학적 용어와 기호(식)로 표현하기
- 수학적 용어나 기호(식)가 포함되지 않은 문장이나 상황을 그림(도형, 그래프, 표)로 표현하기
- 수학적 용어와 기호(식)가 포함된 문장이나 상황을 그림(도형, 그래프, 표)으로 표현하기
- 그림(도형, 그래프, 표)이 주어진 상황을 수학적 용어와 기호(식)로 표현하기

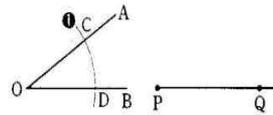
[문항]

눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용하여  $\angle AOB$  와 크기가 같고 반직선 PQ를 한 변으로 하는 각을 작도하는 과정을 네 단계로 나타낸 그림이다. 단계 ①, 단계 ②, 단계 ③의 작도 방법을 적절한 수학적 용어와 기호를 사용하여 각각 설명하시오.

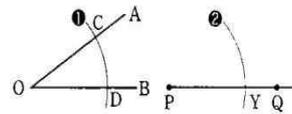
단계에 대한 설명

단계에 해당하는 그림

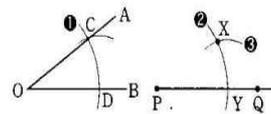
단계 ① :



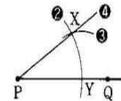
단계 ② :



단계 ③ :



단계 ④ : 점 P와 점 X를 지나는 반직선 PX를 그리면,  $\angle XPY$  는  $\angle AOB$  와 크기가 같은 각이다.



[예시 답안]

단계 ① : 점 O를 중심으로 하는 원을 그려, 이 원과 반직선 OA, OB와의 교점을 각각 C, D라 하자.

단계 ② : 점 P가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{OC}$  인 원을 그려, 이 원과 반직선 PQ의 교점을 Y라 하자.

단계 ③ : 점 Y가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{CD}$  인 원을 그려, 이 원과 ②에서 그린 원의 교점을 X라 하자.

[채점기준]

채점 영역		채점 요소	점수	
			내용	과정
의사 소통	단계①	점 O를 중심으로 하는 원'이라고 표현하였는가?		30%
		'OA, OB와의 교점(만나는 점) C, D'라고 표현하였는가?		
	단계②	점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OC}$ 인 원'이라고 표현하였는가?		30%
'PQ와의 교점(만나는 점) Y'라고 표현하였는가?				
단계③	점 Y를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{CD}$ 인 원'이라고 표현하였는가?		40%	
	단계②에서 그린 '원과의 교점(만나는 점) X'라고 표현하였는가?			
합 계				100%
				100%

이 예시문항은 수학 교과서에 전형적으로 제시되는 간단한 도형, 즉 주어진 각과 크기가 같은 각을 작도하는 문항을 변형한 것으로 도형의 작도 능력보다는 그림으로 주어진 도형의 작도 과정을 수학 용어(중심, 반지름, 원, 교점 등)와 기호로 정확하게 표현할 수 있는지를 평가하기 위한 것이다. 이를 위해 작도의 각 단계를 그림으로 제시하고, 문항의 발문을 각 단계의 작도 방법을 ‘적절한 수학적 용어와 기호를 사용하여 설명하시오.’로 명료하게 제시하였다. 채점기준 역시 수학 내용 즉, 작도 능력보다는 수학적 의사소통 능력 평가에 초점을 두었음을 알 수 있다.

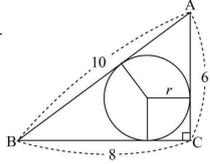
한편 위의 예시 문항과 같이 C-1을 별도의 문항으로 평가할 수도 있지만, 주어진 상황·맥락을 적절한 수학적 언어로 표현하는 능력은 대부분의 서술형 문항 해결에 요구되는 기초 소양이기도 하므로, 필요한 경우 수학적 추론이나 문제해결 문항에 채점 요소로 반영할 수도 있을 것이다.

