

다물체계 운동 방정식 선형화를 통한 해상 풍력 발전기 동적 거동의 주파수 영역 해석 방법에 관한 연구

구남국¹ · 노명일^{2*} · 하솔³ · 신현경⁴

¹동의대학교 조선해양공학과, ²서울대학교 조선해양공학과 및 해양시스템공학연구소,
³서울대학교 공학연구소, ⁴울산대학교 조선해양공학부

A Study on the Method for Dynamic Response Analysis in Frequency Domain of an Offshore Wind Turbine by Linearization of Equations of Motion for Multibody

Namkug Ku¹, Myung-II Roh^{2*}, Sol Ha³, and Hyun-Kyoung Shin⁴

¹Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Dong-eui University

²Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, and Research Institute of Marine Systems Engineering, Seoul National University

³Engineering Research Institute, Seoul National University

⁴School of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Ulsan

Received 12 January 2015; received in revised form 22 January 2015; accepted 23 January 2015

ABSTRACT

In this study, we describe a method to analysis dynamic behavior of an offshore wind turbine in the frequency domain and expected effects of the method. An offshore wind turbine, which is composed of platform, tower, nacelle, hubs, and blades, can be considered as multibody systems. In general, the dynamic analysis of multibody systems are carried out in the time domain, because the equations of motion derived based on the multibody dynamics are generally nonlinear differential equations. However, analyzing the dynamic behavior in time domain takes longer than in frequency domain. In this study, therefore, we describe how to analysis the system multibody systems in the frequency domain. For the frequency domain analysis, the non-linear differential equations are linearized using total derivative and Taylor series expansions, and then the linearized equations are solved in time domain. This method was applied to analysis of double pendulum system for the verification of its effectiveness, and the equations of motion for the offshore wind turbine was derived with assuming that the wind turbine is rigid multibody systems. Using this method, the dynamic behavior analysis of the offshore wind turbine can be expected to take less time.

Key Words: Dynamic response analysis, Linearization, Multibody systems, Offshore wind turbine

1. 서 론

Fig. 1은 해상 풍력 발전기의 개념도를 나타낸 것이다. 해당 그림에서 알 수 있듯이 풍력 발전기는 부유식 플랫폼, 타워(tower), 낫셀(nacelle), 허브(hub), 블레이드(blade)가 고정식 관절 혹은 회전식 관절로 서로 구속되어 있는 형식으로 구성되어 있으며, 이러한 형식으로 구성된 시스템을 다물체계 시스템(multibody system)이라고 한다. 이러한 다물체계 시스템의 동적 거동을 해석하기 위해서는 다물체계 동역학을 기반으로 하여 비선형 운동 방정식을 구성해야 하며, 이와 같이 구성된 비선형 운동 방정식을 시간 영역(time domain)에서 해석해야 한다.

즉, 해상 풍력 발전기의 동적 거동을 해석하기 위해서는 다물체계 동역학을 기반으로 해상 풍력 발전기의 비선형 운동 방정식을 구성하고 이를 시간 영역에서 해석해야 하는 것이다. 그러나 풍력 발전기의 신뢰성을 검증하기 위해 동적 거동 해석을 해야 하는 경우의 수, 즉 풍력 발전기에 작용하는 외력의 종류는 상당히 여러 가지이며, 각각의 외력에 대해서 모두 거동을 해석해야 한다. 게다가 해상 풍력 발전기와 같이 외력에 파도가 함께 포함되어 있는 경우에는 일반적으로 풍력만 고려했을 때보다 더 오랜 시간 거동을 해석을 해야 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있다. 즉, 풍력 발전기의 신뢰성 검증을 위한 동적 거동 해석에 많은 시간이 소요된다는 것이다.

