

An Inventory Problem with Lead Time Proportional to Lot Size and Space Constraint

Dongju Lee[†]

Dept. of Industrial & Systems Engineering, Kongju National University

로트크기에 비례하는 리드타임과 공간 제약을 고려한 재고관리 정책

이 동 주[†]

공주대학교 산업시스템공학과

This paper is concerned with the single vendor single buyer integrated production inventory problem. To make this problem more practical, space restriction and lead time proportional to lot size are considered. Since the space for the inventory is limited in most practical inventory system, the space restriction for the inventory of a vendor and a buyer is considered. As product's quantity to be manufactured by the vendor is increased, the lead time for the order is usually increased. Therefore, lead time for the product is proportional to the order quantity by the buyer. Demand is assumed to be stochastic and the continuous review inventory policy is used by the buyer. If the buyer places an order, then the vendor will start to manufacture products and the products will be transferred to the buyer with equal shipments many times. The mathematical formulation with space restriction for the inventory of a vendor and a buyer is suggested in this paper. This problem is constrained nonlinear integer programming problem. Order quantity, reorder points for the buyer, and the number of shipments are required to be determined. A Lagrangian relaxation approach, a popular solution method for constrained problem, is developed to find lower bound of this problem. Since a Lagrangian relaxation approach cannot guarantee the feasible solution, the solution method based on the Lagrangian relaxation approach is proposed to provide with a good feasible solution. Total costs by the proposed method are pretty close to those by the Lagrangian relaxation approach. Sensitivity analysis for space restriction for the vendor and the buyer is done to figure out the relationships between parameters.

Keywords : Continuous Review Inventory System, Variable Lead Time, Space Restriction, Supply Chain Management

1. 서 론

기업들은 경쟁력 향상을 위해 자사의 비용절감만으로는 한계에 봉착하여 최근에는 기업 간 협력을 통한 비용

절감에 노력을 경주해 왔다. 이에 1개의 공급업체와 1개의 구매업체의 협력을 통한 재고비용절감에 대하여 연구하였다. 좀 더 현실적인 상황을 반영하기 위해 다음의 사항을 가정하였다.

- 소비자들의 수요는 확률적이다.
- 공급자의 리드타임은 구매자의 주문량에 비례한다.
- 공급업체와 구매업체의 저장공간은 각각 제한적이다.

Received 12 October 2015; Finally Revised 2 December 2015;
Accepted 3 December 2015

[†] Corresponding Author : djlee@kongju.ac.kr

구매자는 연속적 재고관리 정책을 사용한다. 연속적 재고 관리 정책이란 재고량을 실시간으로 감시하다가 미리 정해둔 특정량(r)까지 감소하면 일정량(Q)을 주문하는 정책이다. 여기서 r 과 Q 는 의사결정변수로 재고관련 비용을 최소화하도록 결정되어야 한다. 연속적 재고 관리 정책에 대한 연구는 Hadley and Whitin[3] 이후로 많은 연구들이 이루어졌다.

Ben-Daya and Hariga[1]는 수요가 확률적이고 공급자의 리드타임이 구매자의 주문량에 비례하는 경우에 대한 문제를 정의하고 해법을 제시하였다. Lee[6]는 공급자주도 재고관리(VMI, Vendor Managed Inventory)문제를 추정을 통해 목적식을 간단히 하고 2차 계획법으로 해를 구하는 방법을 제시하였다.

공간계약은 간단한 예산계약으로 변환이 가능한데, 공간계약을 가진 연속적 재고관리정책에 대한 연구들을 살펴보면 다음과 같다. Hariga[4]는 주문자가 연속적 재고관리 정책을 쓰며 저장공간 크기가 제한적일 때 저장공간 크기를 초과하는 양은 공급자에게 추가비용을 지급하고 되돌려주는 경우에 대한 최적해를 탐색하는 해법을 제시하였다. Zhao 등[11]은 다품종과 공간계약을 고려한 연속적 재고관리 문제에 대한 해법을 제시하였다. Tamjizad and Mirmohammadi[8]는 단품종이고 주문량에 따른 할인과 공간계약이 존재하며 수요가 포아송 분포에 따라 도착한다고 할 때 최적해의 특성을 찾고 최적해를 찾는 해법을 제시하였다. Lee[5]는 수량할인과 예산계약이 있는 연속적 재고관리 문제에 대한 해법을 라그랑주 완화를 이용한 해법을 제시하였다. 이외에도 연속적 재고관리 문제에 예산계약을 고려한 연구들은 Lee et al.[7], Ghalebsaz-Jeddi et al.[2], Wang and Hu[9, 10] 등이 있다.