(2) C-2를 반영한 채점기준

C-2 문항은 자신의 사고 과정을 수학적 언어로 논리정연하게 정리하여 기술할 수 있는가를 평가하기 위한 문항이어야 한다. 그러나 C-2 즉, 자신의 사고 과정을 수학적 언어로 논리정연하게 정리하여 기술하는 능력은 C-1과 마찬가지로 거의 대부분의 서술형 문항 답안 작성에 요구되는 능력이므로, 별도의 문항으로 평가하는 것보다는 수학적 추론 문항이나 수학적 문제해결 문항의 채점기준에 채점 영역 및 채점 요소로 반영하여 평가하는 것이 좀 더 바람직할 수 있다. 따라서 수학적 추론 문항 및 수학적 문제해결 문항의 채점기준에 ‘답안을 수학적 언어로 논리정연하게 정리하여 기술하였는가?’를 공통적인 채점 요소로 반영함으로써 C-2에 대한 진단과 평가가 가능하도록 할 수 있다. 다음은 주어진 문항에 대하여 C-2를 채점 요소로 반영한 채점기준과 학생들의 응답 사례이다.

<C-2를 반영한 채점기준과 학생들의 응답 사례>

**[문항]**  
 다음 그림과 같이  $\overline{AB}=10$ ,  $\overline{BC}=8$ ,  $\overline{CA}=6$ 인 직각삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이  $r$ 을 구하시오.



**[예시 답안]**  
 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로 다음이 성립한다.  
 $(6-r) + (8-r) = 10$ ,  $14-2r=10$ ,  $2r=4$ ,  $r=2$ ,  
 따라서 내접원의 반지름의 길이는 2이다.

**[채점기준]**

채점 영역	채점 요소	점수	
		내용	과정
추론	주어진 정보로부터 문제해결의 실마리를 찾았는가? $(6-r) + (8-r) = 10$		3점
내용	식 $(6-r) + (8-r) = 10$ 을 계산하여 $r$ 의 값을 올바르게 구하였는가?	1점	
의사소통	답안을 수학적 언어로 논리정연하게 정리하여 기술하였는가?		1점
합계		1점	4점
		5점	

[학생들의 응답 사례 비교]

<풀이>  

$$6-r+8-r=10$$

$$14-2r=10, -2r=-4, r=2$$
 답 : 2

<학생 A의 답안>

<풀이>  

$$\frac{6+8-10}{2} \Rightarrow \frac{14-10}{2} \Rightarrow \frac{4}{2} \Rightarrow 2$$
 답 : 2

<학생 B의 답안>

위에서 <학생 A>는 주어진 정보로부터 문제해결의 실마리를 찾아 문제를 해결하였을 뿐 아니라 문제해결 과정을 논리정연하게 정리하여 기술한 것에 비해, <학생 B>의 경우 주어진 정보로부터 문제해결의 실마리를 찾아 문제를 해결하였지만 문제해결 과정을 수식으로 표현하는 과정에서 부적절한 기호를 사용하였음을 확인할 수 있다. 이로 부터 <학생 B>는 이 문항 해결에 필요한 수학 내용과 수학적 추론 능력은 갖추었으나 수학적 의사소통 능력 특히, 자신의 사고 과정을 수학적 언어로 논리정연하게 정리하여 기술하는 능력이 상대적으로 부족하다고 진단할 수 있고, 그 결과 <학생 B>에게 의사소통 점수를 부여하지 않을 수도 있을 것이다. 이러한 진단과 점수 부여는 채점기준에 C-2를 채점 요소로 설정하였기 때문에 가능한 것이다.

나. 예시 수학적 추론 문항

앞서 설정한 평가기준에 따라 수학적 추론 문항에 수학적 관계나 사실을 추측(발견)하는 능력을 평가하는 R-1 문항, 수학적 추측을 정당화하는 능력을 평가하는 R-2 문항, 추론 과정을 이해하고 점검할 수 있는 능력을 평가하는 R-3 문항 등이 있을 수 있다. 또한 R-1과 R-2를 통합하여 추측(발견)하고 정당화하는 과정을 함께 평가하는 문항도 가능하다.

(1) R-1 문항의 예

R-1 문항에는 체계적인 정리, 열거, 관찰 등을 통하여 새로운 성질이나 규칙을 추측하여 찾아내는 규칙성 찾기 문항, 복잡한 상황에서 가정, 조건 등을 단순화하여 함수, 관계식 등 문제해결의 실마리가 되는 수학적인 모델을 추측하여 찾아내는 문항 등이 있을 수 있다. 다음은 규칙성 찾기 문항의 예이다.