본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위한 타

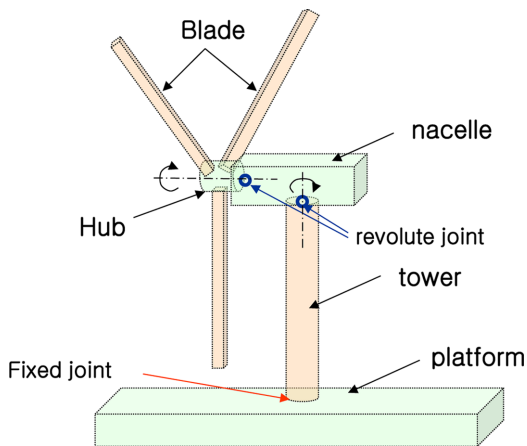


Fig. 1 Configuration of floating offshore wind turbine - Multibody system

당성 조사를 수행하였으며, 연구 내용은 아래와 같이 크게 두 가지로 구분된다.

- 비선형 다물체계 시스템 운동 방정식을 선형화
 - 선형화한 다물체계 시스템 운동 방정식을 주파수 영역(frequency domain)에서 해석
- 위와 같은 과정으로 다물체계 시스템을 해석하면 그 해석 시간이 대폭 줄어들게 된다. 하지만 과도(transient) 구간에서의 동적 거동에 대해서는 해석할 수 없는 단점도 존재 한다. 다음 장부터는 본 내용에 대한 상세한 설명을 할 것이다. 먼저 2절에서는 다물체계 시스템과 비선형 운동 방정식에 대하여 상세히 알아본다. 그리고 3절에서는 비선형 운동 방정식을 선형화 하는 방법과 선형화된 운동 방정식을 주파수 영역에서 해석하는 방법에 대해서 설명하고 그 효용성을 논의한다. 4절에서는 2, 3절의 내용을 기반으로 해상 풍력 발전기의 운동 방정식을 유도하였고, 5절에서는 결론 및 향후 연구 계획에 대해 서술한다.

2. 다물체계 동역학

2.1 다물체계 시스템

“다물체계 시스템”이란 여러 개의 강체가 여러 가지 타입의 관절로서 서로 구속되어 있는 시스템을 의미한다. 여기에서 구속이라는 의미를 조금 더 상세히 알아보자.

예시로서 Fig. 2에 보이는 이중 진자 시스템에 대하여 살펴보자. Fig. 2에 따르면 두 개의 질점 P_1, P_2 가 평면상에서 운동을 한다. 두 질점은 각각 x, y 좌표를 이용하여 그 위치를 정의할 수 있으므

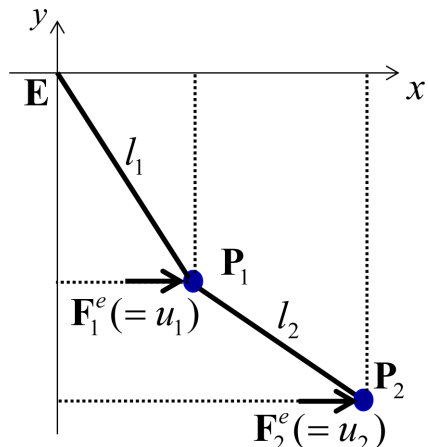


Fig. 2 Example of mutibody system - double pendulum

로 P_1 의 위치 좌표를 x_1, y_1 , P_2 의 위치 좌표를 x_2, y_2 로 정의한다. 그러나 P_1 은 원점과 질점 P_2 와 각각 질량을 무시할 수 있는 길이 l_1 과 l_2 인 막대로 연결되어 있다. 따라서 x_1, y_1, x_2, y_2 는 식 (1), (2)를 만족한다.

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \quad (1)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2 \quad (2)$$

즉, Fig. 2에서는 x_1 과 y_1 이 그리고 x_2 와 y_2 가 서로 독립이 아니기 때문에 네 변수 중 두 개만 독립이 되며, 자유도가 4자유도에서 2자유도로 감소하게 된다. 이와 같이 다른 질점 혹은 강체가 서로 연결되어 그 자유도가 감소하게 될 때, 이 물체들이 구속되었다고 말할 수 있다. 이 때, 평면에서 질점의 위치를 나타내는 독립 변수 사용자 편의에 따라 선택하여 사용할 수 있다.

2.2 다물체계 시스템의 운동 방정식

이번에는 Fig. 2의 예시에 대한 운동 방정식을 구성해 보자. 우선 Fig. 2에서 보는 바와 같이 질점 P_1 에 사용자가 정의한 힘 F^e 가 작용하고 있다고 가정하면 운동 방정식은 뉴턴 제 2법칙에 의해서 식 (3), (4)와 같다.