본 연구에서는 구매자와 공급자의 총비용을 최소화하며 구매자가 연속적 재고관리 정책을 사용하는 경우를 고려하였다. 특히, 구매자와 공급자 각각이 재고량에 제한(공간계약)이 있는 경우를 최초로 고려하고 이에 대한 해법을 제시하였고, 실험을 통해 제안된 해법이 구한 총비용과 하한의 총비용의 차이가 크지 않음을 보였다. 또한, 민감도분석을 통해 한 논문으로 그 공간계약이 다른 의사결정변수들에 어떤 영향을 미치는지 파악하는 데 그 의의가 있다.

이어지는 제 2장에서는 문제에 대해 설명하고 구매자와 공급자의 총비용함수와 공간계약을 설명하고 수학적 형을 제시한다. 제 3장에서는 라그랑주 완화를 이용한 해법과 실현가능해를 구하는 해법을 제시하였다. 제 4장에서는 실험을 통해 공간계약의 크기가 변함에 따라 재고량, 재주문점 등의 의사결정변수에 미치는 영향을 파악하였다. 마지막으로 제 5장에서는 결론과 미래연구방향에 대해 제시하였다.

2. 문제 정의

구매자의 수요는 확률적이며, 구매자는 연속적 재고 관리 정책인 (Q, r) 정책을 사용한다. 리드타임은 운송이나 비생산시간 등으로 인한 고정된 지체시간과 더불어 공급자의 로트크기에 비례한다고 하면 다음과 같다.

$$LT(Q) = pQ + b$$

여기서 p : 공급자의 단위제품당 생산시간(단위 : 년), Q : 주문량, b 는 고정지체시간이다.

구매자는 nQ 개를 공급자에게 주문하며 이때 주문비용은 A_b 이다. 공급자는 생산율 $1/p$ 로 nQ 개를 생산하는데 이때 준비비용은 A_v 이다. 구매자는 제품을 Q 개씩 n 번 공급받으며, 한 번 받을때마다 운송비용은 F 이다. 즉, 구매자는 한번에 nQ 개를 주문하고, 공급자는 Q 개씩을 n 번에 나누어 운송한다. 구매자가 (Q, r) 정책을 이용하므로 구매자는 Q 개씩 n 번 공급받은 직후에 재고수준이 재주문점인 r 에 도달하면 공급자에게 다시 nQ 개를 다시 주문한다. 연간 생산율은 연간 수요율보다 항상 크다(즉, $1/p > D$).

기호들을 소개하면 다음과 같다.

- W_v : 공급자의 최대 허용 재고량
- W_b : 구매자의 최대 허용 재고량
- Z : 표준정규분포의 확률변수, $N(0, 1)$
- $L(r)$: 제품의 재주문점이 r 일 때 주기 말의 기대부족 수요, $L(r) = \int_r^\infty (x-r)f(x)dx$, 여기서 x 는 리드타임 동안의 수요이며 $f(x)$ 확률밀도함수(p.d.f., probability density function)이다.
- π : 구매자의 개당 품질비용
- h_v : 공급자의 개당 재고유지비용
- h_b : 구매자의 개당 재고유지비용
- A_v : 공급자의 준비비용
- A_b : 구매자의 주문비용
- F : 구매자의 운송비용

구매자의 비용함수(BC, Buyer Cost)는 다음과 같다.

$$BC = \left(A_b \frac{D}{nQ} + F \frac{D}{Q} \right) + h_b \left(\frac{Q}{2} + r - \mu_L \right) + \pi \frac{D}{Q} \int_r^\infty (x-r)f(x)dx$$

위 식에서 첫 번째 항은 연간주문비용이며 두 번째 항

은 연간평균재고유지비용이며 세 번째 항은 연간품질비용이다. 수요가 정규분포를 따르므로, 리드타임 동안의 수요의 분포는 평균(μ_L)이 $D \cdot LT(Q)$, 표준편차(σ_L)가 $\sigma \sqrt{LT(Q)}$ 인 정규분포를 따른다.

그러므로, 리드타임 동안의 기대부족 수요는 식 (1)과 같다.

$$\int_r^\infty (x-r)f(x, D \cdot LT(Q), \sigma \sqrt{LT(Q)}) dx = \sigma \sqrt{pQ+b} \int_z^\infty (z-z)\phi(z) dz = \sigma \sqrt{pQ+b} L(z) \quad (1)$$

여기서 $\phi(z)$ 는 표준정규분포의 확률밀도함수(p.d.f., probability density function)이며

$$z = \frac{r - D \cdot LT(Q)}{\sigma \sqrt{LT(Q)}}$$

이다. z 는 안전재고량을 결정하는 안전계수(safety factor)이다. 그러므로, 재주문점 r 은

$$r = D \cdot LT(Q) + z\sigma \sqrt{LT(Q)} = D \cdot (pQ+b) + z\sigma \sqrt{pQ+b}$$

그리고 안전재고량은 식 (2)와 같다.

$$r - \mu_L = z\sigma \sqrt{pQ+b} \quad (2)$$

구매자의 비용함수를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$BC = \left(\frac{A_b + F}{n}\right) \frac{D}{Q} + h_b \left(\frac{Q}{2} + z\sigma \sqrt{pQ+b}\right) + \pi \frac{D}{Q} \sigma \sqrt{pQ+b} L(z)$$

