신뢰성응용연구
제15권, 제4호. pp.256-261, 2015

병렬구조 시스템의 고장률, 유효(有效) 고장률과 대등(對等) 고장률의 비교분석

조 경 환†

(주)프린테크

A Comparative Analysis of Failure Rate, Effective Failure Rate and Equivalent Failure Rate of A System Composed of Identical Parallel Units

Kyung-Hwan Cho†

Printek Co. Ltd

The aim of this paper is to present some issues to be discussed in relation to failure rate of a system that has identical parallel units. It is assumed that Time-to-Failure of each unit has the same exponential distribution and all units are repairable with a periodic maintenance of time interval T. Effective failure rate is widely recommended for nonrepairable systems as the reciprocal of MTTF but it should not be applied for repairable systems if delayed maintenance is used. And equivalent failure rate of an imaginary system is taken into consideration, the reliability value of which is the same as that of the redundant system when time interval T is given. With a numerical example, failure rate, effective failure rate, and equivalent failure rate of the redundant system are analyzed comparatively.

Keywords: Failure Rate, Effective Failure Rate, Effective MTBF, Equivalent Failure Rate, Redundant, Parallel

1. 서 론

일반적으로 해군 함정의 발전기는2대가 탑재되어 있는 병렬구조를 갖는다. 이러한 병렬구조를 갖는 발전기의 고장률과 이와 관련된 유효(有效) 고장률(effective failure rate)과 대등(對等) 고장률(equivalent failure rate) 등이 ILS(RAM) 실무에 어떻게 적용되고 있는지 검토하고 난 후, 몇 가지 논의 사항을 제시할 필요가 있었다. ILS(RAM) 실무에서 병렬구조 시스템을 단일 신뢰도 블럭으로 간략화 하였을 경우, 이 단일 신뢰도 블럭의 고장률(이하에서는 “병렬구조 단일 블럭의 고장률”이라 한다.)을 어떻게 산출하고 있는지를 검토한다.

먼저 n개 유니트(Unit)가 병렬(Active Redundancy: n 개중 1개 작동)로 구성된 시스템을 대상으로 고장률을 고찰한다 n개 유니트의 고장시간(Time-to-Failure)은 지수분포를 하고, n개 유니트의 고장률(λ_i)은 동일하다($\lambda_i = \lambda$ for all i). 그러면 이 병렬구조 시스템의 고장시간은 지수분포를 하지 아니하므로, 병렬구조 시스템의 고장률은 일정하지 않고 시간의 함수로 표현된다.

우주분야에서 사용되는 무기체계를 제외한 우리 군(軍)의 무기체계는 수리가능 품목이고, 일정한 정비주기를 갖고 있다 그러므로 본고에서는 임의의 T시점마다 정비를 해서 이 시스템의 모든 고장을 즉시 수리한다고 가정한다 Jerome(1977)은 정비주기(T)를 갖는 시스템의 MTTF의 산출식을 제시하였다. RIAC(2005)는 수리가능 품목이고, 정비주기(T)를 갖는 시스템의 MTBF를 유효 MTBF(Effective MTBF)라 하였다. 그리고 수리 불가능한 품목인 경우 MTTF의 역수를 유효 고장률이라고 하였고, 이 유효 고장률을 병렬구조 단일블럭의 고장률로 사용하는 것을 제안하고 있다. 그런데 ILS(RAM) 실무에서는 정비주기(T)를 갖는 수리가능 품목인 무기체계에 대하여 유효 고장률을 병렬구조 단일 블럭의 고장률로 아래 식

† johnkhcho@naver.com
2015년 9월 16일 접수; 2015년 10월 10일 수정본 접수; 2015년 10월 17일 게재 확정.

과 같이 사용하고 있다. 이것이 올바른 사용인가? 함께 논의해 보고자 한다.

병렬구조 단일블럭의 고장률=유효 고장률$(=\frac{1}{MTTF})$

ILS(RAM)실무에서 우리는 쉽게 어떤 시스템의 MTTF(MTBF)를 구하고 이것의 역수를 취하여 이 시스템의 고장률로 사용하고자 하는 경향이 있다. 고장률과 MTTF(MTBF)의 역수관계는 어떤 조건하에서 성립하는지를 검토해 볼 필요가 있다.

병렬구조 단일 블럭의 고장률과 관련하여 Kececioglu(2002)는 대등(對等) 고장률(equivalent failure rate)에 대하여 언급하였다. 병렬구조 시스템과 신뢰도는 같으면서, 고장시간이 지수분포를 하는 가상적 시스템의 고장률을 이 병렬구조 시스템의 대등(對等) 고장률이라고 하였다.

