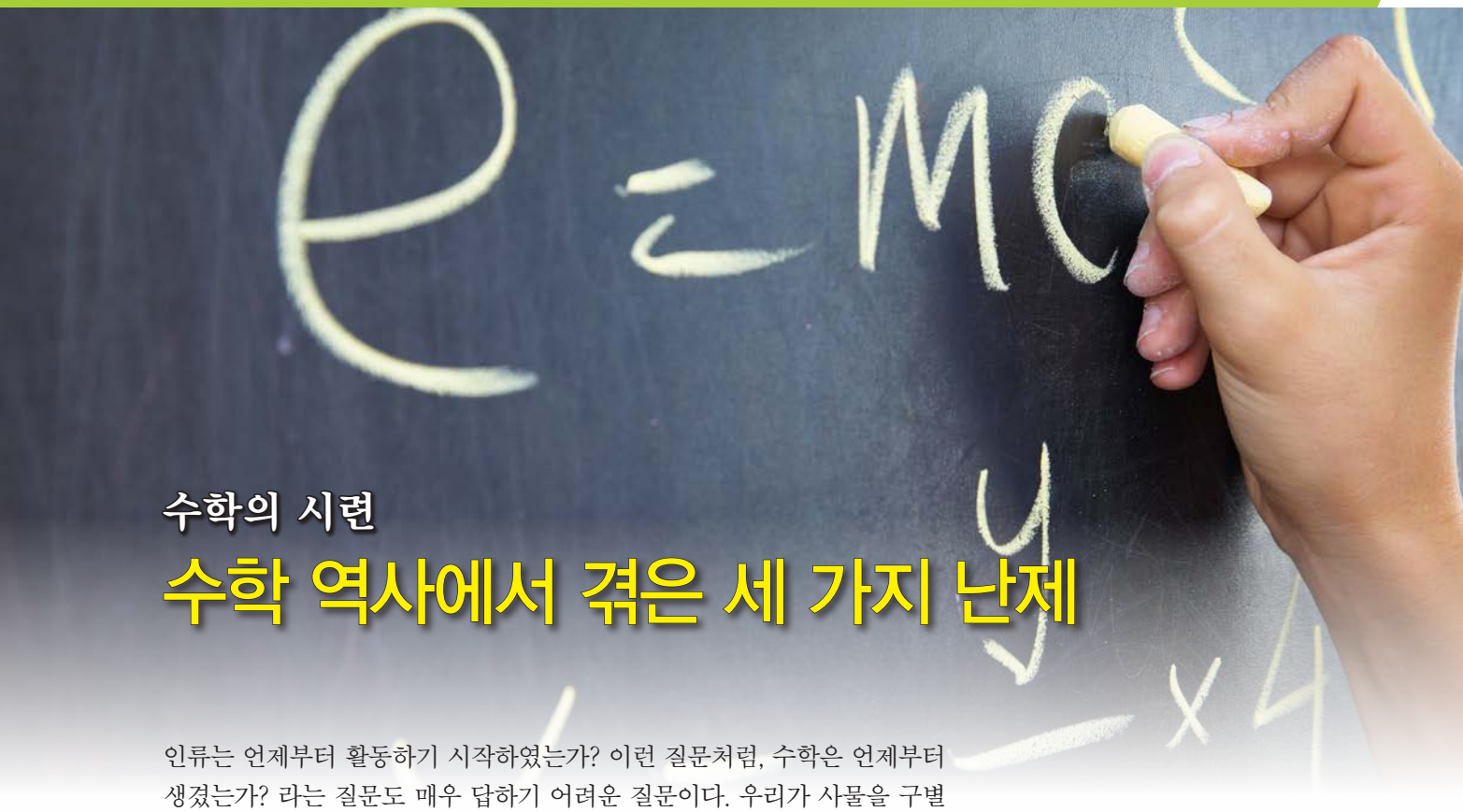


수학의 시련

수학 역사에서 겪은 세 가지 난제

인류는 언제부터 활동하기 시작하였는가? 이런 질문처럼, 수학은 언제부터 생겼는가? 라는 질문도 매우 답하기 어려운 질문이다. 우리가 사물을 구별하거나, 또는 그 반대로 서로 다름에도 불구하고 동일한 것이라고 인식하는 능력은 수학의 가장 핵심적인 사고에 들어 있으므로 수학은 적어도 인류 또는 생물의 탄생과 함께 하였다고 말할 수 있다.