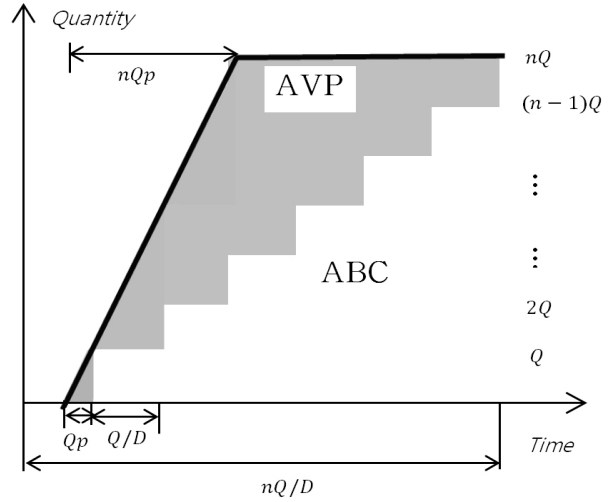
공급자의 재고량(Vendor's Inventory Level)은 공급자의 누적생산량(AVP, Accumulated Vendor Production)에서 구매자의 누적소비량(ABC, Accumulated Buyer Consumption)을 차감한 것이다. <Figure 1>에 AVP에서 ABC를 차감한 것을 음영으로 표시하였다.

공급자의 누적생산량(AVP)은 <Figure 2>에 음영으로 표시되어 있는데 다음과 같이 계산할 수 있다.

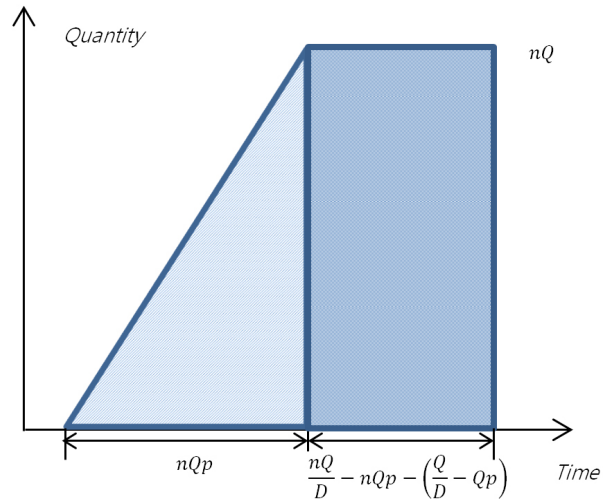
$$nQp \times \frac{nQ}{2} + \left[\frac{nQ}{D} - nQp - \left(\frac{Q}{D} - Qp\right)\right] \times nQ$$

이를 주문주기인 nQ/D 로 나누면 평균은 다음과 같다.

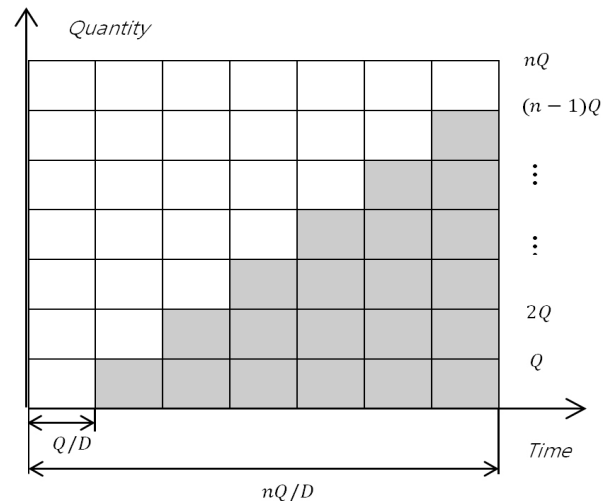
$$nQ - \frac{nQDp}{2} - Q + QDp$$



<Figure 1> Vendor's Inventory Level



<Figure 2> Accumulated Vendor Production



<Figure 3> Accumulated Buyer Consumption

구매자의 누적소비량(ABC)은 <Figure 3>에 음영으로 표시되어 있는데 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$Q \times \frac{Q}{D} + 2Q \times \frac{Q}{D} + \dots + (n-1)Q \frac{Q}{D} = \frac{n(n-1)}{2} Q \times \frac{Q}{D}$$

이를 주문주기인 nQ/D 로 나누면 평균은 다음과 같다.

$$\frac{(n-1)Q}{2}$$

그러므로 공급자의 평균재고량은

$$\begin{aligned} nQ - \frac{nQDp}{2} - Q + QDp - \frac{(n-1)Q}{2} \\ = \frac{Q}{2}(n(1-Dp) - 1 + 2Dp) \end{aligned}$$

공급자의 비용함수는 다음과 같다.

