

# CROSS-PLY 적층셸의 동적특성에 관한 최적화 설계 연구

## Dynamic Characteristics of Cross-Ply Laminated Shells

Sungjin Park<sup>a,\*</sup>

*a Department of Urban Construction Engineering, Incheon National University, 119 Academy-ro, Yeonsu-gu, Incheon 406-772, Republic of Korea*

---

### ABSTRACT

A simplified method for the calculation of dynamic characteristics of initially stressed antisymmetric cross-ply laminated shells is presented in this paper using the natural frequencies under unloading state. The equation of motion of laminated shell with two opposite edges simply supported is investigated on the basis of Rayleigh-Ritz method and Mindlin shell theory with effect of the curvature term. The relationships of the non-dimensional natural frequencies with initial stresses the coefficients of critical buckling and the boundaries of the dynamic principal instability region can be characterized by the non-dimensional natural frequencies under unloading state. Numerical examples are presented to verify the simplified equations and to illustrate potential applications of the analysis.

---

### KEYWORDS

Cross-Ply Laminated shell  
free vibration  
Mindlin's shell

---

본 논문은 초기하중을 받는 역대칭 Cross-Ply 원통셸의 동적특성을 고유진동수를 이용하여 해석하였다. 마주보는 두변이 단순지지된 적층 원통셸의 운동방정식은 곡률항을 고려한 Mindlin 셸이론과 에너지원리를 이용한 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 유도하였다. 초기응력을 받는 적층셸의 고유진동수, 임계좌굴계수 및 동적불안정영역 문제들을 무재하시의 무차원화 고유진동수로서 각각의 특성을 정립하였다. 본 연구에서 제안한 진동특성에 관한 간편산정식의 타당성과 사용성을 입증하기 위해 수치예를 들어 검토하였다.

---

Cross-Ply 적층셸  
자유진동  
Mindlin 셸

---

© 2015 Korea Society of Disaster Information All rights reserved

---

\* Corresponding author. Tel. 82-32-835-8775. Fax. 82-32-232-5024  
Email. [sjpark@inu.ac.kr](mailto:sjpark@inu.ac.kr)

---

### ARTICLE HISTORY

Received Nov. 03, 2015  
Revised Nov. 25, 2015  
Accepted Dec. 10, 2015

## 1. 서론

최근 공학분야의 기술 진보에 따른 항공기, 자동차, 조선, 토목 및 건설분야에서 재료의 고성능화 및 경량화가 급속히 진행되고 있다.

구조재료의 생산 코스트 저감을 위해 구조 경량화를 필수로 하고 있지만, 구조의 강성저하에 의한 진동, 소음 등 많은 문제가 발생하고 있다. 그래서 이들 문제 해결을 위한 기술개발이 진행되고 있고, 특히 구조물의 정적 및 동적특성 및 최적설계와 새로운 구조재료의 개발에 많은 관심을 갖게 되었다. 이와 같은 구조물의 고성능화나 경량화를 실현하기 위해 개발된 재료가 현재 다양한 분야에서 각광 받고 있는 “가볍고 강한” 복합재료이다.

복합재료의 장점은 기존 구조재료에 비해 비강도(강도/밀도)와 비강성(강성/밀도)가 매우 높기 때문에, 구조부재의 대폭적인 경량화가 가능하다는 것이다. 그리고 복합재료의 이방성을 활용하여 재료특성이나 적층구성을 적절히 선택함으로써, 구조부재의 사용 목적에 적절한 역학적 특성을 얻을 수 있다는 것이다. 이와 같은 이유에서 구조의 경량화 및 성능향상에 연결되는 항공·우주, 자동차, 토목, 건축구조물 등의 분야에 있어서 복합재료 구조물への 적용이 가능하게 되었다.

그렇지만 복합재료는 강한 이방성을 가지는 재료이기 때문에, 구조의 정적·동적 특성은 종래의 단일재료를 이용한 경우와 크게 다르며, 복합구조물 정적·동적 특성을 개발 및 설계 단계에서 정확히 파악하는 것이 중요하다.

