http://dx.doi.org/10.7735/ksmte.2015.24.6.619

J. Korean Soc. Manuf. Technol. Eng. ISSN 2283-4846(Online) / ISSN 2233-6036(Print)

이중진자를 이용한 최적의 운동에너지 하베스터 설계

이치범^a, 박희재^{a*}

Design of Optimal Kinetic Energy Harvester Using Double Pendulum

Chibum Lee^a, Hee Jae Park^{a*}

^a Department of Mechanical System Design Engineering, Seoul National University of Science & Technology, 232, Gongneung ro, Nowon gu, Seoul 01811, Korea

ARTICLE INFO

Article history:					
Received	2	November	2015		
Revised	16	November	2015		
Accepted	18	November	2015		

Keywords: Kinetic energy harvester Optimal design Double pendulum

Green energy

ABSTRACT

Owing to miniaturization and low-power electronics, mobile, implanted, and wearable devices have become the main trends of electronics during the past decade. There has been much research regarding energy harvesting to achieve battery-free or self-powered devices. The optimal design problems of a double-pendulum kinetic-energy harvester from human motion are studied in this paper. For the given form factor, the weight of the harvester, and the known human excitation, the optimal design problem is solved using a dynamic non-linear double-pendulum model and an electric generator. The average electrical power was selected as the performance index for the given time period. A double-pendulum harvester was proven to be more efficient than a single-pendulum harvester when the appropriate parameters were used.

1. 서 론

최근 전자제품의 소형화와 저전력 소자들의 발전에 따라 모바일, 웨어러블, 이식형 장치들에 대한 관심이 폭발적이다. 또한 현대 의 학의 발전으로 많은 나라가 고령화 사회에 접어들어 노령자의 주기 적 검진과 치료가 필수적이기 때문에 몸에 착용하는 의료장치의 필요가 증가하고 있다. 이런 장치들의 발전과 더불어 전원 공급의 문제를 해결하고자 많은 학자들이 에너지 하베스팅 기술에 대한 연구를 많이 수행하고 있다^[1-3].

많은 학자들이 관심을 가지고 연구하는 에너지 하베스터는 물리 량을 기준으로 운동학적(kinetic) 방식, 열전소자(electrothermal) 방식, RF 파워를 이용하는 방식 등으로 분류할 수 있다. 그 중 운동 학적 방식은 발전 원리에 따라 전자기적(electromagnetic) 발전과 본 연구에서는 인간의 허리에 장착되어 보행 시 신체 진동으로부 터 운동에너지를 추출하는 메카니즘으로서 이중진자를 이용한 하 베스터를 제안한다. 본 연구에서는 허리에 부착할 수 있는 휴대용 에너지 하베스터를 개발함에 있어서, 신체 보행 진동에 따른 이중 진자의 비선형 운동방정식을 유도하고, 이를 전자기력으로 변환하

압전 소자에 의한 발전으로 나눌 수 있다. 운동학적 방식에서는 운 동에너지의 소스는 건물, 설비, 장치의 진동 에너지, 보행에 의한 신체 진동, 보행 시 인간의 발뒤꿈치에 작용하는 압력에너지 등이 있다. 인체로부터 얻을 수 있는 진동에너지는 장착위치에 따라 매 우 달라진다^[3]. 실제로 일본의 세이코사에서는 손목시계용의 에너 지 하베스터를 단진자를 이용하여 상품화한 바가 있다^[4]. 또한 인 체의 보행 상하진동을 이용한 배낭 형태의 에너지 하베스터도 연구 가 진행되었다^{5]}.

^{*} Corresponding author. Tel.: +82-10-8635-6341 Fax: +82-2-974-8270

E-mail address: looki@seoultech.ac.kr (Hee Jae Park).

는 발전기 모델과 결합한다. 이 에너지 하베스터의 수학적 모델을 기반으로 신체 보행 진동 에너지를 최대로 추출할 수 있는 최적의 이중진자의 설계 인자에 대해 고찰한다. 또한, 근본적으로 단진자 에 비하여 이중진자가 얼마나 더 효율적인 지를 확인한다.