$$VC = \frac{A_v D}{nQ} + h_v \frac{Q}{2} (n(1-Dp) - 1 + 2Dp)$$

구매자와 공급자의 비용을 합한 총비용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} TC = \frac{D}{Q} \left(F + \frac{A_b + A_v}{n} + \pi \int_r^\infty (x-r)f(x)dx \right) \\ + \frac{Q}{2} [h_b + h_v(n(1-Dp) - 1 + 2Dp)] + h_b(r - \mu_L) \quad (3) \end{aligned}$$

식 (1)과 식 (2)를 식 (3)에 대입하면

$$\begin{aligned} TC(Q, r, n) = \frac{D}{Q} \left(F + \frac{A_b + A_v}{n} \right) \\ + \frac{Q}{2} [h_b + h_v(n(1-Dp) - 1 \\ + 2Dp)] + h_b z \sigma \sqrt{pQ+b} \\ + \frac{\pi D \sigma \sqrt{pQ+b} L(z)}{Q} \end{aligned} \quad (4)$$

본 연구에서 고려하는 문제의 수학적 모형은 다음과 같다.

$$\mathbf{P:} \quad \text{Min } TC(Q, r, n) \quad (5)$$

subject to

$$Q + z\sigma\sqrt{pQ+b} \leq W_b \quad (6)$$

$$(n-1)Q \leq W_v \quad (7)$$

$$Q, z \geq 0 \quad (8)$$

$$n \geq 1 \text{인 정수} \quad (9)$$

식 (5)는 목적함수로서 총비용을 나타낸다. 식 (6)은 구매자의 재고량 제한으로 구매자의 최대 재고량 $Q + z\sigma\sqrt{pQ+b}$ 이 W_b 를 초과할 수 없다는 것이다. 식 (7)은 공급자의 재고량 제한으로 공급자의 최대가능재고량 $(n-1)Q$ 가 W_v 를 초과할 수 없다는 것이다. 식 (8)은 의사결정변수 Q, z 은 모두 비음의 실수라는 것이며 식 (9)은 의사결정변수 n 이 양의 정수라는 것이다.

식 (6)에서 구매자의 최대재고량이 $Q + z\sigma\sqrt{pQ+b}$ 인 이유는 리드타임동안의 평균수요 $D \cdot (pQ+b)$ 이 소모되고 나면 주문량 Q 가 도착할 때의 평균재고량은 안전재고량 $z\sigma\sqrt{pQ+b}$ 과 주문량 Q 의 합이기 때문이다. 또한, 식 (7)에서 공급자의 최대가능재고량이 $(n-1)Q$ 인 경우는 생산율 $1/p$ 가 커서 D/Q 기간이내에 $(n-1)Q$ 개를 생산하는 경우이다.

3. 제안하는 해법

이번 장에서는 원문제(P)에 대한 라그랑주 완화문제(Lagrangian relaxation problem)를 정의하고 제1계 필요조건(the first order necessary condition)을 이용하여 해법을 제시한다.

3.1 라그랑주 완화 문제와 제1계 필요조건

라그랑주 계수 λ 를 이용하여 식 (6)과 식 (7)을 목적식으로 올린 라그랑주 완화문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L : L(Q, z, n, \lambda_v, \lambda_b) = TC(Q, z, n) \\ - \lambda_v (W_v - (n-1)Q) \\ - \lambda_b (W_b - (Q + z\sigma\sqrt{pQ+b})) \end{aligned} \quad (10)$$

Subject to (8)

n 을 비음의 실수라고 가정하고 라그랑주완화문제를 다시 쓰면 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} L(Q, z, n, \lambda_v, \lambda_b) = \frac{D}{Q} \left(F + \frac{A_b + A_v}{n} \right) \\ + \frac{Q}{2} [h_b + h_v(n(1-Dp) - 1 \\ + 2Dp)] + h_b z \sigma \sqrt{pQ+b} \\ + \frac{\pi D \sigma \sqrt{pQ+b} L(z)}{Q} \\ + \lambda_v ((n-1)Q - W_v) \\ + \lambda_b (Q + z\sigma\sqrt{pQ+b} - W_b) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)을 $Q, r, n, \lambda_v, \lambda_b$ 각각에 대해 편미분하고 이를 = 0으로 두면 목적 함수를 최소화하는 문제의 제1계 필요 조건을 구할 수 있는데 식 (12)~식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q} = & -\frac{D}{Q^2} \left(F + \frac{A_b + A_v}{n} \right) \\ & + \frac{1}{2} [h_b + h_v(n(1-Dp) - 1 \\ & + 2Dp] + \frac{h_v z \sigma p}{2\sqrt{pQ+b}} \\ & + \pi D \sigma l(z) \frac{\frac{pQ}{2\sqrt{pQ+b}} - \sqrt{pQ+b}}{Q^2} \\ & + \lambda_v(n-1) + \lambda_b \left(1 + \frac{z\sigma p}{2\sqrt{pQ+b}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} = & h_b \sigma \sqrt{pQ+b} - \frac{\pi D \sigma \sqrt{pQ+b} \bar{F}(z)}{Q} \\ & + \lambda_b \sigma \sqrt{pQ+b} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n} = -\frac{D}{Q} \left(\frac{A_b + A_v}{n^2} \right) + \frac{Q}{2} h_v ((1-Dp) + \lambda_v Q) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_v} = W_v - (n-1)Q = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_b} = W_b - Q - z\sigma \sqrt{pQ+b} = 0 \quad (16)$$