<예시 R-1 문항과 채점기준> 규칙성 찾기 문항

	학교급	내용 영역	수학적 과정	문항 유형	
	중학교	확률과 통계	추론	단독과제형	폐쇄형
성취기준	경우의 수를 구할 수 있다.				
평가기준	내용	경우의 수의 뜻을 이해하고 이를 구할 수 있다.			
	과정	R-1. 수학적 관계나 사실을 추측(발견)할 수 있다.			

[문항]

자연수  $a$ 를 1, 2, ..., 100에서 임의로 택할 때,  $3^a$ 의 일의 자리가 1이 되는 경우의 수를 구하시오.

[예시 답안]

$a$ 에 1부터 차례로 수를 대입해 보면

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81,$$

$$3^5 = 243, \quad 3^6 = 729, \quad 3^7 = 2187, \quad 3^8 = 6561, \dots$$

와 같이  $a$ 가 4의 배수일 때,  $3^a$ 의 일의 자리가 1이다. 1에서 100까지의 자연수 중에서 4의 배수는 25(개)이므로 구하는 경우의 수는 25이다.

[채점기준]

채점 영역	채점 요소	점수	
		내용	과정
추론	규칙 ‘ $a$ 가 4의 배수일 때, $3^a$ 의 일의 자리가 1이다.’를 찾았는가?		50%
내용	경우의 수 25를 옳게 구하였는가?	40%	
의사소통	답안을 수학적 언어로 논리정연하게 서술하였는가?		10%
합계		40%	60%
		100%	

이 예시문항에서 평가하고자 하는 수학 내용은 경우의 수의 뜻을 이해하고 이를 구하는 것이고, 수학적 과정은 문제해결의 실마리가 되는 ‘ $a$ 가 4의 배수일 때,  $3^a$ 의 일의 자리가 1이다.’는 수학적 관계 즉, 규칙을 발견하는 수학적 추론 능력이다. 그러나 발견한 규칙에 대한 논리적인 설명이나 증명 등의 정당화를 요구하지 않기 때문에 R-2는 평가기준과 채점 요소에 포함하지 않았다.

(2) R-2 문항의 예

주어진 수학적 추측을 정당화할 수 있는가를 평가하는 R-2 문항에는 이미 알고 있는 수학적 개념, 원리, 법칙을 이용하여 수학적 추측을 연역적으로 정당화하는 문항 즉, ‘~임을 설명(혹은 증명)하여라.’와 같은 형태의 문항이나 반례를 찾아 주어진 추측이 성립하지 않음을 확인하는 문항 즉, ‘~이 성립하지 않는 예를 찾아라.’와 같은 형태의 문항이 있을 수 있다. 그리고 R-1 문항과 통합하여 ‘~을 구하고(추측하고), 그 이유를 설명하시오.’ 혹은 ‘~이 참인지 거짓인지 말하고, 참이면 그 이유를 설명하고 거짓이면 거짓인 예를 들어라.’와 같이 수학적인 관계나 사실을 추측하고 그 추측을 연역적으로 정당화하거나 반례를 들어 반증하는 형태의 문항이 있을 수 있다. 다음은 문제의 해를 추측하고(R-1) 그 추측을 연역적으로 정당화하는(R-2) 문항의 예이다. 이 예시문항에서 평가하고자 하는 수학 내용은  $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 아는 것이고, 수학적 과정은 주어진 조건을 만족시키는 정수의 순서쌍이 (0,0)뿐임을 추측하고, 이를 수학적으로 정당화하는 수학적 추론 능력이다.

<R-1과 R-2 통합 문항과 채점기준의 예>

	학교급	내용 영역	수학적 과정	문항 유형	
	중학교	수와 연산	추론	단독과제형	개방형
성취기준	무리수의 개념을 이해한다.				
평가기준	내용	$\sqrt{2}$ 가 무리수임을 안다.			
	과정	R-1. 수학적 관계나 사실을 추측(발견)할 수 있다. R-2. 수학적 추측을 정당화할 수 있다.			

[문항]

$m^2 - 2n^2 = 0$ 을 만족시키는 정수  $m, n$ 의 순서쌍  $(m, n)$ 을 모두 구하고, 그 이유를 설명하시오.