본고의 기술 순서는 다음과 같다. 고장률과 MTTF(MTBF)의 역수관계는 어떤 조건하에서 성립하는 지 검토한다. 병렬구조 시스템의 고장률과 MTTF의 관계, 유효 MTBF와 유효(有效) 고장률의 관계를 살펴본다. 또한 병렬구조 시스템의 대등(對等) 고장률의 의미를 고찰해 보고, 병렬구조 시스템의 고장률과의 관계도 살펴본다. 그리고 수리예제(numerical example)를 통해서 3가지 고장률의 시간에 따른 행태를 비교해 본 후, 몇 가지 논의 사항을 제시해 보고자 한다.

2. 본론

2.1 고장시간이 지수분포를 하는 경우의 특성

유니트의 고장시간의 분포가 지수함수를 따른다면 유니트의 신뢰도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R(t)=e^{-\lambda t},$$

여기서 λ: 고장률, t: 시간

신뢰도 정의에 의하여 일정기간동안의 신뢰도를 분석대상으로 하기 때문에 일정기간인 t가 주어진다고 볼 수 있다. 따라서 t가 주어진 상태에서 신뢰도 R과 고장률 λ는 일대일 대응관계가 있다고 볼 수 있다. 즉

$R(t)=e^{-\lambda t},\ \lambda=\frac{\ln R(t)}{-t}$ 으로 상호 변환할 수 있다.

그리고 고장률은 상수이며 고장률과 MTTF의 관계는 역수관계이다. 용어의 정의에 의하여 고장률 λ(t)과 MTTF를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{dR(t)}{dt}=-\lambda e^{-\lambda t},$$

$\lambda(t)=\frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}=\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}=\lambda$, 즉 시간에 대해 일정한 값(상수)을 갖는다.

$$MTTF=\int_0^\infty R(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda},$$

여기서 MTTF와 고장률 λ는 역수관계임을 알 수 있다.

MTBF 개념은 수리가능 품목에만 적용되는 개념이다. 즉 이러한 품목이 고장이 나면 즉시 수리가능 하고, 고장시간(ti)이 동일한 지수분포를 한다고 가정하면, MTBF와 MTTF는 의미가 동일하게 된다. 따라서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$MTBF=MTTF=\frac{1}{\lambda}$$

어떤 시스템(품목)의 고장시간이 지수분포를 하는 경우, 여러 가지 특성이 있지만 본고에서는 다음 3가지로 요약한다.

첫째, 시간 t가 주어진 경우, 신뢰도[R(t) = exp(-λt)]와 고장률[λ = lnR(t)/(-t)]은 일대일 관계이며, 서로 변환할 수 있다.

둘째, 고장률 λ는 상수(常數)이다.

셋째, 수리가능 시스템(품목)이고, 그것의 고장시간이 동일한 지수분포를 따르면, MTBF와 MTTF는 같으며, 고장률과는 역수관계이다. 즉 MTBF = MTTF = 1/λ 관계가 성립한다. 따라서 고장률과 MTTF(MTBF)가 역수관계가 성립되려면 시스템의 고장시간이 지수분포를 따라야 함을 알 수 있다.

2.2 병렬구조 시스템의 고장률과 MTTF

n개의 유니트가 병렬(Active Redundancy, n개 중 1개 작동)로 구성된 시스템의 신뢰도는 다음과 같이 표현된다.

$$R(t)=1-\prod_{k=1}^{n}(1-e^{-\lambda_k t})=1-(1-e^{-\lambda t})^n,\ \text{if}\ \lambda_k=\lambda\ \text{for}\ all\ k$$

여기서 λ_k: 유니트 k의 고장률이다.

이 병렬구조 시스템의 고장률을 $\lambda(t)$라고 하자. 정의에 의하여

$$\lambda(t)=\frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$$

로 표현할 수 있다. 분자의 수식을 전개하면 다음과 같다.

$$-\frac{dR(t)}{dt}=n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$$

따라서 $\lambda(t)=\dfrac{n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}}{1-(1-e^{-\lambda t})^{n}}$ 이다.