인간은 생존을 위하여 먹이를 구하고, 옷을 만들어 입고, 집을 짓는다. 이러한 행위뿐 아니라, 자연에 감사하고 하늘과 땅을 숭배하는 행위에서도 수학은 함께 있었다. 많은 사람들이 생일을 기념하지만, 사실 날짜를 정하고 시간을 정하는데 얼마나 많은 측량과 수학적 개념이 들어가는지 잊고 산다. 측량술은 기하학의 기본이었고, 후일에 도량형, 문자의 순서, 통신 주파수 등 여러가지 기준을 정하는데 필수적으로 수학적 개념들이 쓰인다.

깊이 있는 수학은 고대 수메르나 이집트 또는 인도 등에서 시작하였다고 말할 수 있는데, 늘 정신적인 종교 의식, 실질적인 측량과 무덤이나 제단의 설계 및 제작, 하늘을 관측하고 시간과 날짜를 정하는 일 등과 함께 하였다.

중국의 고대 신화에서도 태극이나 음양에 관한 수학적 개념이 나타나고, 복희와 여와가 직각자(矩)와 컴퍼스(規)를 든 모습의 오래된 그림도 전해진다. 자와 컴퍼스는 고대에 법과 규율을 뜻하였다. 공자 칠십에 "종심소욕불유구(矩)"라 하였고, 서양에서도 자(ruler)는 통치자를 뜻한다.

'수(數)'는 '사물의 이치'를 뜻한다. '로고스'는 '말씀'이고, '이성'이고, '셈'이다. 윤동주의 '별 헤는 밤'이나, 이미자의 '헤일 수 없이 수많은 밤'에서 나타나듯이, 우리말에도 '헤아림'은 '셈'과 같은 어원을 가지고 있다.

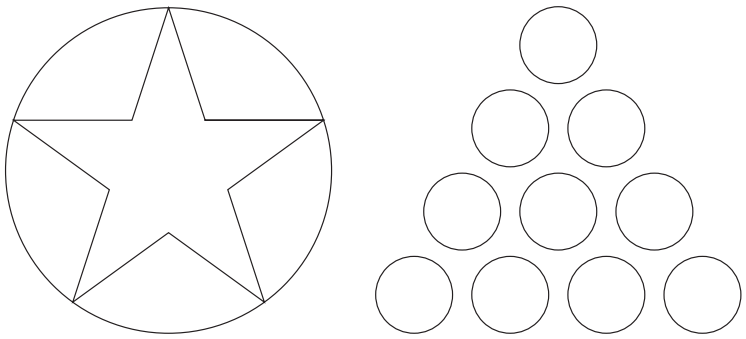
글_김홍종
서울대학교
수리과학부 교수
hongjong@snu.ac.kr

피타고라스, "수학이란 모든 배움"

비밀스럽게 전수되거나 특별한 학파를 구성하지 않았던 수학이 체계적이고 공개적인 '교육'의 형태로 나타난 것은 기원전 6세기 경 그리스의 피타고라스 덕분이다. 새로운 가르침을 얻고자 하는 많은 제자들이 모였지만, 피타고라스는 "입문하기 전에 먼저 마음을 정화하라"고 하였다. 마음이나 몸을 정화하는 훈련은 수학뿐 아니라 어떤 영역에서도 매우 중요한 것임에도 불구하고, 오늘날은 많이 잊고 산다. 피타고라스는 '철학'이나 '하모니', '코스모스' 등의 용어를 처음 사용하였다고 전해진다. 그는 여성도 남성과 평등하게 교육받아야 한다는 생각을 처음으로 펼치고 실천하였다. 그는 탈레스의 조언으로 메소포타미아 지역과 이집트 등 많은 곳에서 비법을 배웠다. 피타고라스는 세상의 근본을 물질에서 찾지 말고, 정신에서 찾아야 한다고 말하였고, 영혼이라는 개념도 처음으로 공개적으로 사용하였다. 이런 생각은 후일에 기독교의 교리에도 많은 영향을 끼쳤다. 플라톤도 여러 글에서 "수학은 인간의 영혼을 정화한다"고 하였다.