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_{1,x}^e \quad (3)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = F_{1,y}^e \quad (4)$$

여기서, m_1 는 질점 P_1 의 질량, \ddot{x}_1 은 위치를 나타내는 변수 x 의 시간에 대한 두 번 미분, 즉 x 방향 가속도, \ddot{y}_1 은 y 방향 가속도, $F_{1,x}^e, F_{1,y}^e$ 는 각각 질점에 가해지는 x 방향의 힘, y 방향의 힘을 나타낸다. 이를 벡터 형식으로 나타내면 식 (5)와 같다.

$$\mathbf{m}_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1^e \quad (5)$$

여기서,

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_1^e = \begin{bmatrix} F_{1,x}^e \\ F_{1,y}^e \end{bmatrix}$$

그러나 질점 P_1 은 탄성이 없고 질량을 무시할 수 있는 막대로 원점 그리고 P_2 와 연결되어 있기 때문에 힘 F^e 이외에 막대에 의한 힘 F^c 이 질점 P_1 에 추가로 작용한다. 이 때의 운동 방정식은 식 (6)과 같다.

$$\mathbf{m}_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_1^c \quad (6)$$

이중 진자 시스템을 구성하고 있는 질점은 2개이기 때문에 운동 방정식은 식 (7), (8)과 같다.

$$\mathbf{m}_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_1^c \quad (7)$$

$$\mathbf{m}_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2^e + \mathbf{F}_2^c \quad (8)$$

여기서 식 (7)은 질점 P_1 에 대한 운동 방정식이고, 식 (8)은 질점 P_2 에 대한 운동 방정식이다. 식 (7)과 식 (8)을 하나의 행렬 식으로 유도하면 식 (9)와 같다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^c \quad (9)$$

여기서, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_1 \end{bmatrix}$, $\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^e \\ \mathbf{F}_2^e \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^c \\ \mathbf{F}_2^c \end{bmatrix}$ 이다.

위의 운동 방정식을 풀기 위해서는 순수 외력 \mathbf{F}^e 와 구속력 \mathbf{F}^c 를 계산해야 한다. 그러나 구속력 \mathbf{F}^c 를 계산하는 것은 쉽지 않다. 따라서 다물체계 동역학에서는 구속력을 계산하지 않고 위의 운동 방정식을 풀 수 있는 방법을 사용한다. 그 원리는 다음과 같다. 구속력은 힘의 일종으로서 벡터로 표현할 수 있다. 그리고 벡터는 항상 그 벡터에 수직인 다른 벡터와 내적을 하면 소거되는 특성을 가지고 있다. 따라서 구속력에 수직하는 벡터를 찾아 식 (9)의 양변에 내적 하면 구속력은 식에서 소거되어 더 이상 이를 계산하지 않아도 되는 운동 방정식으로 변환된다.

이 구속력에 수직하는 벡터는 다음과 같은 방법으로 찾을 수 있다. 먼저 독립 일반화 변수 벡터 \mathbf{q} 를 정의한다. 여기에서 독립 변수 벡터란 서로 독립인 변수들로 구성된 벡터를 의미하며, 일반화 변수는 어떤 시스템의 위치나 자세를 정의하는데 필요한 “사용자가 임의로 정의한 변수”를 의미한다. 즉, 이 두 가지 특성을 모두 가진 독립 일반화 변수 벡터 \mathbf{q} 라고 한다. 기존의 종속 변수와 독립 변수를 모두 포함하고 있는 벡터 \mathbf{r} 은 항상 \mathbf{q} 의 함수로 나타낼 수 있으며, 이것을 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}) \quad (10)$$

식 (10)을 시간에 대하여 미분하면 아래와 같은 식 (11)을 유도할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (11)$$