즉 시스템의 고장률은 일정하지 않고 시간에 따라 변하는 것을 알 수 있다. 임의 시점 T에서 이 병렬구조 시스템의 신뢰도와 고장률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R(T)=1-(1-e^{-\lambda T})^{n},\ \text{if}\ \lambda_k=\lambda\ \text{for}\ all\ k \quad (1)$$

$$\lambda(T)=\frac{n\lambda e^{-\lambda T}(1-e^{-\lambda T})^{n-1}}{1-(1-e^{-\lambda T})^{n}} \quad (2)$$

그리고 MTTF(Mean Time To Failure)는 정의에 의하여 다음과 같이 표현한다.

$$MTTF=\int_0^{\infty}R(t)dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad (3)$$

수식유도는 Jerome(1977)을 참조하기 바란다. 여기서 우리는 일반적으로 다음과 같은 등식이 성립되지 않음을 알 수 있다.

$$\lambda(T)\neq\frac{1}{MTTF}=\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

2.3 유효 MTBF와 유효 고장률

고장시간이 지수분포를 따르지 않고 정비주기T를 갖는 시스템의 MTBF를 산정하기 위하여, 유효 MTBF의 개념을 사용한다(Jerome, 1977; 박경수, 2002; RIAC, 2005). 임의의 T시점마다 정비를 해서 이 시스템의 모든 고장을 즉시 수리한다고 가정하면, 이 시스템의 유효 MTBF는 다음과 같다. 본고에서는 유효 MTBF를 $MTBF_T$라고 표기하여 사용한다.

$$MTBF_T=\frac{\int_0^{T}R(t)dt}{1-R(T)} \quad (4)$$

여기서 주목해야 할 것은 정비주기(T)가 작을수록 $MTBF_T$는 커지고, 정비주기(T)가 클수록 유효 MTBF는 작아진다. 그리고 정비주기(T)가 무한히 커질 때, $MTBF_T$는 MTTF에 접근함을 알 수 있다. 즉 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

$$MTBF_T=\frac{\int_0^{T}R(t)dt}{1-R(T)}\ \rightarrow\ MTTF=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ \ as\ T\rightarrow\infty$$

그리고 RIAC(2005)에서는 MTTF의 역수를 유효 고장률이라 하였다. 유효 고장률은 정비주기(T)가 무한대 일 때 산출되므로, 수리불가능 품목인 경우에 적용된다. 여기에서는 유효 고장률을 λ_{eff}라고 표기하여 사용한다. λ_{eff}는 다음과 같이 수식으로 표현된다.

$$\lambda_{eff}=\frac{1}{MTTF}=\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \quad (5)$$

유효 MTBF의 역수를 편의상 전(前)_유효 고장률(pre_effective failure rate)라고 한다. 전_유효 고장률을 λ_T라고 표기한다. 여기서도 T가 무한히 커질 때, 전_유효 고장률은 유효 고장률에 접근하고 있다.

$$\lambda_T=\frac{1}{MTBF_T}\rightarrow\lambda_{eff}=\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\ \ as\ T\rightarrow\infty \quad (6)$$

RIAC(2005)에서는 병렬구조 시스템이 수리 불가능한 품목인 경우, 유효 고장률을 이 시스템 단일블럭의 고장률로 사용하는 것을 제안하고 있지만, 정비주기(T)를 갖는 병렬구조 시스템에 대하여 유효 고장률을 적용하는 것을 금지하고 있다. 그런데 현재 ILS(RAM)실무에서 유효 고장률을 정비주기(T)를 갖는 병렬구조 시스템에 대하여 적용하여 사용하고 있다. 그러므로 이것을 올바르게 바로 잡아야 할 필요가 있다.

다음으로 본고의 분석범위를 벗어나지만, 유효 고장률에 대한 본질적인 문제를 제기한다 수리 불가능한 품목인 경우, 병렬구조 시스템의 MTTF와 유효 고장률의 역수관계의 성립 조건이 명시되지 상황에서, 유효 고장률의 사용은 수학적 면에서 엄밀성이 떨어진다고 볼 수 있다.

2.4 대등(對等) 고장률

병렬구조 시스템의 고장시간이 지수분포를 따르지 않으므로, 이 병렬구조 시스템과 신뢰도는 같으면서 고장시간이 지수 분포를 하는 가상의 시스템을 상정한다. 임의의 T시점에서 병렬구조 시스템과 가상의 시스템의 신뢰도는 동일하다고 하자. 지수분포를 하는 상정된 가상의 시스템의 고장률을 Kececioglu(2002)는 이 병렬구조 시스템의 대등(對等) 고장률이라고 하였다. 이 대등 고장률(λ_E)을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\lambda_E=\frac{\ln R(T)}{-T},\ where\ R(T)=1-(1-e^{-\lambda T})^{n} \quad (7)$$

이 대등(對等) 고장률은 병렬구조 시스템의 실제 고장률이 아니고 가상적이지만, 이 병렬구조 시스템을 하부 구조로 하는 상위 시스템의 신뢰도를 계산하거나 상위 시스템의 목표 신뢰도를 하위 병렬구조 시스템의 구성품별로 할당할 때 유

용하게 쓰이는 중간 다리의 역할을 하는 고장률이다.