식 (12)를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} \frac{2D}{Q^2} \left[\left(F + \frac{A_b + A_v}{n} \right) + \pi \sigma L(z) \sqrt{pQ+b} \right] \\ = [h_b + h_v(n(1-Dp) - 1 + 2Dp] \\ + \frac{\sigma p}{\sqrt{pQ+b}} \left(h_b z + \frac{\pi DL(z)}{Q} + \lambda_b z \right) \\ + 2\lambda_v(n-1) + 2\lambda_b \end{aligned}$$

이를 Q 에 대해 정리하면 식 (17)과 같다.

$$Q = \sqrt{\frac{Q_N}{Q_D}} \quad (17)$$

여기서 $Q_N = 2D \left[\left(F + \frac{A_b + A_v}{n} \right) + \pi \sigma L(z) \sqrt{pQ+b} \right]$

$$\begin{aligned} Q_D = & [h_b + h_v(n(1-Dp) - 1 + 2Dp] \\ & + \frac{\sigma p}{\sqrt{pQ+b}} \left(h_b z + \frac{\pi DL(z)}{Q} + \lambda_b z \right) \\ & + 2\lambda_v(n-1) + 2\lambda_b \end{aligned}$$

식 (13)을 정리하면 식 (18)과 같다.

$$\bar{F}(z) = \frac{(h_b + \lambda_b)Q}{\pi D} \quad (18)$$

식 (14)를 다시 쓰면

$$n^2 = \left(\frac{2D(A_b + A_v)}{Q^2(h_v((1-Dp) + 2\lambda_v))} \right)$$

이를 다시 정리하면 식 (19)와 같다.

$$n^2 = \sqrt{\frac{2D(A_b + A_v)}{Q^2(h_v(1-Dp) + 2\lambda_v)}} \quad (19)$$

3.2 제안하는 해법

그러므로, 식 (17)~식 (19)을 동시에 만족하는 Q, z, n , 구하고 제약식인 식 (6)과 식 (7)을 만족하지 않으면 식 (15)와 식 (16)을 만족하는 λ_v, λ_b 를 구하면 된다.

식 (17)~식 (19)은 λ_v, λ_b 에 영향을 받으므로, 식 (15)와 식 (16)을 λ_v, λ_b 에 대한 함수로 각각 가정하면,

$$\begin{aligned} g_v(\lambda_v) &= (n-1)Q - W_v \\ g_b(\lambda_b) &= Q - z\sigma \sqrt{pQ+b} - W_b \end{aligned}$$

제안하는 해법은 임의의 λ_v, λ_b 대해 식 (17)~식 (19)를 동시에 만족하는 Q, z, n ,를 세 개의 값이 수렴할 때까지 되풀이하며 풀고, λ_v, λ_b 가 각각 식 (15), 식 (16)을 만족할 때까지 λ_v, λ_b 를 바꿔가면서 푸는 것이다.

라그랑주 완화법에 기반한 알고리즘을 소개하면 다음과 같다.

Algorithm 1 : 라그랑주 완화법으로 하한을 제공하는 해법

Step 1 : $g_v(\lambda_v^1) > 0, g(\lambda_v^2) < 0$ 인 λ_v^1, λ_v^2 와 $g_b(\lambda_b^1) > 0, g(\lambda_b^2) < 0$ 인 λ_b^1, λ_b^2 를 각각 구한다.

Step 2 : 각 λ_v^1, λ_v^2 와 λ_b^1, λ_b^2 대해

a) $L(z) = 0, n = 1$ 으로 두고 식 (17)로부터 Q 를 구한다.

b) Q 를 식 (18)에 대입하여 z 와 식 (19)에 대입하여 n 을 각각 구한다. $Q, z, n,$ 이 수렴할 때까지 식 (17)~식 (19)를 반복해서 푼다.

Step 3 : $\lambda_b^{new} = \frac{\lambda_b^1 + \lambda_b^2}{2}$ 로 두고 Step 2를 이용하여 Q, z, n 를 구한다. 만약 $g_b(\lambda_b^{new}) > 0$ 이면, $\lambda_b^1 = \lambda_b^{new}$, 아니면, $\lambda_b^2 = \lambda_b^{new}$ 로 둔다. 만약 $(g_b(\lambda_b^1), -g_b(\lambda_b^2)) < \varepsilon$ 이면 Step 4로 가고, 아니면 step 3으로 돌아간다. 여기서 ε 은 미리 정의된 임의의 작은 값이다.