여기서, \mathbf{J} 가 \mathbf{q} 와 \mathbf{r} 사이의 속도변환 매트릭스이며, 이것이 바로 구속력에 수직하는 벡터들로 구성된 매트릭스이다. 이 매트릭스에 대한 상세한 설명은 Haug^[1]을 참고한다. 이 속도 변환 매트릭스의 transpose \mathbf{J}^T 를 식 (9)의 양변에 곱하면 식 (12)가 유도되며, 여기서 $\mathbf{J}^T \mathbf{F}^c$ 는 0이다.

$$\mathbf{J}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}^e + \mathbf{J}^T \mathbf{F}^c \quad (12)$$

식 (12)에서 \mathbf{r} 은 앞서 밝힌 바와 같이 독립 변수와 종속변수가 모두 포함되어 있는 벡터이다. 따라서 식 (12) 이외에도 독립 변수와 종속변수의 관계를 지정해줄 수 있는 다른 식이 더 필요하다. 그러나 만일 식 (12)가 독립 변수로만 표현이 된다면, 해당 식 단독으로 운동 방정식의 구성이 가능하기 때문에 \mathbf{r} 을 \mathbf{q} 로 표현하는 것이 더 효율적이다. 이를 위하여 식 (11)을 한번 더 미분하여 식 (13)을 유도한다.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

위의 식 (13)을 식 (12)에 대입하고 정리하면 최종적으로 식 (14)를 유도할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{F}}^e \quad (14)$$

여기서, $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{J}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{J}}$, $\tilde{\mathbf{F}}^e = \mathbf{J}^T \mathbf{F}^e$ 이다.

다시 이중 진자 시스템의 예시로 돌아가보자. 이중 진자 시스템의 운동 방정식을 식 (7)과 식 (8)로 나타내면 앞서 설명한 바와 같이 x_1, y_1, x_2, y_2 로 나타낼 수 있다. 이를 Fig. 3에 표시되어 있는 독립 일반화 변수 $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2)$ 로 표현해 보자.

먼저 이중 진자에 대하여 식 (9)를 유도하여 보면 다음 식과 같다.

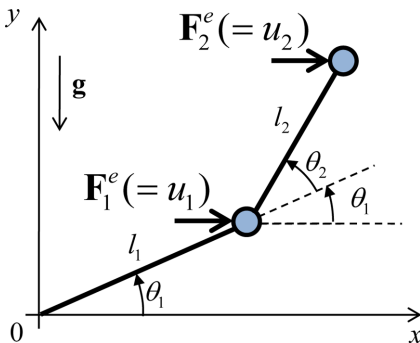


Fig. 3 Double pendulum - Using generalized coordinates

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^c \quad (15)$$

여기서,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_1 & & \\ & & m_2 & \\ & & & m_2 \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

그 다음, 식 (10)을 유도하면 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}) \quad (16)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{r}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

여기서 식 (17)을 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

여기서,

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & 0 \\ l_1 \cos \theta_1 & 0 \\ -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

그리고 식 (17)의 \mathbf{J} 를 미분하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & 0 \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & 0 \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_2 \cdot (\theta_1 + \theta_2) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \cdot (\theta_1 + \theta_2) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \cdot (\theta_1 + \theta_2) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \cdot (\theta_1 + \theta_2) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (18)$$

마지막으로 식 (14)를 이용하여 이중 진자에 대한 운동 방정식을 최종적으로 유도하면 아래와 같다.

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{F}}^e \quad (19)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} (m_1+m_2) \cdot l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \cdot (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{F}} &= \begin{bmatrix} (m_1+m_2) \cdot g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -u_1 l_1 \sin \theta_1 - u_2 l_1 \sin \theta_1 - u_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -u_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

식 (19)을 보면 해당 식을 이루고 있는 행렬은 모두 독립 변수나 그 미분이 서로 곱해져 있는 비선형 미분 방정식이다. 일반적으로 운동 방정식의 해를 시간영역에서 구하는 것은 초기치 문제 이므로 초기 조건과 외력, 그리고 각 질점의 질량과 두 막대의 길이를 식 (20)과 같이 정의하고 시간 영역에서 풀어 해를 도시하면 Fig. 4와 같다.