고대 로마 제국의 시인이었던 오비디우스의 그리스-로마 신화를 다룬 '변신'이라는 책의 마지막 부분에는 피타고라스가 나와서 여러 쪽에 걸쳐서 '사랑하라'고 말하고 있다. 이웃이 형제요 자매일 뿐 아니라, 동물들도 다같은 생명이라 하였다. 어떤 학자는 "피타고라스의 '철학(Philosophy)'이란 '지혜 사랑'이 아니라 '사랑의 지혜'"라고 말하기도 한다.

피타고라스가 말한 수학, 즉 '마테시스'란 그냥 '모든 배움'을 뜻하였고, 당시에는 천문, 음악, 산술, 기하가 모두 수학에 속하였다. 그가 설명한 한 옥타브의 개념과 도레미파솔라시도는 오늘날에도 음악의 기본이다. 그 학파는 오각별꼴과 지수화풍의 테트락튀스(사층삼각수)를 상징으로 삼았다. 가우디가 설계한 바르셀로나의 성가족 성당에서도 테트락튀스를 볼 수 있다.



수학의 첫 번째 번뇌 '공측성' 개념

피타고라스 학파가 세력을 잃게 된 이유 중의 하나는 '공측성'이라는 개념 때문이었다. 항상 진실만을 다루고 오로지 진실만을 이야기하려 했던 수학은 역사상 세 가지 커다란 번뇌에 빠졌다. 그 번뇌들은 '존재 가치'에 관한 것으로 그 문제를 해결하지 않고는 더 이상 의미있는 삶이 아니라고 생각되는 그러한 번뇌들이었다. 그런 커다란 번뇌가 있을 때마다 수학은 기적처럼 어려운 문제를 해결하였고, 더욱 건강해졌다. 그 처음 번뇌가 바로 '공측성'이라는 개념이다.

여기 큰 돌과 중간 크기의 돌이 있다고 하자. 이 두 돌의 무게의 비는 어떻게 구할까? 피타고라스는 "아주 작은 돌을 가져오면, 큰 돌의 무게가 작은 돌 여러 개의 무게와 같고, 중간 크기 돌의 무게도 작은 돌 여러 개의 무게와 같아지도록 할 수 있다"고 생각하였다. 현대적인 말로 바꾸어 설명하면, 큰 돌과 중간 돌은 작은 돌이라는 공약수를 가진다는 말이다. 이러한 공약수에 관한 생각은 "큰 돌과 같은 돌을 여러 개 가져오고, 중간 돌과 같은 돌을 여러 개 가져 오면, 두 무리가 무게가 같아지게 할 수 있다"는 공배수에 관한 생각과 같은 생각이다.

피타고라스는 동질인 두 물체는 공약물을 가지고, 같은 이유로 공배물을 가진다고 생각하였다. 그것은 무게에 관한 것뿐 아니라, 넓이나 길이, 온도, 밝기, 소리의 크기 등 모든 양에 다 적용된다고 생각하였다. 해와 달이 도는 주기에도 공통 주기가 있어서 양력과 음력에서 반드시 조화를 찾을 수 있다고 믿었고, 행성들도 일정한 시간이 지나면 또다시 같은 위치에 온다고 믿었다.