2. 운동에너지 하베스터 모델링

2.1 하베스터 시스템의 구조

본 연구에서 다루고 있는 이중진자, 발전기, 배터리로 구성된 하 베스터의 기본적 구조는 Fig. 1과 같다. 인간이 보행 운동을 할 때 수평변위 *h(t)*와 수직변위 *v(t)* 의하여 하베스터 시스템 전체의 프레 임이 운동을 한다. 이에 따라 프레임에 장착된 이중진자가 프레임에 대하여 상대운동을 한다. 이 운동은 발전기의 회전자를 왕복 회전시 키며 이에 따른 전자기장의 위치변화로 유도 기전력이 발생된다. 이 기전력에 의하여 전하가 배터리에 충전되는 방식으로 운동에너 지가 전기에너지로 바뀌어 저장된다.

하베스터 시스템의 수학적 모델링에 사용될 주요 파라미터와 변 수들을 Fig. 2에 표기하였으며, 그 기호와 의미는 Table 1과 같다.

2.2 이중진자 시스템 프레임의 변위

기구학적 관점에서 Fig. 3과 같은 이중진자의 x, y 방향의 변위 를 유도하면 다음 식 (1)~(4)와 같다.

$$x_1 = h + L_1 \sin \theta_1 \tag{1}$$



Fig. 1 Overall system diagram of harvester system



Fig. 2 Details of the kinetic energy harvest system

$$y_1 = v - L_1 \cos \theta_1 \tag{2}$$

 $x_2 = h + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 \tag{3}$

 $y_2 = v - L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_2 \tag{4}$

여기서 x₁, y₁은 진자1 그리고 x₂, y₂는 진자2의 좌표이다. 이 변위식은 미분을 통하여 가속도와 속도를 구할 수 있기 때문 에 다음 절의 동역학적 모델링에 사용된다.

2.3 이중진자의 동역학적 모델

본 연구에서 다루고 있는 이중진자에 대한 동력학적 모델링을 진행하였다. Fig. 4에 나타난 진자1에 대한 자유물체도에 Newton 의 방정식을 적용하였다.

$$\ddot{m_1 x_1} = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 - \frac{\tau_1}{L_1} \cos \theta_1 \tag{5}$$

Table 1 Parameters and variables in the kinetic energy harvest system

Symbol	Descriptions		
h(t), v(t)	Displacement of frame		
m_1, m_2	Mass of pendulum 1, 2		
L_1, L_2	Length of pendulum 1, 2		
$\theta_1, \theta_2,$	Angle of pendulum 1, 2		
b_2	Damping coefficient of bearing for pendulum 2		
$ au_1$	Torque of generator		
J_g	Moment inertia of generator armature		
V_g	Voltage of generator		
R_g, L_g	Electrical resistance and inductance of generator		
V_b	Voltage of rechargeable battery		
R_b	Internal resistance of rechargeable battery		



Fig. 3 Double pendulum



Fig. 4 Free body diagram of pendulum 1

$$\ddot{w_1y_1} = T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 - \frac{\tau_1}{L_1} \sin\theta_1 - m_1 g$$
(6)

여기서 π은 발전기를 구동하는데 소요되는 토크이며, 식 (5)와 (6) 에서 가상의 힘으로 간주하여 *x*, *ν* 분력으로 나누어 반영하였다.

또한 Fig. 5의 진자2에 대하여 동일하게 운동 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\ddot{m_2 x_2} = -T_2 \sin \theta_2 - \frac{\tau_2}{L_2} \cos \theta_2 \tag{7}$$

$$\ddot{m_2 y_2} = T_2 \cos\theta_2 - m_2 g - \frac{\tau_2}{L_2} \sin\theta_2$$
(8)

여기서, 전는 진자 2의 베어링에 의한 감쇄 토크를 의미하고, 점성 감쇄로 가정하면

$$\tau_2 = b_2 \dot{\theta}_2 \tag{9}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 진자1과 마찬가지로 이 토크를 식 (7), (8)에서는 가상의 힘으로 간주하여 *x*, *y* 분력에 반영하였다.