Step 4 : $\lambda_v^{new} = \frac{\lambda_v^1 + \lambda_v^2}{2}$ 로 두고, 만약 $g_v(\lambda_v^{new}) > 0$ 이면, $\lambda_v^1 = \lambda_v^{new}$; 아니면, $\lambda_v^2 = \lambda_v^{new}$ 로 둔다. 만약 $(g_v(\lambda_v^1), -g_v(\lambda_v^2)) < \varepsilon$ 이면 멈추고, 아니면 step 2로 돌아간다.

Algorithm 1에서 구한 해인 λ_v, λ_b, n 을 이용하여 제약식들을 만족하는 Q^*, n^*, z^* 를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

Algorithm 2 : 실현가능해를 제공하는 해법.

Step 1 : Algorithm 1에서 구한 λ_v, λ_b, n 을 불러온다.

Step 2 : $\lfloor n \rfloor$ 은 n 보다 작은 최대정수라 할 때 $n_1 = \lfloor n \rfloor, n_2 = \lfloor n \rfloor + 1$ 로 둔다. $n = n_1$ 혹은 n_2 로 두고 a)-d)를 각각 실행한다.

a) λ_v, λ_b 에 대입했을 때의 Q, z^* 를 식 (17), 식 (18)을 이용하여 구하고, y_v, y_b 를 다음과 같이 계산한다.

$$y_v = (n-1)Q - W_v, y_b = Q - z^* \sigma \sqrt{pQ+b} - W_b$$

b) 만약 $y_v < 0$ 이면 제약식을 만족하므로 $Q_v = Q$ 로 두고, 아니면

$$Q_v = Q - \frac{y_v}{(n-1)}$$

c) 만약 $y_b < 0$ 이면 제약식을 만족하므로 $Q_b = Q$ 로 두고, 아니면 $\lfloor Q_b - z^* \sigma \sqrt{pQ_b+b} \rfloor \leq W_b$ 인 Q_b 를 구한다. $\lfloor Q_b - z^* \sigma \sqrt{pQ_b+b} \rfloor \leq W_b$ 를 만족하는 Q_b 를 구하는 방법은 다음과 같다. $Q_b = Q - y_b$ 로 두고 Q_b 를 1씩 증가시키면서 $\lfloor Q_b - z^* \sigma \sqrt{pQ_b+b} \rfloor \leq W_b$ 를 만족하는 최대 Q_b 를 구한다.

d) Q_v 와 Q_b 중 작은 것을 Q^* 로 둔다. $n = n_1$ 일 때 Q^*, z^* 를 $Q_1^*, z_1^*, n = n_2$ 일 때 Q^*, z^* 를 Q_2^*, z_2^* 로 둔다.

Step 3 : $TC(Q_1^*, z_1^*, n_1) < TC(Q_2^*, z_2^*, n_2)$ 이면 $TC^* = TC(Q_1^*, z_1^*, n_1), Q^* = Q_1^*, z^* = z_1^*, n^* = n_1$ 로 두고 아니면 $TC^* = TC(Q_2^*, z_2^*, n_2), Q^* = Q_2^*, z^* = z_2^*, n^* = n_2$ 로 두고 종료한다.

4. 예제와 공간제약에 따른 민감도 분석

제안한 해법의 우수성과 구매자와 공급자의 저장공간 제약에 따른 효과를 파악하기 위해 <Table 1>의 예제를 사용하였다.

<Table 1> Data for Numerical Example

Notation	Value	Notation	Value
D	1,000	A_v	\$400
p	1/3,200	A_b	\$50
σ	5	h_v	\$4
F	\$25	h_b	\$5
π	\$100	b	0.01

Algorithm 1과 2는 ‘C’ 언어로 구현되었다. 예제는 Ben-Day and Hariga[1]의 예제이며, 다만 저장 공간제약은 본 논문에만 존재하므로, 민감도분석을 위해 다양하게 설정하였다. <Table 2>, <Table 3>, <Table 4>는 최대허용재고량의 변화에 따른 Algorithm 1과 Algorithm 2의 결과이다. Algorithm 1은 라그랑주 완화법에 이용하였으므로 하한(Lower Bound)을 제공하고, Algorithm 2는 제약식을 모두 만족하고 n 이 정수인 실현가능해를 제공한다. 그러므로, Algorithm 1에서 L 은 하한으로서 식 (10)의 라그랑주 함수의 값을 나타내고 Algorithm 2에서 TC는 총비용을 나타낸다.

<Table 2>는 구매자의 최대허용재고량인 W_b 는 120으로 일정하고, 공급자의 최대허용재고량(W_v)가 460에서 240까지 변할 때의 Algorithm 1과 Algorithm 2의 결과이다. W_v 가 감소함에 따라 n 은 감소하고, TC는 증가한다. Q, r, z 의 값들은 일정한 패턴을 보이지 않는다. 식 (7)을 보면 $n \ll Q$ 이라면 n 은 W_v 에 크게 영향을 받지만 Q 에는 영향을 비교적 덜 받을 것으로 보이며 r, z 와는 무관함을 알 수 있다.