복합재료가 구조재료로서 실질적으로 이용된 것은 카본섬유가 개발된 1970년대 이후이다. 적층복합원통셸에 관한 연구에 관심이 가지게 된 것도 이 시기이고, Kapania가 Cross-Ply 적층 복합원통셸의 자유진동에 관해서는 최근까지 연구가 진행되고 있지만, 그 기초가 되는 연구는 성질이 다른 등방성재료를 적층한 복합원통셸의 자유진동에 관한 연구(2~5)이고, 적층 복합원통셸에 대한 고전셸이론의 적용범위를 이용한 연구보고는 그다지 보고되고 있지 않고 있다.

본 논문에서는 양단단순지지, 양단고정, 일단고정 타단자유의 지지조건을 가지는 Cross-Ply 적층복합원통셸에 대해서, 단층재의 이방성의 정도, 적층수나 적층순서를 변화시킨 경우에 대해 수치해석을 실시하여, 셸의 양단 지지조건이나 적층형태의 차이가 Cross-Ply 적층복합원통셸의 진동특성에 미치는 영향을 밝히도록 한다.

더우기 면의 전단변형이나 회전관성을 고려하지 않은 고전셸이론이나 두께비  $z/R$ 을 근사한 이론(이하 1차전단변형이론이라함)의 Cross-Ply 적층복합원통셸에 대한 적용한계를 밝히도록 한다.

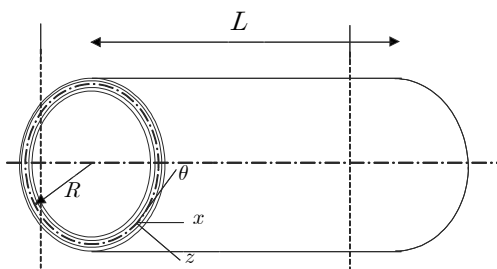


Fig. 1 Geometry and coordinate system of the laminated shell

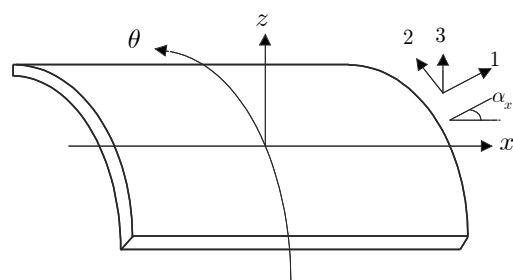


Fig. 2 A laminated composite material consisting of a single cylindrical shell

## 2. 진동수방정식의 유도

전달매트릭스법은 임의의 지지조건을 가진 Cross-Ply 적층복합원통셸에 적용할 수 있다. 예를 들면, 셸이 양단에서 단순 지지된 경우, 셸의 양단( $\xi=0,1$ )에서 경계조건은 다음과 같다.

### 양단단순지지(S-S)

$$\bar{V}_0 = \bar{W}_0 = \bar{\Psi}_\theta = \bar{M}_x = \bar{N}_x = 0 \tag{1}$$

일반적으로 쉘의 상태양 벡터는 축방향의 전달매트릭스를 이용하면

$$\begin{bmatrix} T_{21} & T_{24} & T_{26} & T_{28} & T_{29} \\ T_{31} & T_{34} & T_{36} & T_{38} & T_{39} \\ T_{51} & T_{54} & T_{56} & T_{58} & T_{59} \\ T_{71} & T_{74} & T_{76} & T_{78} & T_{79} \\ T_{101} & T_{104} & T_{106} & T_{108} & T_{109} \end{bmatrix}_{(1,0)} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_0 \\ \bar{\Psi}_x \\ \bar{M}_{x\theta} \\ \bar{Q}_{zx} \\ \bar{T}_x \end{Bmatrix} = 0 \tag{2}$$