2.4 발전기 모델

본 연구에서 사용하는 발전기와 배터리 충전 회로는 Fig. 6과 같이 간략한 모델을 사용하였다. 발전기 모델은 직류모터의 회로와 동일하며, 출력단에 브릿지 다이오드를 통하여 배터리에 연결되어 있다. 브릿지 다이오드는 발전기의 회전방향에 따른 극성에 상관없 이 항상 배터리에 충전이 되도록 하는 역할을 한다. 실제로 브릿지 다이오드에는 일정 전압 이하를 제한하는 전압장벽이 있으나, 최근 에는 그 장벽값이 100 mV 이하의 소자들이 개발되면서 본 논문에 서는 이 장벽을 무시하였다. 또한 발전기 로터의 회전관성 모멘트



Fig. 5 Free body diagram of pendulum 2



Fig. 6 Circuit diagram of generator and battery charger

는 진자에 비하여 상대적으로 매우 작으므로 무시하였다. 배터리를 포함한 발전기 회로에 키르히호프의 전압법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$v_g = (R_g + R_b)i_g + L_g \frac{di_g}{dt} + v_b$$
⁽¹⁰⁾

여기서, 배터리의 전압 vb는 브릿지 다이오드에 의하여

$$v_b = b_{b0} sign(v_g) = \begin{cases} v_{b0} & \text{for } v_g \ge 0, \\ -v_{b0} & \text{for } v_g < 0 \end{cases}$$
(11)

이 된다. 여기서 ٧60는 배터리의 초기 전압 값이다.

발전기에 유도되는 전압 v_g 는 발전기축의 회전속도 $\dot{ heta_1}$ 에 비례하 기 때문에

$$v_g = k_b \theta_1 \tag{12}$$

이고 *k*_b는 역기전력 상수이며 모터 전압상수의 역수이다. 또한 발전기 회전축에 작용하는 토크 η은

$$\tau_1 = k_t i_g \tag{13}$$

이 되고 k는 토크 상수이다.

2.5 하베스터의 동력학적 모델링

상기에서 유도한 기구학식, 이중진자의 동력학식, 발전기에 관련 된 식을 통합하여 시스템의 운동방정식을 구한다. 먼저 식 (13)을 (5)와 (6)에 대입하면

$$\ddot{m_1 x_1} = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 - \frac{1}{L_1} k_i i_g \cos \theta_1$$
(14)

$$\ddot{m_1 y_1} = T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 - \frac{1}{L_1} k_i i_g \sin \theta_1 - m_1 g$$
(15)

이 된다.

식 (9)를 식 (7)과 (8)에 대입하면

$$\ddot{x_2} = -T_2 \sin \theta_2 - \frac{1}{L_2} b_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$
 (16)

$$\ddot{m_2 y_2} = T_2 \cos \theta_2 - m_2 g - \frac{1}{L_2} b_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$
 (17)

가 된다. 여기서 θ₂는 진자2의 각속도이다. 식 (11)에 식 (12)와 (13)을 대입하면

$$L_{g}\frac{di_{g}}{dt} = -(R_{g} + R_{b})i_{g} + k_{b}\dot{\theta}_{1} - v_{b0}sign(v_{g})$$
(18)

이 된다.

운동방정식 (14)~(17)에 시스템 프레임의 변위식 (1)~(4)를 두

번 미분하여 대입하여 $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ 를 정리하면 부록의 식 (A.1)~(A.7) 과 같다.

3. 동역학 시뮬레이션을 통한 최적 설계

3.1 설계인자와 성능 지표

본 연구는 인간의 보행 에너지를 진자의 반복 운동으로 받아서 전기에너지로 변환하는 에너지 하베스터에 관한 것이다. 인간의 보 행에 대한 많은 연구^[2,3]에서는 보행 속도를 1.3~1.5 m/s 정도이고, 달리는 속도를 2.9~3.4 m/s로 조사하였고, 그 주파수를 보행 시에 2.0 Hz, 질주 시 2.5 Hz로 평균을 잡았다. 본 연구에서는 이러한 연구를 참조하여, 보행 시 인간 골반부의 운동을 진폭 20.0 mm와 2.0 Hz로 가정하였다. 따라서 다음과 같은 원운동으로 하베스터를 가진하는 조건으로 사용하였다.