<Table 2> Sensitivity Analysis from $W_v = 440$ to 240 by Algorithm 1 & 2

W_v	Lower Bound by Algorithm 1					Solution by Algorithm 2				
	Q	r	z	n	L	Q	r	z	n	TC
440	116.3	49.0	2.5	4.8	2007.3	110.0	47.0	2.5	5.0	2009.2
420	116.3	49.0	2.5	4.6	2009.8	105.0	45.4	2.5	5.0	2015.8
400	116.9	49.2	2.5	4.4	2014.8	100.0	43.8	2.5	5.0	2027.2
380	114.6	48.5	2.5	4.3	2021.5	117.3	49.3	2.5	4.0	2037.9
360	114.7	48.5	2.5	4.1	2031.8	115.6	48.8	2.5	4.0	2042.7
340	113.9	48.2	2.4	4.0	2045.1	111.5	47.4	2.5	4.0	2056.7
320	116.6	49.0	2.4	3.7	2063.7	106.7	45.9	2.5	4.0	2077.4
300	116.7	49.1	2.4	3.6	2085.5	100.0	43.7	2.5	4.0	2114.8
280	117.2	49.2	2.4	3.4	2112.5	93.3	41.6	2.5	4.0	2164.4
260	115.1	48.5	2.4	3.3	2143.7	117.4	49.2	2.4	3.0	2195.8
240	117.4	49.2	2.4	3.0	2184.4	115.9	48.8	2.4	3.0	2206.4

<Table 3> Sensitivity Analysis for $W_b = 120$ to 70 by Algorithm 1 & 2

W_b	Algorithm 1					Algorithm 2				
	Q	r	z	n	L	Q	r	z	n	TC
120	116.3	49.0	2.5	4.8	2007.3	110.0	47.0	2.5	5.0	2009.2
115	110.4	47.1	2.5	5.0	2007.9	108.3	46.5	2.5	5.0	2011.0
110	105.1	45.4	2.5	5.2	2009.7	106.2	45.8	2.5	5.0	2013.7
105	100.1	43.8	2.5	5.4	2012.8	102.4	44.6	2.5	5.0	2021.0
100	96.1	42.5	2.5	5.5	2017.5	88.0	39.9	2.5	6.0	2030.6
95	90.4	40.7	2.5	5.8	2023.1	87.7	39.8	2.5	6.0	2031.5
90	87.1	39.6	2.5	6.0	2031.2	86.6	39.5	2.5	6.0	2034.9
85	81.4	37.8	2.5	6.4	2040.5	82.6	38.2	2.5	6.0	2050.7
80	76.7	36.3	2.5	6.7	2052.5	73.3	35.2	2.5	7.0	2065.5
75	72.7	35.0	2.5	7.0	2067.4	72.4	34.9	2.5	7.0	2070.7
70	66.9	33.1	2.5	7.5	2085.1	67.8	33.4	2.5	7.0	2101.9

<Table 4> Sensitivity Analysis for $W_v = 440$ to 240 and $W_b = 120$ to 70 by Algorithm 1 & 2

W_v	W_b	Algorithm 1					Algorithm 2				
		Q	r	z	n	L	Q	r	z	n	TC
440.0	120.0	116.3	49.0	2.5	4.8	2007.3	110.0	47.0	2.5	5.0	2009.2
420.0	115.0	110.5	47.2	2.5	4.8	2011.1	105.0	45.4	2.5	5.0	2015.7
400.0	110.0	105.9	45.7	2.5	4.8	2019.7	100.0	43.8	2.5	5.0	2027.2
380.0	105.0	100.0	43.8	2.5	4.8	2033.2	95.0	42.2	2.5	5.0	2044.5
360.0	100.0	95.4	42.3	2.5	4.8	2053.4	90.0	40.6	2.5	5.0	2068.5
340.0	95.0	90.2	40.6	2.5	4.8	2080.4	85.0	38.9	2.5	5.0	2100.3
320.0	90.0	87.8	39.8	2.4	4.6	2117.6	80.0	37.3	2.5	5.0	2141.6
300.0	85.0	81.4	37.7	2.4	4.7	2162.6	75.0	35.7	2.5	5.0	2194.2
280.0	80.0	76.7	36.2	2.4	4.6	2220.7	70.0	34.1	2.4	5.0	2260.6
260.0	75.0	72.0	34.6	2.4	4.6	2293.8	65.0	32.4	2.4	5.0	2343.8
240.0	70.0	67.3	33.1	2.4	4.5	2385.6	60.0	30.8	2.4	5.0	2448.1

<Table 3>은 공급자의 최대허용재고량 W_v 가 440으로 일정하고, 구매자의 최대허용재고량(W_b)가 120에서 70까지 변할 때의 결과이다. W_b 가 감소함에 따라 Q , r 은 감소하고, n , TC 는 증가한다. z 의 값은 2.5로 일정하다.