가 되어 연립동차방정식을 구할 수 있고, 이것이 불분명한 해를 가지기 위한 해로서

$$\begin{bmatrix} T_{21} & T_{24} & T_{26} & T_{28} & T_{29} \\ T_{31} & T_{34} & T_{36} & T_{38} & T_{39} \\ T_{51} & T_{54} & T_{56} & T_{58} & T_{59} \\ T_{71} & T_{74} & T_{76} & T_{78} & T_{79} \\ T_{101} & T_{104} & T_{106} & T_{108} & T_{109} \end{bmatrix}_{(1,0)} = 0 \tag{3}$$

가 되는 진동수 방정식을 구할 수 있다.

또한 쉘의 양단이 고정되어 있는 경우, 일단이 고정되어 있고 타단이 지지되어 있지 않은 경우(고정-자유)의 경계조건은 각각

**양단고정(C-C)**

$$\bar{U}_0 = \bar{V}_0 = \bar{W}_0 = \bar{\Psi}_x = \bar{\Psi}_\theta = 0 \quad (\xi=0,1) \tag{4}$$

**고정-자유(C-F)**

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 = \bar{V}_0 = \bar{W}_0 = \bar{\Psi}_x = \bar{\Psi}_\theta = 0 \quad (\xi=0) \\ \bar{M}_{x\theta} = \bar{M}_x = \bar{Q}_{zx} = \bar{T}_x = \bar{N}_x = 0 \quad (\xi=1) \end{aligned} \tag{5}$$

로 나타낼 수 있으며, 위식을 축방향의 전달매트릭스식에 대입하면 각각의 경우에 대해서

**양단고정**

$$\begin{bmatrix} T_{16} & T_{17} & T_{18} & T_{19} & T_{110} \\ T_{26} & T_{27} & T_{28} & T_{29} & T_{210} \\ T_{36} & T_{37} & T_{38} & T_{39} & T_{310} \\ T_{46} & T_{47} & T_{48} & T_{49} & T_{410} \\ T_{56} & T_{57} & T_{58} & T_{59} & T_{510} \end{bmatrix}_{(1,0)} = 0 \tag{6}$$

**고정-자유**

$$\begin{bmatrix} T_{66} & T_{67} & T_{68} & T_{69} & T_{610} \\ T_{76} & T_{77} & T_{78} & T_{79} & T_{710} \\ T_{86} & T_{87} & T_{88} & T_{89} & T_{810} \\ T_{96} & T_{97} & T_{98} & T_{99} & T_{910} \\ T_{106} & T_{107} & T_{108} & T_{109} & T_{1010} \end{bmatrix}_{(1,0)} = 0 \tag{7}$$

가 되는 진동수방정식을 유도할 수 있다. 따라서 진동수방정식을 만족하는 진동수 파라미터  $\lambda$ 를 구함으로써 Cross-Ply 적층복합원통쉘의 고유진동수를 구할 수 있고, 진동수 파라미터(진동수)에 대응하는 상태량 벡터(고유벡터)를 구하여 진동모드형을 결정할 수 있다.

### 3. 수치해석 결과

적층복합원통셸 Cross-Ply의 수치해석 결과에 이용된 고강도 그라파이트/에폭시 재료의 제원은 다음과 같다.

$$E_1 = 20E_2, G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

여기서 전단탄성계수  $\kappa^2$ 에는 5/6을 이용하였다. 또는 진동수 파라미터  $\lambda$ 는 단층재의 종탄성계수  $E_2$ 를 이용하여 무차원화( $E_0=E_2$ )하고 있다.

#### 3.1 수치계산 수렴성 검토

Table 1은 본 해석법에 대한 타당성 및 수렴성을 검토하기 위해 기존 구조재료인 원통셸(이하 등방성 원통셸)의 최저차 진동수 파라미터  $\lambda$ 에 대해, 본 해석법에서 얻어진 결과와 엄밀해의 수치 결과의 비교를 한 것이다.