$$h(t) = 0.02\cos(4\pi t) \tag{19}$$

$$v(t) = 0.02\sin(4\pi t)$$
 (20)

에너지 하베스터를 구성하는 이중진자의 길이 *L*₁, *L*₂와 질량 *m*₁, *m*₂가 설계인자가 되며, 휴대용으로 사용하기 위해서는 그 크기와 중량이 제한된다. 본 연구에서는 이중 진자의 총길이는 *L*₁ + *L*₂를 0.05 m로, 발전기와 막대의 중량을 제외한 두 진자의 총 중량 *m*₁ + *m*₂을 0.05 kg으로 제한하였다.

성능지표는 주어진 시간 동안 발전기에서 발생하는 평균 전력으 로 선정하였다. 발전기에서 생성되는 전력은 전류와 전압의 곱으로 식 (21)과 같이 표시된다.

$$p(t) = i_g(t)v_g(t) = i_g(t)K_b\dot{\theta}_1(t)$$
(21)

전력이 시간에 따라 변화하므로, 주워진 구간 [*t_i*, *t_j*] 에서의 평균 전력 *p_{ave}*는

$$p_{ave} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} p(t) dt = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} i_g(t) K_b \dot{\theta}_1(t) dt$$
(22)

가 된다.

3.2 최적화 매개변수

제약 조건을 만족하는 최적의 이중진자 조합을 찾기 위하여 다음 식 (23), (24)과 같이 매개변수 ρ_m 과 ρ_L 을 도입하였다.

$$\rho_m = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \tag{23}$$

$$\rho_L = \frac{L_i}{L_1 + L_2} \tag{24}$$

따라서 0< \mathcal{Om} <1과 0< \mathcal{O} <1을 만족한다. 매개변수의 공간에서의 진자의 구성변화는 Fig. 7과 같다.

3.3 시뮬레이션 조건

본 연구에서 발전기는 소형 DC 모터를 개조하여 사용하였으며, 선정된 발전기와 관련된 파라미터는 제조사의 사양서를 기반으로 적용하였다. 그 내용은 Table 2와 같다. 또한 두 개의 진자 사이의 베어링의 감쇄계수 b₂는 매우 작은 값인 0.002 Nm/(rad/s)를 사용 하였다. 차 비선형 미분방정식의 해를 구하기 위하여 Rosenbrock 방법을 이용하였다.

다음과 같이 두 가지 관점에서 시뮬레이션을 진행하였다.

1) 두 진자 각각의 길이와 각각의 질량에 대하여 평균 출력 전력
 이 최대가 되는 최적의 조합을 찾는 시뮬레이션

 단진자에 비하여 최적의 이중진자를 사용한 하베스터의 비교 평가

초기 값에 따라 해석 결과가 달라지는 문제를 배제하기 위하여, 본 연구에서는 과도기를 제외하고 성능지수인 평균전력을 시간 구 간 [*t*_i, *t*_l]=[5.0, 10.0]에 대하여 계산하였다.





Table 2 Parameters of generator considered

Parameter	Value	Unit
Nominal Voltage	48	V
Resistance	79.7	Ω
Inductance	2.71	mH
Torque Constant	48.3	mNm/A
Speed Constant	198	rpm/V
Rotor inertia	1.99	g cm ²

3.4 시뮬레이션 결과

3.4.1 이중진자의 최적 형상

최대의 파워를 낼 수 있는 이중진자의 구성을 구하고자 식 (23), (24)에 제시된 진자의 길이와 질량에 대한 매개변수 Am과 AL을 변 화시키면서 식 (22)에 제시된 평균 전력 Pare를 구하였다. 이 시뮬 레이션에서는 Am과 AL을 0.02 간격으로 각각 변경하면서 0.04~ 0.096까지의 범위에 대하여 시뮬레이션을 하였다. Am이나 AL이 0.0 과 1.0이 되는 극단적인 경우는 단진자를 의미하거나, 특이점으로 해석이 불가능하기 때문에 배제하였다. 시뮬레이션 결과는 Fig. 8 과 같다.