이러한 믿음을 공측성(commensurability)이라 한다. 피타고라스 학파가 그러한 믿음을 필요로 했던 까닭에는 직사각형 모양의 땅 넓이를 설명하기 위함이었고, 이는 많은 측량의 정신적 바탕이 되었기 때문이었다. 그러나 불행히도 공측성이 보편적이 아님을 알게 되었다. 오늘날 시시한 책들에서 주로 '무리수의 발견'이라고 말하는 것이다. 공측성이 보편성을 가지지 않는다는 사실은 직각삼각형에 관한 유명한 '피타고라스의 정리'가 품고 있다. 많은 사람들이 이 사실을 피타고라스가 "말하지 말라"고 하였다고 하지만, 사실 그 말뜻은 '로고스(합리적인 수)가 아닌 수', 즉 '무리수'라는 뜻이다. 물론 피타고라스가 "말하지 말라"는 뜻을 다른 의미로 강조하기도 하였지만, 그것은 마치 아폴로 신전에 쓰여진 "너 자신을 알라"와 같은 뜻이라 할 수 있다. 요즈음은 많은 전문가들이 "이것은 내가 발견한 것", "나의 업적", "나의 지적 재산" 등을 말하지만, 피타고라스는 그것을 너 개인의 업적으로 하지 말고, 우리 인류의 공동 지적 재산으로 하라고 하였다. 하지만 피타고라스가 아무리 훌륭한 분이라 하더라도, 공측성이라는 엉터리 교리로서는 체면을 잃을 수밖에 없다. 피타고라스 학파의 측량에 관한 기본 이론은 순엉터리였다. 그러나 그 제자들은 비로소 수의 본질을 이해하였고, 수의 체계를 바르게 확립할 수 있게 되었다. 피라미드의 부피를 알 수 있었고, 지렛대의 원리나 부력의 원리를 설명하고, 배가 바다 한가운데서 뒤집어지지 않고 안전하게 항해하려면 어떻게 설계하여야 하는지 알 수 있게 되었다. 수학은 처음으로 번뇌에서 깨어나 활기를 찾았다.

수학의 두 번째 번뇌 '무한소'

수학이 부딪치게 된 두 번 째 큰 번뇌는 '무한소'에 관한 것이다. 1보다 작고, 0.1보다 작고, 0.01보다 작고, 한없이 작지만 0이 아닌 수를 어떻게 다루어야 할까? 이 개념은 뉴턴과 라이프니츠가 오늘날 '미적분학'이라 부르는 '새로운 셈법(Calculus)'을 발견하면서 겪어야 했던 난제였다. 바늘 끝에는 천사가 얼마나 많이 서 있을 수 있을까 등 말장난이나 하던 학자들이 많던 시절에 아일랜드의 버클리라는 유명한 추기경은 무한소라는 유령을 동원하여 "영 나누기 영" 같은 엉터리 수학이 탄생하는 것을 강력히 비난하였다. 미적분학이 베르누이일가와 오일러, 그리고 여러 제자들에 의하여 제대로 토대를 다지게 되는데에는 200여 년이나 걸렸다. 이제 우리는 천체의 운동을 설명하고, 일식과 월식, 밀물과 썰물이 언제 일어나는지 미래를 잘 예측할 수 있으며, 인공 위성을 띄우고 태양계를 넘어 탐험도 할 수 있다.

수학의 세 번째 번뇌 '집합론'

마지막으로, 수학에 시련을 주었던 가장 최근의 번뇌를 살펴보자. 최근이라 하지만 사실 그 시작은 100년도 더 전의 일이다. 19세기 말 독일의 칸토어는 수학자들이 오랫동안 금기시하였던 '무한'을 생각하기 시작하였다. 고대 그리스의 알렉산드리아에서 활동하던 에우클레이데스는 '원소'라는 유명한 책에서 우리가 믿어야 하는 주옥같은 십계명을 서술하였는데, 그 중 가장 마지막 믿음이 "전체는 부분보다 크다"는 것이었다. 칸토어는 여러가지 무한을 비교하면서, '무한한 것'은 자신의 부분과 같을 수 있다는 것을 발견하였고, 더 나아가 서로 급이 다른 무한의 세계가 무한히 많음을 이해하였다. 칸토어를 비웃는 학자들도 적지 않았다. 그들은 무한은 수학에서 다루는 대상이 아니라고 하였다. 그들은 수학에서 가장 소중하게 여기는 '직관'을 무시하여서는 안된다고 하였다. 수학은 문자로 나타낼 수 없는 그 이상의 것이라고 하였다.