[예시 답안]

(0,0) 뿐이다. 왜냐하면 (0,0) 이외에  $(m, n)$ 이  $m^2 - 2n^2 = 0$ 을 만족시키려면,  $\frac{m}{n} = \pm\sqrt{2}$ 이 성립해야 한다. 그러나  $\sqrt{2}$ 는 무리수이므로 이것은 불가능하다. 따라서 구하는 순서쌍은 (0,0) 뿐이다.

[채점기준]

채점 영역	채점 요소	점수	
		내용	과정
내용	$\sqrt{2}$ 가 무리수임을 알고 있는가?	20%	
추론	R-1	(0,0)을 구하고, (0,0)뿐임을 추측하였는가?	20%
	R-2	주어진 식으로부터 $\frac{m}{n} = \pm \sqrt{2}$ 임을 유도하였는가?	20%
		$\sqrt{2}$ 가 무리수라는 사실로부터 순서쌍이 (0,0)뿐임을 올바르게 설명하였는가?	30%
의사소통	답안을 수학적 언어로 논리정연하게 기술하였는가?		10%
합계		20%	80%
		100%	

(3) R-3 문항의 예

추론 과정을 이해하고 점검할 수 있는가를 평가하는 R-3 문항에는 문제의 풀이 또는 정당화 과정에 사용된 수학적 원리와 논리를 확인하는 문항으로서 문제의 풀이 또는 정당화 과정을 이해하고 빈 칸을 알맞게 채우거나 풀이를 완성하는 문항, 문제의 풀이 또는 정당화 과정을 이해하고 틀린 부분을 찾아 옳게 고치는 문항 등이 있을 수 있다. 다음은 문제의 풀이 과정을 이해하고 빈 칸을 알맞게 채우는 문항의 예로서, 이 문항을 해결하려면 학생들은 제시된 문제 풀이 및 그 속에 포함된 추론 과정을 파악해야 한다.

<예시 R-3 문항과 채점기준>

	학교급	내용 영역	수학적 과정	문항 유형	
	중학교	확률과 통계	추론	단독과제형	폐쇄형
성취기준	확률의 기본 성질을 알고, 확률을 계산할 수 있다.				
평가기준	내용	두 사건이 동시에 일어나지 않을 확률과 동시에 일어날 확률을 계산한다.			
	과정	R-3. 추론 과정을 이해하고 점검할 수 있다.			

[문항]

다음은 어떤 경기에서 A팀이 우승할 확률이  $p$ , B팀이 우승할 확률은  $q$ 라 할 때, 두 팀 중에 어느 한 팀이 우승할 확률을 구하는 문제의 풀이이다. ( )에 알맞은 것을 써 넣으시오.

[풀이]

A팀이 우승하지 못할 확률은  $1-p$ 이고 B팀이 우승하지 못할 확률은  $1-q$ 이다.  
 A팀이 우승하지 못하고 B팀이 우승할 확률을  $a$ 라 하면,  $a=(\quad)$ 이고, B팀이 우승하지 못하고 A팀이 우승할 확률을  $b$ 라 하면  $b=(\quad)$ 이다.  
 두 팀 중에 어느 한 팀이 우승할 확률은 A팀이 우승하지 못하고 B팀이 우승하거나 B팀이 우승하지 못하고 A팀이 우승하는 확률이므로 구하는 확률을  $r$ 라 하면,  $r=(\quad)$ 이다.

[예시 답안]

A팀이 우승하지 못할 확률은  $1-p$ 이고 B팀이 우승하지 못할 확률은  $1-q$ 이다.  
 A팀이 우승하지 못하고 B팀이 우승할 확률을  $a$ 라 하면  $a=(1-p)q$ 이고, B팀이 우승하지 못하고 A팀이 우승할

확률을  $b$ 라 하면  $b=(1-q)p$ 이다. 두 팀 중에 어느 한 팀이 우승할 확률은 A팀이 우승하지 못하고 B팀이 우승하거나 B팀이 우승하지 못하고 A팀이 우승하는 확률이므로 구하는 확률을  $r$ 은 다음과 같다.

$$r = (1-p)q + (1-q)p = q - pq + p - pq = p + q - 2pq$$

[채점기준]