병렬구조 시스템의 신뢰도를 고장률로 표현하면 다음과 같다.

$$R(T) = e^{-\int_0^T \lambda(t)dt}$$

대등 고장률로 표현하는 단일블럭의 신뢰도는 다음과 같다.

$$R(T) = e^{-\lambda_E \cdot T}$$

이 두 신뢰도가 같으므로

$$e^{-\lambda_E \cdot T} = e^{-\int_0^T \lambda(t)dt}$$

$$-\lambda_E \cdot T = -\int_0^T \lambda(t)dt$$

그러므로 $\lambda_E = \dfrac{\int_0^T \lambda(t)dt}{T}$

대등 고장률은 일정기간(T)동안 병렬구조 시스템의 고장률의 평균 고장률이며, 병렬구조 시스템을 대표하는 고장률이라 말할 수 있다. 대등 고장률은 일정기간(T)동안 고장률뿐만 아니라 병렬구조 시스템의 신뢰도도 대표한다는 사실을 식 (7)에서 알 수 있다. 따라서 유효 고장률 대신에 대등 고장률을 일정기간(T)동안 병렬구조 단일블럭의 고장률로 사용하는 것을 제안한다.

2.5 수리예제2)

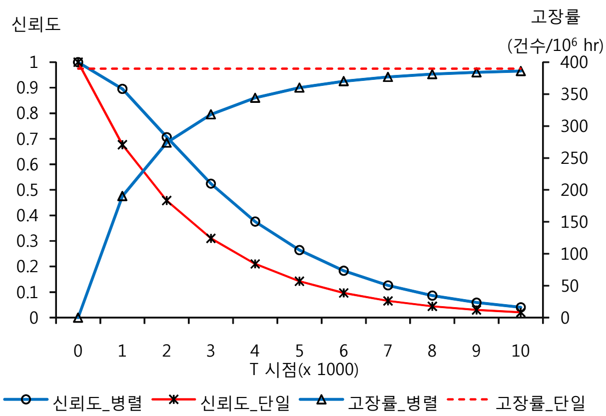
OO함정의 발전기 세트는 2개의 발전기가 병렬(Active Redundancy: 2개중 하나 작동)로 구성되는 시스템이다. 2개의 발전기의 고장률(λ = 390, 단위: 고장 건수/10^6시간)은 동일하며, 각 발전기의 고장시간은 지수분포를 따르고, duty cycle은 100%라고 가정한다. 그리고 임의의 시간(T)은 일반적으로 정비주기나 함정의 임무수행기간(Mission duration)을 사용할 수 있으나, 본고에서는 OO함정의 연간운용시간(T = 1,350hr)을 이용하였다.

식 (1), 식 (2)에 의하여 T = 1,350hr에서 병렬구조 시스템의 R(T), λ(T)를 구하면 다음과 같다.

$$R(T) = 2e^{-\lambda T} - e^{-2\lambda T} = 0.832448,$$

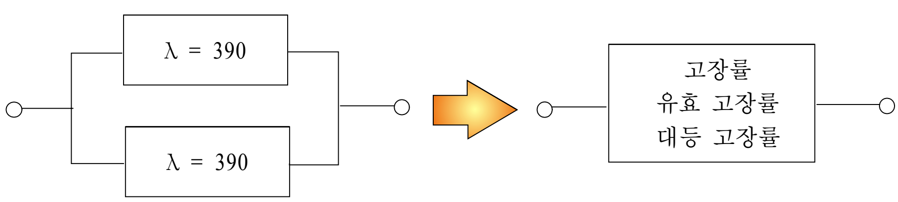
$$\lambda(T) = \frac{2\lambda e^{-\lambda T}(1-e^{-\lambda T})}{2e^{-\lambda T} - e^{-2\lambda T}} = 227\,(failures/10^6\,hr)$$

용어의 명칭 사용을 일반화하기 위해, 발전기 하나로 구성된 시스템을 단일구조 시스템이라 하고, 발전기 2개가 병렬(Active Redundancy)로 구성된 시스템을 병렬구조 시스템이라고 하자. 단일구조 시스템과 병렬구조 시스템의 신뢰도와 고장률을 도식화 해보면 <그림 2>와 같다. <그림 3>에서 보듯이 병렬구조 시스템의 고장률은 시간T가 커짐에 따라 증가하고 있음을 알 수 있고, 중복 개수(n)와 상관없이 단일구조 시스템(발전기)의 고장률인 λ = 390(고장 건수/10^6시간)에 접근함을 알 수 있다.