식 (6)을 보면 n 과는 무관하며 Q , r 과는 밀접한 관계를 가짐을 알 수 있다. 식 (6)에서 $z\sigma\sqrt{pQ+b}$ 는 안전재고량으로 r 에 직접 영향을 미친다. 그러므로, W_b 가 감소함에 따라 Q , r 은 감소하는데 W_v 가 여유가 있으므로 Q , r 이 감소하는 만큼 n 이 증가하는 것으로 보인다.

<Table 4>는 공급자의 최대허용량(W_v)과 구매자의 최대허용재고량(W_b)이 동시에 감소할 때의 결과이다. W_v , W_b 가 감소함에 따라 Q , r 은 감소하고, TC 는 증가한다. z 의 값은 2.5에서 2.4로 소폭 감소하며, n 은 Algorithm 1에서는 감소하나 Algorithm 2에서는 5로 일정하다. W_v 과 W_b 가 감소함에 따라 식 (6)과 식 (7)에 직접 영향을 받는 Q , r 이 급속히 감소하는 것은 당연한 것으로 보이며 Q 의 감소폭이 충분히 커서 n 은 감소하지 않아도 식 (7)을 만족하므로 n 은 거의 변하지 않는 것으로 판단된다.

한편, 해의 우수성을 알아보기 위해 Gap을 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Gap}(\%) = \frac{(TC-L)}{TC} \times 100$$

W_v , W_b 의 민감도 분석인 <Table 4>, <Table 5>, <Table 6>에서 Gap은 각각 평균 0.98%, 0.38%, 1.09%로 작으므로, Algorithm 2에서 제공한 실현가능해는 하한과 충분히 가까워 우수한 해인 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 공급자와 수요자를 동시에 고려한 재고관리 모형을 고려하고 공급자의 저장공간과 수요자의 저장공간의 크기에 각각 제한이 존재하는 경우에 대하여 라그랑주 완화법을 이용하여 하한을 제공하는 해법과 제약식을 모두 만족하는 실현가능해를 제공하는 해법을 제시하였다. 또한, 공간크기 제한의 변화에 따른 해의 변화를 민감도분석을 통해 분석하였다.

본 연구에서는 공급자와 수요자 모두가 공간 크기에 제한이 있는 경우를 고려하였는데, 여전히 많은 재고관리 문제들은 공간제약을 고려치 않고 있어 이에 대한 연구들이 추가되어야 할 것으로 보인다.

References

- [1] Ben-Daya, M. and Hariga, M., Integrated single vendor single buyer model with stochastic demand and variable lead time. *Int J Prod Eco*, 2004, Vol. 92, pp. 75-80.
- [2] Ghalebsaz-Jeddi, B., Shultes, B.C., and Haji, R.A., multi-product continuous review inventory system with stochastic demand, backorders, and a budget constraint. *European Journal of Operational Research*, 2004, Vol. 158, pp. 456-469.
- [3] Hadley, G. and Whitin, T.M., *Analysis of Inventory Systems*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1963.
- [4] Hariga, M., A single-item continuous review inventory problem with space restriction, *Int J Prod Eco*, 2010, Vol. 128, pp. 153-158.
- [5] Lee, D.J., A Study on Inventory Control Policy for Quantity-Discount and Budget Constraint. *J Soc Korea Ind Syst Eng*, 2015, Vol. 38, No. 2, pp. 145-151.
- [6] Lee, D.J., Quadratic Programming Approach to a VMI Problem. *J of the Kor Ins of Plant Eng*, 2007, Vol. 12, pp. 91-104.
- [7] Lee, D.J., Yoo, J.Y., and Lee, M.S., An Approximation Approach for A Multi-Product Continuous Review Inventory Problem with Budget Constraint. *J Soc Korea Ind Syst Eng*, 2008, Vol. 31, No. 4, pp. 134-139.
- [8] Tamjidzad, S. and Mirmohammadi, H., An optimal (r, Q) policy in a stochastic inventory system with all-units quantity discount and limited sharable resource. *Eur J of Ope Res*, 2015, Vol. 247, pp. 93-100.
- [9] Wang, T.Y. and Hu, J.M., An inventory control system for products with optional components under service level and budget constraints. *Euro J of Oper Res*, 2008, Vol. 189, pp. 41-58.
- [10] Wang, T.Y. and Hu, J.M., Heuristic method on solving an inventory model for products with optional components under stochastic payment and budget constraints. *Exp sys with App*, 2010, Vol. 37, pp. 2588-2598.
- [11] Zhao, X., Fan, F., Liu, X., and Xie, J., Storage-Space Capacitated Inventory System with (r, Q) Policies. *Operations Research*, 2007, Vol. 55, No. 5, pp. 854-865.

ORCID

Dongju Lee

| <http://orcid.org/0000-0001-6650-9270>