채점 영역	채점 요소	점수	
		내용	과정
내용	곱사건의 확률을 맞게 계산하였는가? $a=(1-p)q, b=(1-q)p$	20%	
	합사건의 확률을 맞게 계산하였는가? $r = a + b = (1-p)q + (1-q)p = p + q - 2pq$	20%	
추론	$a$ 와 $b$ 가 곱사건의 확률임을 알았는가?		30%
	$r$ 이 두 사건의 합사건의 확률임을 알았는가?		30%
합계		40%	60%
		100%	

**다. 예시 수학적 문제해결 문항 채점기준**

수학적 문제해결 문항은 두 가지 이상의 수학적 개념, 원리, 법칙 등의 관련성을 파악하고 종합하여 수학 내적인 문제를 해결하는 능력(P-1)이나 실생활, 사회현상, 자연현상, 타 교과와 관련된 수학 외적인 문제를 수학적으로 해결할 수 있는 능력(P-2)을 평가하는 문항으로 수학 내용에 대한 이해 뿐 아니라 수학적 의사소통 능력, 수학적 추론 능력을 종합적으로 평가할 수 있는 문항이라 할 수 있다. 그러므로 채점기준 역시 문제의 이해와 계획수립, 실행, 반성 등의 각 단계 별로 수학적 의사소통과 수학적 추론에 대한 채점 요소를 포함하여 이들 능력에 대한 평가가 종합적으로 이루어질 수 있도록 해야 한다. 결국 수학적 문제해결 문항은 문항의 내용과 형식 면에서 기존의 서술형 문항과 별다른 차이가 없을 수 있지만, 채점기준에 수학적 의사소통과 수학적 추론을 모두 명시적인 채점 요소로 포함한다는 점에서 그 특징이 있다고 할 수 있다. 다음은 수학적 문제해결 문항의 이러한 특성을 반영한 채점기준의 예이다.

<수학적 문제해결 문항에 대한 채점기준의 예>

채점 영역		채점 요소	점수	
			내용	과정
이해와 계획수립	추론	문제해결의 실마리인 '기울기와 $y$ 절편이 양수이다.'를 찾았는가?		40%
	의사소통	주어진 상황을 $3.5 - a \geq 0, 4.5 - b \geq 0$ 으로 나타내었는가?		10%
실행	내용	$3.5 - a > 0$ 일 확률을 옳게 구하였는가?	10%	
		$4.5 - b > 0$ 일 확률을 옳게 구하였는가?	10%	
		구하는 확률 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 을 옳게 구하였는가?	20%	
반성	의사소통	답안을 수학적 언어로 논리정연하게 기술하였는가?		10%
합계			40%	60%
			100%	

## V. 결론 및 제언

이상에서 수학의 내용뿐만 아니라 수학적 과정 즉, 수학적 의사소통, 추론, 문제해결을 명시적인 평가요소로 포함하여 평가하기 위한 수학적 과정 문항의 개념, 평가기준, 수학적 과정 문항 개발의 기본 틀, 평가기준 별 예시 수학적 과정 문항 및 채점기준에 대하여 살펴보았다.

앞서 언급한 바와 같이 본 연구의 가장 큰 특징은 기존의 서술형 평가와는 달리 내용과 과정을 구분하여 수학적 과정을 명시적으로 평가하고, 그 결과를 점수화할 수 있는 방안을 마련하는데 중점을 두었다는 것이다. 이런 점에서 본 연구의 결과는 학교 현장에서 수학적 과정을 평가하고 점수화하기 위한 서술형 문항을 제작하고자 할 때 평가기준 및 각 평가기준에 대한 예시문항으로 활용 가능할 것으로 보이며, 본 연구의 논의를 토대로 연구자 혹은 교사에 따라 다른 형태의 평가기준 및 문항을 개발하여 사용할 수 있을 것으로 보인다. 또한 본 연구에서는 연구의 일환으로 현장 교사를 위한 ‘서술형 문항을 활용한 수학적 과정 평가 안내 자료’를 연구 개발하였는데(박혜숙 외, 2013 참고), 이는 수학적 과정 평가를 위한 교사용 연수 자료로 활용하거나 교사 스스로 수학적 과정 문항을 제작하는 안내 자료로 활용할 수 있을 것이다.