이 결과에 따르면 A=0.8, Am=0.9에서 최대값 Pave=4.3 mW의 전력이 나온다. Fig. 9는 평균 전력을 mW 단위로 등고선으로 표 시하였다. 이 결과를 보면 우측 상단의 A ≥0.75, Am≥0.6 부근에 서 매우 급격한 변화가 발생한다. 이 영역에서는 진자2의 격렬한 회전이 일어난 부분이다. 조건에 따라 미리 설정한 시간구간 내에 서의 진자1의 회전에 파급되는 효과가 달라지고, 이것이 전력에 영향을 미쳐서 파라미터 변화에 따라 편차가 많이 일어난다. 앞선 연구에서 언급한 혼돈(chaotic)현상이 지배적인 구역이라고 판단 된다¹⁶.



Fig. 8 Simulation results of the energy harvester



3.4.2 단진자와의 비교

앞서 찾은 최적의 이중진자(μ=0.8, μ=0.9)와 단진자의 성능을 비교하고자 한다. 3.1절에서 언급한 바와 같이 하베스터 시스템의 진자 중량을 0.05 kg으로, 진자의 총길이를 0.05 m으로 제한하였 기 때문에, 동등한 비교를 위하여 단진자의 경우도 m=0.05, L=0.05로 설정하였으며 동일한 발전기를 사용한다고 가정하였다.

Fig. 10(a)는 단진자와 이중진자의 각도의 추이를 보여주고 있 다. 이중진자의 경우 3초 정도에 2회전을 하였고, 5.5초에 7초에 각각 1회전을 더하여 총 4회전을 하였다. 반면에 단진자는 4.5초 이후에 2회전을 하였다. 이 결과를 보면 이중진자의 진자2의 영향 으로 더욱 회전이 많이 일어나는 것을 알 수 있다. Fig. 10(b)는 단진자와 이중진자의 각속도를 나타내고 있는데, 가진 주파수인 2 Hz의 진동하는 것을 관찰할 수 있다. 다만 이중진자의 경우, 단진 자에 비하여 불규칙성이 크고 전반적으로 큰 속도 피크를 보였다.

시뮬레이션을 통하여 두 진자 시스템의 평균 전력을 비교하면 Table 3과 같다. 여기서 이론값은 가진 주파수 2 Hz로 질량을 중 력에 반하여 2h 만큼 이동한 이동하였기 때문이다. 이 연구에서는 인간의 보행 에너지를 추출하는 운동학적 하베스터의 경우, 최적으 로 설계된 이중진자를 사용하면 단진자로 구성하는 것 보다 2배 이상 큰 전력을 생산할 수 있음을 확인하였다. 그렇지만 인간이 느



Fig. 10 Comparison of double and single pendulum

	lulum system	
Pendulum Condition Average powe	Average power (p_{ave}) , mW	

Pendulum	Condition	Average power (p_{ave}), mw
Single	<i>m</i> =0.05, <i>L</i> =0.05	2.1
Double	$\rho_L=0.8, \rho_m=0.9$	4.3
Theoretical	2mghf	39.2

끼는 착용감에 대한 고려도 필요할 것이라 판단된다.

4. 결 론

본 연구에서는 인간의 허리에 장착되어 보행 시 신체 진동으로부 터 운동에너지를 추출하는 메카니즘으로써 이중진자를 이용한 하 베스터를 제안하였다. 허리에 장착하는 휴대용이므로 크기와 중량 에 제한을 부여하였다. 최대의 전력을 낼 수 있는 최적의 진자 구성 을 구하고자 이중진자와 발전기가 결합된 비선형 운동방정식을 유 도하고 시뮬레이션을 진행하였다. 시뮬레이션에서 파악된 결과는 다음과 같다.

(1) 이중진자의 구성을 결정하는 파라메터 ρ_m과 ρ 을 변화시키면
 서 시뮬레이션한 결과 ρ ≥0.75, ρ_m≥0.6 부근에서 혼돈현상이 지 배적이다.

(2) 주워진 조건에서 최대의 평균전력이 나오는 파라미터는 $\rho_{L}=0.8, \rho_{m}=0.9$ 이다.

(3) 최적의 이중진자를 사용한 하베스터는 단진자의 경우보다 2배 이상 큰 평균 전력을 발생시켰다.