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= -\pi/2, \quad \dot{\theta}_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = 0, \quad \dot{\theta}_2(0) = 0, \\ u_1(t) &= 0.01 \cdot \sin \omega t N, \quad u_2(t) = 0.01 \cdot \sin \omega t N, \\ l_1 &= 0.5 m, \quad l_2 = 0.25 m, \quad m_1 = 1.0 kg, \quad m_2 = 0.5 kg \end{aligned} \tag{20}$$

Fig. 4는 Fig. 2에서 설명한 질점 P_1 과 P_2 에 x 방향으로 작용하는 외력의 frequency를 각각 2 rad/s, 3 rad/s, 4 rad/s, 5 rad/s로 변경하면서 0초부터 200초까지의 해를 구한 것이다. Fig. 7에서 보는 바와 같이 모든 그래프의 스케일을 동일하게 맞춰줬을 때, 외력의 frequency가 4 rad/s일 때 공진이 일어나는 특성을 가진 시스템이라는 것을 알 수 있다.

3. 다물체계 시스템의 운동 방정식 선형화 및 주파수 영역 해석

2절에서는 다물체계 시스템의 운동 특성을 시간 영역에서 해석 하였다. 특히 Fig. 4에서는 주어진 이중 진자 시스템의 공진 주기가 4 rad/s라는 것을 알 수 있었다. 그러나 이는 네 번의 수치 해석 결과 중 하나일 뿐이며, 또 다른 주기에서 공진 현상이 발생하지 않는 시스템인지는 확신하기 어렵다. 따라서 모든 주파수 영역 중 어떤 주파수에서 공진이 발생하는지 알아내기 위해서는 위의 수치 해석에 많은 시간을 투자해야 한다. 그러나 해당 시스템을 주파수 영역에서 해석할 수 있다면 각 주파수 입력에 대한 응답 특성을 비교적 짧은 시간 안에 해석할 수 있다. 주파수 영역에서 해석이 가능한 시스템은 선형으로 표현된 시스템이며, 따라서 일반적으로 비선형으로 표현된 다물체계 시스템을 주파수 영역에서 표현하기 위해서는 이를 선형화 해야 한다.

예로서 이중 진자 시스템에 대하여 살펴보자. Fig. 3의 이중 진자 시스템의 운동 방정식은 비선형 운동 방정식으로서 식 (19)와 같고, 이를 시간 영역에서 여러 주파수를 가진 외력에 대한 운동을 해석한 결과가 Fig. 4이다. 해당 이중 진자 시스템을 주파수 영역에서 해석하기 위해서는 식 (19)를 선형화 해야 한다.

전미분(total derivative)과 테일러 전개(Taylor series expansion)를 적용하여 선형화를 진행하며, 상세한 과정은 다음과 같다^[2].

식 (9)를 선형화 하기 위해 변분을 취하면 아래

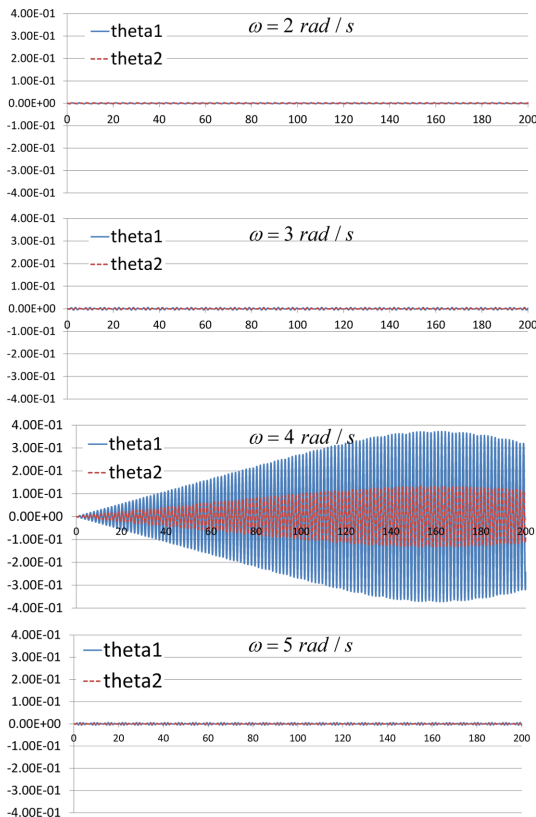


Fig. 4 Dynamic response analysis in time domain

와 같다.