Table에서 알 수 있듯이 구하고자 하는 진동수는 엄밀해의 결과와 잘 일치하고 있고, 이 결과에서 본 해석법에 대한 타당성을 입증할 수 있다. 전달매트릭스  $T(\xi, \xi_0)$ 를 구하기 위해 Runge-Kutta-Gill 적분법을 이용하고 있지만, 수렴정도는 수치적분의 분할수에 의존하고 있다.

Table 2는 3층 적층( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), 2층 적층( $0^\circ/90^\circ$ )의 복합원통셸에 대해서  $\xi=0\sim 1$ 의 적분구간에 대한 분할수를 변화시켰을 때의 진동수 파라미터의 수렴상황을 나타내고 있다.

Table에서 알 수 있듯이 분할수 40 정도에서 진동수 파라미터  $\lambda$ 는 유효숫자 4자리 범위 내에서 일정값으로 수렴하고 있다. 따라서 이후 수치계산에 대해서는 분할수 40을 사용하여 수치적분을 실시한다.

Fig. 3은 Cross-Ply 적층복합원통셸의 진동수파라미터  $\lambda$ 와 원주방향파수  $n$ 에 미치는 영향을 나타내고 있으며, (a),(b)는 각각 3층대칭( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), 2층 역대칭( $0^\circ/90^\circ$ ) 적층복합원통셸이다.

각 그림에서 실선, 파선, 일점쇄선은 각각 양단단순지지(SS), 양단고정(CC), 일단고정타단자유(CF)의 지지조건인 경우이고, 각 원주방향 파수에 대해 축방향 3차의 진동수까지 나타내고 있다.

Fig에서 알 수 있듯이 지지조건이나 적층형태에서 원주방향파수  $n=2$  일 때 진동수는 최소가 된다.

또한 셸이 양단단순지지와 양단고정인 경우에 대해 진동수 파라미터와 비교하면 대칭적층에 비해서 역대칭 적층이 지지조건의 차이에 의한 진동수의 차가 크게 나타나고 있다.

더우기 양단단순지지와 일단고정타단자유인 경우를 비교하면 일단고정타단자유인 경우가 전체적으로 진동수가 낮아지는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 Fig. 3에서  $n=2$ 의 진동모드로 실선, 파선, 일점쇄선은 각각 면의방향변위  $\bar{W}_0$ , 원주방향변위  $\bar{V}_0$ , 축방향변위  $\bar{U}_0$ 의 축방향 분포를 나타내고 있다.

Fig. a, b는 각각 양단단순지지, 양단고정, 일단고정타단자유의 지지조건인 경우이다. 대칭적층( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ )과 역대칭적층( $0^\circ/90^\circ$ )인 경우의 변위분포를 비교하면 지지조건, 진동모드형에서 변위  $\bar{W}_0$ 와 변위  $\bar{V}_0$ 의 분포 형태는 비슷하게 나타나지만, 변위  $\bar{U}_0$ 는 역대칭 적층이 대칭적층의 경우에 비해서 변위량이 크게 나타나는 것을 알 수 있다.

Table 1. Minimum order frequency parameters compared to isotropic cylindrical shell

$$\left( \begin{matrix} E_1 = E_2, G_{12} = G_{31} = G_{23} = E_2/2(1+\nu_{12}) \\ \nu_{12} = 0.3, h = 0.2, \kappa^2 = \pi^2/12, \text{단순-단순} \end{matrix} \right)$$

$l$	$n$	본해석법	엄밀해
1.0	1	1.0430	1.0430
	2	0.9664	0.9664
	5	1.6660	1.6660
2.0	1	0.6145	0.6145
	2	0.4429	0.4429
	5	1.3370	1.3370

Table 2. Frequency convergence situation of Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells

$$\left( \begin{matrix} E_1 = 20E_2, G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, E_2 G_{23} = 0.5E_2 \\ \nu_{12} = 0.3, l = 1.0, h = 0.2, n = 2, \text{단순-단순} \end{matrix} \right)$$