한편 본 연구에서는 기존의 서술형 평가와는 달리 내용과 과정을 구분하여 수학적 과정을 명시적으로 평가하고 그 결과를 점수화할 수 있는 방안을 마련하는데 중점을 두었으나, 실제로 학생들의 답안을 채점하는 과정에서 수학 내용과 수학적 과정을 명확히 구분하기 어려운 경우가 있을 수 있고, 이를 점수화하는 것이 용이하지 않은 경우 또한 있을 수 있다. 실제로 서술형 문항의 채점 과정에서는 기 작성된 채점기준을 적용하기 어려운 전혀 새로운 답안이 나타나기도 하고 경우에 따라서는 채점기준 및 채점 요소를 보다 세분해야 하는 경우도 발생할 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 예시 문항을 실제 평가 문항으로 활용하려면 문항 및 채점기준 등을 보다 정교화하고, 학교현장의 평가 상황에 맞게 수정, 보완하는 것이 필요할 것으로 보인다. 이에 대한 보다 다양하고 심층적인 논의가 본 연구를 계기로 활발하게 이루어지고, 학생들의 수학적 과정 능력을 신장시킬 수 있는 다양한 교수·학습 및 평가 방안에 대한 연구와 개발이 후속 연구로 이어지기를 기대한다.

더불어 본 연구에서 충분히 논의하지 못하였으나 수학적 과정 및 그 구성 요소의 개념과 의미, 평가기준 등과 관련하여 이후의 수학적 과정 평가 연구에서 그리고 학교 현장에서 수학적 과정 문항을 실제로 개발하고 활용하는 과정에서 지속적인 검토와 논의가 필요한 부분 몇 가지를 제언하면 다음과 같다.

첫째 수학적 의사소통, 추론, 문제해결의 개념이 과연 명시적으로 구분 가능한 것인가에 대한 보다 심도 깊은 논의가 필요하다. 이는 사실 본 연구의 진행 과정에서 지속적으로 논의가 된 문제이기도 하고 본 연구에서 명료한 결론을 내리지 못한 연구의 제한점이기도 하다. 특히 수학적 의사소통 능력은 대부분의 수학적 추론 및 문제해결의 근간이 되는 기초 소양인 동시에 수학적 추론과 문제해결의 결과를 최종적으로 공식화하는 과정에서 요구되는 능력이기도 하다. 또한 다양한 상황에서의 수학적 문제해결을 위해서는 수학적 의사소통 및 추론 능력이 종합적으로 요구된다는 점에서 수학적 문제해결 능력을 수학적 의사소통 능력이나 수학적 추론 능력과 대등한 독립 요소로 간주하는 것이 적절한가 하는 문제도 보다 심도 깊게 논의될 필요가 있다. 사실 본 연구에서 수학적 의사소통 능력의 경우 예시 문항과 함께 이를 대부분의 수학적 추론 및 문제해결 문항의 채점기준에 채점 요소로 반영하도록 제안한 것이나 수학적 문제해결 문항의 채점기준에 수학적 의사소통 및 추론 능력을 채점 요소로 반영한 것도 이런 점을 고려한 것이다.

둘째 수학적 의사소통, 추론, 문제해결 각각에 대하여 본 연구에서 설정한 평가기준은 각 능력의 다양한 의미를 포괄하지 못하므로 이에 대한 보완이 필요하다. 서론에서 언급한 바와 같이 본 연구의 목적은 서술형 문항을 이용할 수학적 과정 평가 방안 모색이기 때문에 본 연구에서는 서술형 문항을 통해 평가 가능하고 평가 결과를 점수화하여 활용할 수 있는 범위 내에서 예시 평가기준을 설정하였다. 그럼에도 불구하고 본 연구에서 미처 고

려하지 못한 서술형 문항 평가기준 설정이 가능할 수 있으며 후속 연구를 통해 이에 대한 논의가 지속적으로 이루어져야 할 것으로 보인다.

셋째 서술형 문항 중심의 지필 평가 이외의 수학적 과정 평가 방안 연구가 필요하다. 앞서 언급한 바와 같이 수학적 의사소통, 추론, 문제해결은 그 의미가 각각 다양하고 평가 방법 역시 다양할 수 있지만, 본 연구에서는 특히 서술형 문항 중심의 지필 평가에 초점을 두었으며, 그 밖의 다양한 평가 방법을 활용한 수학적 과정 평가 방안에 대한 논의는 본 연구의 범위를 벗어난다. 따라서 이에 대한 논의가 별도의 후속 연구를 통해 이루어질 필요가 있을 것으로 보인다. 이를테면 수학적 의사소통 능력의 경우 지필 평가뿐 아니라 발표, 토론, 구술, 면담 등 학생과 교사의 상호작용과 의사소통이 활발하게 일어나는 상황에서의 평가 방안에 대한 모색이 교육 현장에 더욱 도움이 될 수 있다는 점에서 이들 방법을 활용한 수학적 과정 평가 방안에 대한 연구가 가능할 것이다.