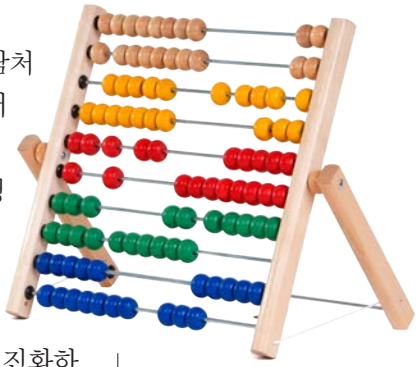
그런 비난 속에서도 칸토어는 두 집단의 크기를 비교하는 법을 설명하였다. 유한 집단에서는 각 집단의 원소들을 세어서 크기를 비교할 수 있지만, 무한 집단에서는 원소들을 일일이 셀 수 없으므로, 두 집단의 크기를 비교하려면 다른 방법이 있어야 한다. 그 방법은 수의 이름을 가지고 있지 않던 원시인들도 할 수 있는 방법으로, 두 집단의 원소들을 서로 짝을 지어 보면 된다. 짝을 잘 지을 수 있으면 두 집단은 같은 크기이고, 그럴 수 없다면 두 집단의 크기는 다르다. 이런 원시적인 방법이 무한들을 비교한다.

이런 관점에서 보면, 자연수 전체 집단은 유리수 전체 집단과 크기가 같고, 길이가 1인 선분에 들어 있는 점들의 개수는 길이가 무한인 직선에 들어 있는 점들의 개수와 같다. 칸토어는 직선에 들어 있는 점의 개수가 자연수와 같을 것이라고 생각하면서 12년 이상을 증명하려고 하였으나 그것을 밝히지 못하였다. 그는 1873년 12월 7일 데데킨트에게 보낸 편지에서 비로소 직선이라는 무한이 자연수 전체라는 무한보다 급이 다르다는 것을 밝혔다. 이 날이 바로 '집합론'이 탄생한 날이라고 말할 수 있다. 후일에 칸토어는 자연수 전체뿐 아니라 어떠한 것에도 그보다 더 큰 것이 있다는 것을 밝히는데, 이 논법이 바로 '대각 논법'이다. 데데킨트에게 보낸 또 다른 편지에서 칸토어는 "직선에 들어 있는 점들과 평면에 들어 있는 점들, 심지어 공간을 채우고 있는 점들은 그 개수가 같다"는 것을 밝히면서 "보고 있지만 믿을 수가 없어요"라고 하였다.

사람들이 모여 동아리를 구성할 수 있고, 동아리들은 모여 동아리 연합을 구성할 수 있고, 각 나라의 동아리 대표들이 모여 세계 동아리 연합을 구성할 수 있듯이, 집합론은 우리가 상상할 수 있는 모든 것을 다루고자 하였다. 그리고 이 개념이, 세상 모든 것은 아니더라도 적어도 산술이나 수학적인 명제들을 모두 설명할 수 있기를 기대하였다. 집합론은 그동안 제대로 설명할 수 없던 '수'를 설명할 수 있었고, '관계'가 무엇인지, '함수'가 무엇인지 비로소 제대로 설명할 수 있게 되었다. 그러나 '모든 것'이라는 개념이 문제를 일으킨다는 것을 칸토어도 잘 알고 있었고, 그를 비웃는 사람들의 목소리는 더욱 커졌다. 1902년 영국의 어린 러셀은 독일의 저명한 수리철학자인 프레게에게 보낸 편지에서 어떤 패러독스를 알려준다. 그 패러독스는 다음과 같은 것이다. "사람들 중에는 자신을 존경하는 사람도 있고, 그렇지 않는 사람도 있어요. 나는 자신을 존경하지 않는 사람을 존경해요. 그리고 내가 존경하는 사람은 자신을 존경하지 않는 사람이예요. 나는 나를 존경할까요?" 나는 나를 존경할 수도 없고, 나를 존경하지 않을 수도 없는 난감한 상황에 빠진다. 결국 이러한 패러독스는 집합론의 문제점이 깊은 성찰의

결과에서 유래한 것이 아니라 집합이라는 그 개념 자체에 있다는 것을 말해 준다.