(4) 이론적인 입력 파워를 기준으로 효율을 살펴보면 단진자의경우 5.3% 이중진자의 경우는 11% 정도가 되었다.

이와 같은 결과와 그 한계를 고려하면 향후 연구는 다음과 같은 방향이 될 것이다.

(1) 실험을 통한 이중진자 최적 설계의 우월성 검증 연구

(2) 인간의 보행, 조깅 등을 고려해 1~5 Hz 정도의 범위에 대한 최적 설계 연구

(3) 실제 계측된 인간의 보행 패턴에 대한 최적성 검증 연구
(4) 하베스터의 효율을 높이는 발전기 회로 및 진자 구조에 연구
(5) 이중진자의 구조변화에 따른 인간의 착용감에 대한 연구.

부 록

진자의 미분방정식

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{K_l i_g + L_1^2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \sin 2\left(\theta_1 - \theta_2\right) + m_2 L_1 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right) \left(L_2 \dot{\theta}_2^2 + \sigma_1\right) + m_1 L_1 \sigma_2}{L_1^2 \left\{m_1 + m_2 \sin^2\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right\}}$$

(A.1)

$$\ddot{\beta}_{2} = \frac{K_{i}i_{g}\cos(\theta_{1}-\theta_{2}) + (m_{1}+m_{2})L_{1}L_{2}\dot{\theta}_{1}^{2}rim\sin(\theta_{1}-\theta_{2}) - b_{2}\dot{\theta}_{2}\left[\frac{m_{1}}{m_{2}} + \sin^{2}(\theta_{1}-\theta_{2})\right] + \sigma_{4}}{L_{2}^{2}\left\{m_{1}+m_{2}\sin^{2}(\theta_{1}-\theta_{2})\right\}} - \frac{1}{L_{2}^{2}\left\{m_{1}+m_{2}\sin^{2}(\theta_{1}-\theta_{2})\right\}}$$

(A.2)

여기서,

$$\sigma_1 = (g + \ddot{v})\cos\theta_2 - \ddot{h}\sin\theta_2 \tag{A.3}$$

$$\sigma_2 = (g + \ddot{v})\sin\theta_1 + \ddot{h}\cos\theta_1 \tag{A.4}$$

$$\sigma_3 = (g + \ddot{v})\cos\theta_1 - \ddot{h}\sin\theta_1 \tag{A.5}$$

$$\sigma_4 = 1/2m_2L_2^2\dot{\theta}_2^2 \text{sig2}(\theta_1 - \theta_2) + L2(m_1 + m_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)\sigma_3$$
(A.6)

발전기의 미분방정식

$$L_g \frac{di_g}{dt} = -(R_g + R_b)i_g + k_b \dot{\theta}_1 - v_{b0} sign(v_g)$$
(A.7)

후 기

이 연구는 서울과학기술대학교 교내연구비의 지원으로 수행되었 습니다.

References

- [1] Khaligh, A., Zeng, P., Zheng, C., 2010, Kinetic Energy Harvesting Using Piezoelectric and Electromagnetic Technologies—State of the Art, IEEE Transaction on Industrial Electronics, 57:3 850-860.
- [2] Turri, S., Miller, D., Ben Ahmed, H. Multon, B., 2003, Design on an Electro-mechanical Portable System Using Natural Human Body Movements for Electricity Generation, European Power Electronic Conference, 1-10.
- [3] Romero-Ramirez, E., 2010, Energy Harvesting from Body Motion Using Rotational Micro-generation, A Thesis for a Doctorate, Michigan Technological University, USA.
- [4] Sasaki, K., Osaki, Y., Okazaki, J., Hosaka, H., Itao, K., 2005, Vibration-based Automatic Power-generation System, Microsystem Technologies, 11:8 965-969.
- [5] Rome, L., Flynn, L., Goldman, E., Yoo, T., 2005, Generating Electricity While Walking with Loads, Science, 309:5741 1725-1728.
- [6] Stachowiak, T., Okada, T., 2006, A Numerical Analysis of Chaos in the Double Pendulum, Chaos, Solitons & Fractals, 29:2,417-422