적층수	모드	분할수				
		10	20	30	40	50
$0^\circ/90^\circ/0^\circ$	1	1.881	1.881	1.881	1.881	1.881
	2	4.263	2.253	4.258	4.258	4.258
	3	6.622	6.592	6.589	6.589	6.589
$0^\circ/90^\circ$	1	1.407	1.407	1.407	1.407	1.407
	2	3.453	3.448	3.448	3.448	3.448
	3	5.760	5.730	5.728	5.727	5.727

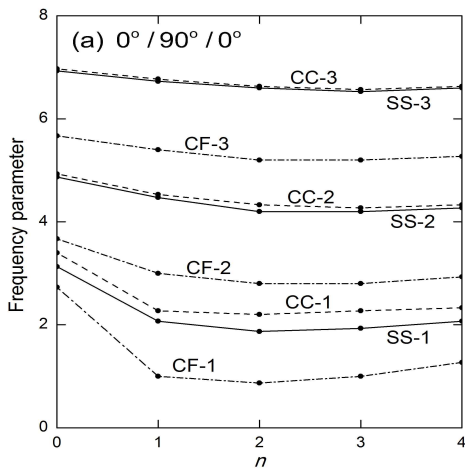


Fig. 3.1 3-layer frequency parameters of Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells

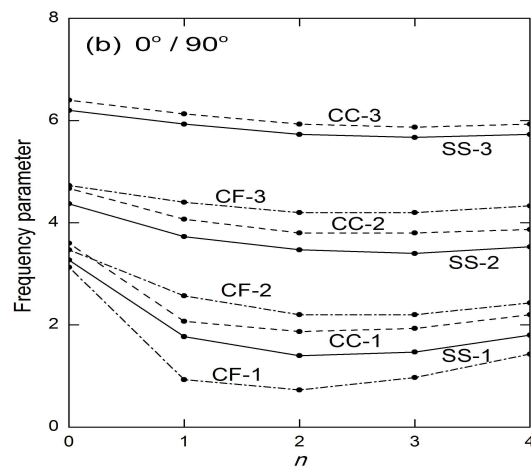


Fig. 3.2 Between two layers of frequency of Cross-Ply Laminated Cylindrical Shell with Circumferential frequency parameters

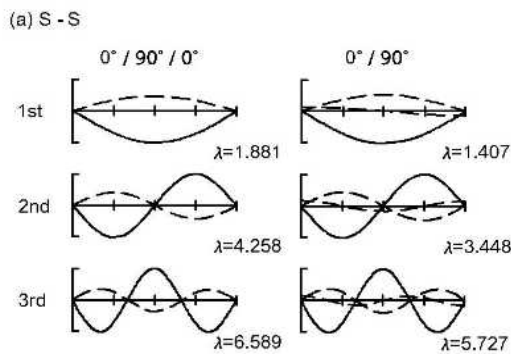


Fig. 4.1 Simply supported at both ends of the Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells vibration mode

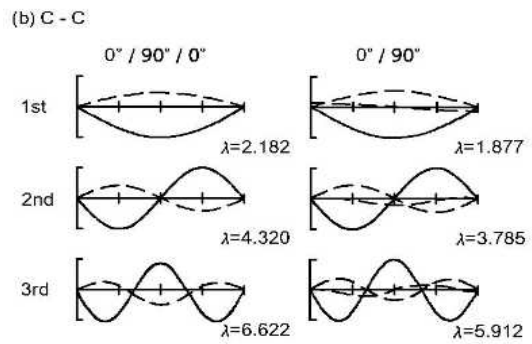


Fig. 4.2 Both ends of the vibration mode of the fixed Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells