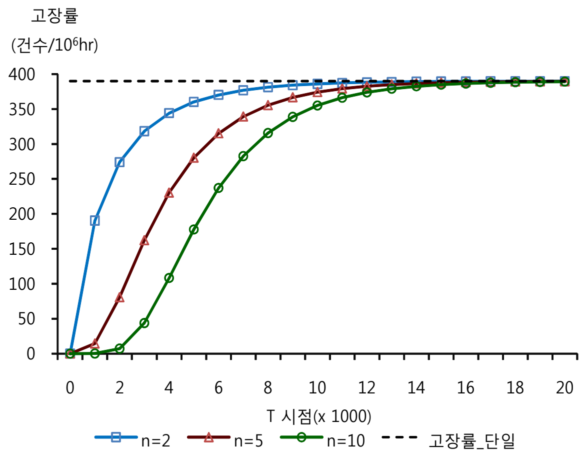
<그림 2> 병렬구조 시스템과 단일구조 시스템의 비교(신뢰도와 고장률)

T = 1,350hr에서, 식 (3), 식 (4)에 의하여 구한 값은 MTTF = 3,846hr, $MTBF_T$ = 7,546hr이다. $MTBF_T$와 MTTF의 관계를 도식화 해보면, <그림 4>와 같다. 이 그림에서 보듯이 T가 커짐에 따라 $MTBF_T$는 MTTF로 접근함을 알 수 있다.

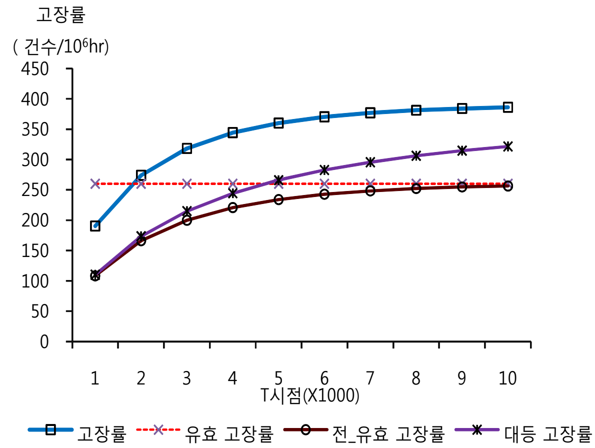


<그림 1> 2개의 발전기가 병렬(Active Redundancy)로 구성된 발전기 세트

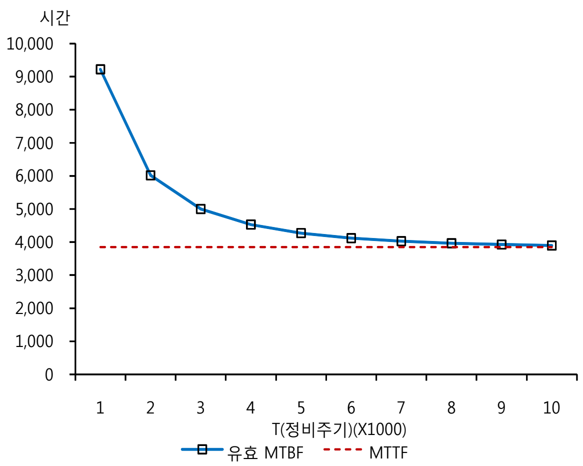
2) 이 절에서 사용한 수치는 가상 수치임을 밝혀둔다.