성서의 어느 구절에서 "그 동네 사람들은 모두 거짓말장이"라고 말하는 그 동네 사람처럼, 무한을 설명하려던 수학은 자체적인 모순을 드러내기 시작하였다. 이때부터 칸토어를 지지하던 수학자들은 수천년 동안 발전이 거의 없던 논리학을 진지하게 다시 들여다 보기 시작하였고, 언어가 무엇인지 문법이 어떤 것인지, '실제'가 무엇인지 깊이 생각하기 시작하였다. 힐베르트를 비롯한 형식론자들은 우리에게 주어진 유한한 기호와 유한한 규칙으로 산술을 비롯한 '모든 이론'들을 설명하려 했고, 더 나아가 '완전한 이론'을 꿈꾸었다. 힐베르트의 제자인 체르멜로는 비굴할 정도로 겸손한 자세로 집합이 무엇인지 설명하여 집합론이 '거듭 나게' 하였고, 점차 그의 이론은 수학계의 표준으로 진화하였다. 체르멜로도 러셀의 패러독스를 수년 전에 이미 알고 있었다. 필자가 비굴할 정도로 겸손하다고 말한 까닭은 체르멜로가 러셀의 패러독스를 해결한 방법은 "나는 나를 존경하느냐?"는 질문은 의미가 없다고 말하기 때문이다. 그 까닭은 '나'는 사람이 아니기 때문에 '존경하는 행위'를 적용할 수 없기 때문이다. 마치, 여성에게 면도하기를 요구하지 않는 것처럼.



인간은 너무나 나약하고 미미한 존재이므로 인간이 모르는 것이 대부분이고, 앞으로도 영원히 알 수 없다(ignorabimus)는 철학이 곳곳에 떠돌아 다녔다. 힐베르트는 1930년 고향에서 가진 은퇴식에서 "우리는 알아야 한다. 우리는 알고야 말 것이다."라는 유명한 말을 하였고, 이 문구는 그의 묘비에 쓰여 있다. 그의 은퇴식 모임에 참석한 오스트리아 비엔나에서 온 젊은 괴델은 폰 노이만에게 모순이 없는 유한 이론이 산술을 설명할 수 있다면, 그 이론은 "자신이 모순이 없음"을 밝힐 수 없음을 설명하였다.

힐베르트의 완전한 이론에 대한 꿈은 산산 조각이 났고, 이 소문은 멀리 영국의 한 대학생인 앨런 튜링에게도 전해 졌다. 튜링은 기계적인 과정이 무엇인지 명확하게 설명할 수 있는 방법을 발견하였고, 이는 인류가 오랫동안 해온 '셈'에 대한 개념을 획기적으로 발전시켰다. 튜링은 이차세계대전 당시에 독일군 암호 해독을 위한 전자 컴퓨터를 만들었고, 미국도 폰 노이만의 지휘 아래 유사한 기계를 만들어 냈다. 괴델과 튜링 등의 업적으로 기계언어가 생기고, 보편 기계가 무엇인지 이해할 수 있게 되었으며, 더 나아가 기계가 할 수 없는 일도 이해하게 되었다. 비슷한 시기에 미국의 섀넌은 전기 회로와 통신이 수학과 깊은 관련이 있다는 것을 발표하였고, 이를 계기로 정보이론과 통신 혁명이 시작되었다. 오늘날 우리가 버스 요금을 결제하고, 무선 통신을 하고, 인터넷에서 원하는 자료를 순식간에 찾고, 만화 영화를 즐기게 하는 디지털 혁명도 모두 순수한 마음을 가진 사람들이 세상을 이해하는 과정에서 얻어진 산물이라 할 수 있다. 이렇게 보면 인류 문명의 발전은 셈법의 발전과 함께 하였다고 말해도 과언이 아니다.

수학교육의 중심 '추론과 직관'

수학은 여러 번뇌를 겪으면서 그럴 때마다 껍질을 깨고 나와 한 층위 높은 곳으로 비약하였다. 수학의 교육에서 가장 중요하게 여겨야 할 부분은 '추론과 직관'인데, 어려서는 논리적이고 이성적인 추론을 하는 훈련을 하여, 선각자들을 이해하고 나아가 자신이 생각하는 것을 잘 설명할 수 있는 능력을 길러야 한다. 그리고 성장하면서 그것이 전부가 아님을 알게 되고, 직관이나 영감이 얼마나 중요한지 이해하면서 자신을 다시 발견하게 된다. ST