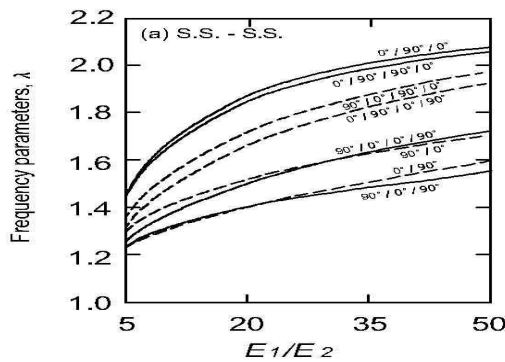


Fig. 5.1 Parameters and frequencies between the modulus of elasticity ratio of both ends simply supported the Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells

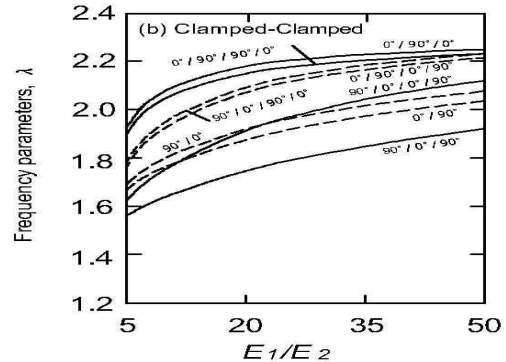


Fig. 5.2 Both ends of the relationship between the frequency parameters and the elastic modulus of the non-fixed support a Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells

Fig. 5는 Cross-Ply 적층복합원통셀의 진동수 파라미터와 각 단층재의 종탄성계수  $E_1/E_2$  관계를 나타내고 있으며, Fig. a, b는 각각 셀이 양단단순지지, 양단고정, 일단고정타단자유의 지지조건을 가지는 경우에 대응하고 있다.

Fig에서 실선, 파선은 각각 대칭, 역대칭인 원통셀에 대응하고 있으며,  $E_1/E_2=20$ 일 때 기본진동수에 미치는  $n=2$ 의 축방향 1차의 진동수 파라미터를 보이고 있다. 그림에서 어느것도 지지조건, 적층형태에 있어서 종탄성계수비  $E_1/E_2$ 가 증가하고 있기 때문에 진동수는 단조롭게 증가하고 있는 것을 알 수 있다.

그리고 셀이 양단단순지지된 경우에는 적층형태의 차이에 의해 진동수의 변화 비율의 차가 크고, 반대로 양단고정된 경우는 그 변화의 비율에 그다지 차가 없다.

더우기 어느것의 지지조건에 있어서도 4층 대칭 적층셀( $90^0/0^0/0^0/90^0$ )에 비해 진동수의 변화의 비율은 크다. 또 예를 들면 종탄성계수비가 변화하여도 홀수 대칭적층 일 때는  $\alpha=90^0$ 의 단층재 수가 많을 수록 진동수가 낮게 되고, 역대칭 적층인 경우에는 이 단층재가 보다 외측에 위치할 수록 원통셀의 진동수가 낮아지는 특징을 알 수 있다.

따라서 이 특징은 본 논문에서 서로다른 재료특성을 가지는 단층재로 이루어지는 Cross-Ply 적층복합원통셀에 대해서도 적용할 수 있다고 생각된다.

#### 4. 결론

본 논문에서 가장 기본적인 적층형태를 가지는 Cross-Ply 적층복합원통셀에 주목하여 전달매트릭스법을 이용하여 그 진동특성을 밝혔다.

그리고 기초방정식을 유도한 Cross-Ply 적층복합원통셀에 관한 기초식은 전달매트릭스법을 이용하여 해석하고 셀의 지지조건을 적용하여 진동수방정식을 유도하였다.

그리고 해석결과를 바탕으로 수치계산을 실시하여 셀의 진동수 파라미터와 진동모드를 구하여 셀의 양단에서 지지조건이나 단층재의 적층형태의 차이가 진동특성에 미치는 영향을 검토하였다. 결과를 요약하면 다음과 같다.