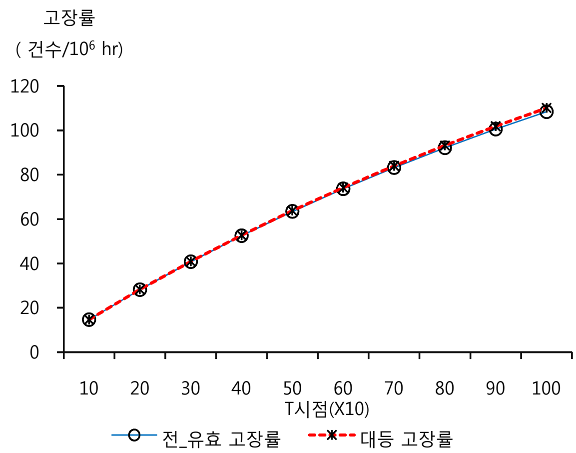
〈그림 3〉 중복 개수(n)의 증가에 따른 병렬구조 시스템의 고장률의 변화



〈그림 5〉 병렬구조 시스템의 고장률, 유효고장률과 대등고장률의 비교



〈그림 4〉 병렬구조 시스템의 유효 MTBF와 MTTF



〈그림 6〉 전_유효 고장률과 대등 고장률의 비교

식 (5), 식 (6), 식 (7)에 의하여 T = 1,350hr에서 유효(有效) 고장률(λ_{eff}), 전_유효 고장률(λ_T), 대등(對等) 고장률(λ_E)을 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{MTTF} = \frac{2\lambda}{3} = 260\,(failures/10^6 hr),$$

$$\lambda_T = \frac{(1-e^{-\lambda T})^2}{\frac{2}{\lambda}(1-e^{-\lambda T}) - \frac{1}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda T})}$$

$$= 133\,(failures//10^6 hr)$$

$$\lambda_E = \frac{\ln[1-(1-e^{-\lambda T})^2]}{-T} = 136\,(failures/10^6 hr)$$

병렬구조 시스템의 고장률, 유효 고장률, 전_유효 고장률, 대등 고장률의 시간에 따른 변화를 도식화 하면<그림 5>와 같다. 이 그림에서 보듯이 전_유효 고장률은 T가 커짐에 따라 유효 고장률에 접근하고 있다. T = 1,000hr(수리예제이므로 변동 가능하고, 고정된 수치가 아님)보다 작은 시간영역에서 전_유효 고장률과 대등 고장률이 근사하게 접근하고 있다 T = 1,000hr보다 작은 시간영역을 확대해서 그려보면<그림 6>과 같다. 두 가지 값들이 근사하다는 것은 무슨 의미를 함축하고 있는지 향후 심도있는 연구가 필요하다.

3. 결론 및 토의

병렬구조 시스템의 고장률, 유효 고장률, 대등 고장률의 비교분석을 통하여 제시하는 논의사항은 다음과 같다.

첫째, 정비주기(T)를 갖는 병렬구조 시스템을 단일 신뢰도 블록으로 간략화 하였을 경우, 유효(有效) 고장률을 병렬구조 단일 블럭의 고장률로 사용하는 것은 적용상의 잘못이다. 따라서 정비주기(T)를 갖는 수리가능 품목에 대하여는 유효 고장률의 사용을 지양하는 것이 바람직하다. 다음으로 수리불가능인 품목인 경우, 병렬구조 시스템의 MTTF와 유효 고장률의 역수관계의 성립조건에 대한 탐구가 필요하고 본다.

둘째, 유효 고장률 대신에 대등 고장률을 병렬구조 단일 블럭의 고장률로 사용하는 것을 제안한다. 대등 고장률은 병렬구조 시스템의 고장률의 평균 고장률이며 병렬구조 시스템의 신뢰도와 대등한 신뢰도를 갖기 때문이다.

셋째, 수치예제를 통하여, T가 1,000시간(고정된 수치가 아니고 변동의 여지가 있음)보다 작은 시간영역에서 전_유효 고장률과 대등(對等) 고장률이 근사하게 접근하고 있다. 이것은 무슨 의미를 함축하고 있는지? 정비주기(T)를 갖는 수리가능 품목에 대해서 유효 고장률 대신에 전_유효 고장률을 대등 고장률의 근사치로 사용하는 것이 바람직하다는 의미인지 추측을 해 볼 수도 있다.

위에서 열거한 논의사항은 앞으로 연구 및 토의가 있어야 할 것으로 여겨진다.

참고문헌

[1] 박경수(2002), 신뢰성개론, 영지문화사.

[2] Department of Defense (1988), *MIL-HDBK-338B: Electronic Reliability Design Handbook*.

[3] Kececioglu, D. (2002), *Reliability Engineering Handbook*, Vol. I & II, Prentice Hall.

[4] Jerome, K. (1977), A Redundancy Notebook(RADC-TR-77-287), Rome Air Development Center.

[5] Reliability Information Analysis Center (2005), *System Reliability Toolkit*, pp. 389-395.