넷째 학교 현장에서 실질적인 수학적 과정 평가가 가능하기 위해서는 학교 급(및 학년)과 내용 영역 및 문항 유형별 예시 문항과 채점기준 개발 보급이 보다 다양하고 광범위하게 이루어질 필요가 있다. 실제로 본 연구에서 제시하는 예시 문항의 대부분은 중학교 수학에 관한 것이고 문항 유형 역시 다양하지 못하다는 한계를 지니고 있다는 점에서 보다 다양하고 풍부한 문항 개발이 이루어질 필요가 있을 것으로 보인다.

## 참 고 문 헌

- 교육과학기술부 (2011a). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호[별책 8].
- 교육과학기술부 (2011b). 중등학교 학사관리 선진화 방안. 2011년 12월 13일 보도자료.
- 김도한 외 (2009). 창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구. 한국과학창의재단.
- 도종훈·허선희 (2012). 수리논술 평가의 현황과 교육적 활용 방안. 교육논총 제17집, (pp. 93-110).
- 박혜숙·김영국·박규홍·박윤범·도종훈 (2013). 서술형 중심의 지필평가 기반 조성. 한국과학창의재단.
- 방정숙·김상화 (2006). 문제해결과 관련된 제7차 초등학교 수학과 교육과정 및 교과용 도서 분석. 학교수학, **8(3)**, (pp. 341-364).
- 이종희·김선희·채미애 (2001). 수학적 의사소통 능력의 평가 기준 개발, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, **11(1)**, (pp. 207-221).
- 이종희·김선희 (2002). 수학적 의사소통, 교우사.
- 전평국·김은희·김원경 (2002). 수학적 추론 능력 평가 기준에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학 교육 논문집>, **13**, (pp. 425-455).
- 정상권·이경화·유연주·신보미·김구연 (2012). 과정 중심의 수학교과 평가방안 연구. 한국과학창의재단.
- 한국교육과정평가원 (2007). 국가수준 학업성취도 평가 출제 매뉴얼.
- 일본문부성 (2008a). 소학교학습지도요령. 東京: 대장성인쇄국.
- 일본문부성 (2008b). 중학교학습지도요령. 東京: 대장성인쇄국.
- NCTM (1989). *The curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. 류희찬, 조원영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). 학교 수학을 위한 원리와 기준. 서울: 경문사.
- Pehkonen, E. (1991). Problem solving in mathematics. *ZDM*, **23(1)**, (pp. 1-4).
- Pehkonen, E. (1997). *Introduction to the concept "open-ended problems"*. In Pehkonen, E.(Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom*(pp.7-11). Helsinki University.

## Developing Essay Type Questions and Rubrics for Assessment of Mathematical Processes

**Do, Jonghoon**

Seowon University, 241 Musimseoro, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, 361-742, Korea.

E-mail: jhoondo@seowon.ac.kr

**Park, Yun Beom**

Seowon University

**Park, Hye Sook<sup>†</sup>**

Seowon University, 241 Musimseoro, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, 361-742, Korea.

E-mail: hyespark@seowon.ac.kr

Mathematical process is an issue in current mathematics education. In this paper discuss how to assess the mathematical process using essay type questions. For this we first suggest the concept of Mathematical Process Oriented Question which is an essay type question and possible to assess mathematical processes, that is, the mathematical communication, reasoning, and problem solving as well as mathematics knowledge. And we develop a framework for developing the mathematical process oriented question and rubric, examples of assessment standards and those questions containing rubric for assessing mathematical processes. The results of this paper can serve as basic data and examples for follow up research about mathematical process assessment.

---

\* ZDM Classification : D63, D64

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C40

\* Key Words : mathematical process, essay type question, mathematical process oriented question, rubric

<sup>†</sup> corresponding author