① 셀의 지지조건에 차이에 의한 진동특성의 변화는 적층형태에 의해 크게 달라지고, 이것은 적층형태의 차이에 의한 면내변형과 면외변형의 연성정도의 차이에 기인한다. 예를 들면 역대칭적층셀인 경우는 대칭적층셀에 비해 셀의 축방향의 변화가 크게 되기 때문에 양단에서의 축방향 변위의 구속에 의해 진동특성이 크게 변화한다.

② Cross-Ply 적층복합원통셀의 고유진동수는 단층재의 진동수를 증가함으로써 일정값에 가까워 질 수록 셀의 지지조건, 두께에 의해 서로 달라지는 것의 적층수 5~8정도일 진동수는 일정치의  $\pm 5\%$  이내에 수렴한다.

또한 적층수가 적을 때는 적층순서의 차이에 의해 최대 25% 이상의 차가 진동수에 발생하지만, 3층 대칭적층 ( $0^0/90^0/0^0$ )을 선택함으로써 고유진동수의 최대화가 가능하게 된다.

③ 같은 수의 단층재로 구성되는 경우, 홀수 적층수의 Cross-Ply 대칭적층원통셀에 대해서는 원주방향의 섬유를 통하여 있는 단층재의 수가 많을 수록 고유진동수가 낮아지게 되고, Cross-Ply 역대칭 적층원통셀인 경우는 이 단층재가 셀보다 외측에 위치할 수록 진동수는 낮아지게 된다.

④ Cross-Ply 적층복합원통셀의 고유진동수는 각 단층재의 종탄성계수비가 증가할수록 단조롭게 증가하지만, 적층형태의 차이에 의해 그 변화의 비율에 차가 발생하게 된다. 또한 종탄성계수비가 변화한 경우에서도 결론 ③의 특징을 확인할 수 있고, 이것에서 이 특징은 여기에서 다루는 재료특성과 서로 다른 특성을 가지는 경우에 대해서도 적용할 수 있다고 생각된다.

#### 감사의 글

이 논문은 인천대학교 2014년도 자체연구비 지원에 의하여 수행한 것으로 이에 감사드립니다.

## References

- Ehsan Bahmyari, Mohammad Reza Khedmati(2013) "Vibration analysis of nonhomogeneous moderately thick plates with point supports resting on Pasternak elastic foundation using element free Galerkin method Original Research Article Engineering Analysis with Boundary Elements", Volume 37, Issue 10, pp.1212-1238
- Zhibo Yang, Xuefeng Chen, Xingwu Zhang, Zhengjia He(2012) "Free vibration and buckling analysis of plates using B-spline wavelet on the interval Mindlin element Original Research Article Applied Mathematical Modelling", Volume 37, Issue 5, pp.3449-3466
- S.A. Eftekhari, A.A. Jafari(2000) "Vibration of an initially stressed rectangular plate due to an accelerated traveling mass Original Research Article Scientia Iranica", Volume 19, Issue 5, pp. 1195-1213
- Mohammed Sobhy(1995) "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions Original Research Article Composite Structures", Volume 99, pp.76-87
- S.D. Yu(2009) "Free and forced flexural vibration analysis of cantilever plates with attached point mass Original Research Article Journal of Sound and Vibration", Volume 321, Issues 1 - 2, pp. 270-285
- Iguchi, S(1951) "Die Eigenwertproblem fur die elastische rechteckige platte, Mem. Fac. Eng., Hokkaido Univ.", pp.305-372
- Lurie, H(1952) "Lateral Vibrations as related to structural stability", J. Appl. Mech., Vol.74, pp.195-204
- Mindlin, R.D(1951) "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", J. Appl. Mech., Vol. 18, pp.31-38
- Sun, C.T(1972) "On the equations of Timoshenko beam under initial stress", J. of Appl. Mech., Vol. 39, pp. 282-285
- Benson, P.R. and Hinton, E(1992) "A thick finite strip solution for static, free vibration and stability problems", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp.665-678
- Park, S. J., "Dynamic Characteristics of Revolution Shells", Journal of The Korean Society of Disaster Information, Vol. 10 No. 1, pp 123-140