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{r}} = \delta\mathbf{F}^e + \delta\mathbf{F}^c \quad (21)$$

식 (21)의 양변에 식 (11)의 \mathbf{J}^T 를 곱하면 다음과 같다.

$$\mathbf{J}^T\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}^T\delta\mathbf{F}^e + \mathbf{J}^T\delta\mathbf{F}^c \quad (22)$$

여기에서 외력 \mathbf{F}^e 는 위치 \mathbf{r} 과 속도 $\dot{\mathbf{r}}$ 의 함수이므로 $\delta\mathbf{F}^e$ 는 다음과 같다.

$$\delta\mathbf{F}^e = -\mathbf{D}\delta\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{K}\delta\mathbf{r} \quad (23)$$

여기서 $\mathbf{D} = \frac{\partial\mathbf{F}^e}{\partial\dot{\mathbf{r}}}$ 이고, $\mathbf{K} = \frac{\partial\mathbf{F}^e}{\partial\mathbf{r}}$ 이다. 그리고 $\mathbf{F}^c = -\mathbf{C}_r^T\lambda$ 이므로^[1], $\mathbf{J}^T\delta\mathbf{F}^c$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{J}^T\delta\mathbf{F}^c = -\mathbf{J}^T\delta\mathbf{C}_r^T\lambda - \mathbf{J}^T\mathbf{C}_r^T\delta\lambda \quad (24)$$

여기에서 $\mathbf{J}^T\mathbf{C}_r^T = 0$ 이고^[1], $\delta\mathbf{C}_r^T\lambda = \frac{\partial\mathbf{C}_r^T}{\partial\mathbf{r}}\lambda\delta\mathbf{r}$ 이므로, 식 (24)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathbf{J}^T\delta\mathbf{F}^c = -\mathbf{J}^T\frac{\partial\mathbf{C}_r^T}{\partial\mathbf{r}}\lambda\delta\mathbf{r} \quad (25)$$

식 (23)과 (25)를 식 (22)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{J}^T\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}^T(-\mathbf{D}\delta\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{K}\delta\mathbf{r}) - \mathbf{J}^T\frac{\partial\mathbf{C}_r^T}{\partial\mathbf{r}}\lambda\delta\mathbf{r} \quad (26)$$

식 (26)을 음함수 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{J}^T\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{J}^T\mathbf{D}\delta\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{J}^T\left(\mathbf{K} + \frac{\partial\mathbf{C}_r^T}{\partial\mathbf{r}}\lambda\right)\delta\mathbf{r} = 0 \quad (27)$$

식 (27)에 변분 식 $\delta\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}\delta\dot{\mathbf{q}}$, $\delta\mathbf{r} = \mathbf{J}\delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{r} = \mathbf{J}\delta\mathbf{q}$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{J}^T\mathbf{M}\mathbf{J}\delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T\mathbf{C}\mathbf{J}\delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T\left(\mathbf{K} + \frac{\partial\mathbf{C}_r^T}{\partial\mathbf{r}}\lambda\right)\mathbf{J}\delta\mathbf{q} = 0 \quad (28)$$

여기서, D 는 damping coefficient, K 는 restoring coefficient, λ 는 constraint multiplier를 의미한다.

독립 일반화 변수 \mathbf{q} 가 미소하게 변화한다고 가정한다면 독립 일반화 변수의 변화율인 $\delta\dot{\mathbf{q}}$ 의 값을 확인하여 본 다물체계의 특성을 파악할 수 있다. 식 (28)에 특정 시각에서의 독립 일반화 변수

\mathbf{q} 의 값을 대입하면 독립 일반화 변수의 변화율인 $\delta\dot{\mathbf{q}}$ 에 대한 선형화 된 식을 구할 수 있다.

이를 이용하여 본 예시의 선형화를 진행하면 $\mathbf{A}\delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} = \mathbf{H}$ 와 같고, 각 항은 아래와 같다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)\cdot l_1^2+m_2l_2^2+2m_2l_1l_2\cos\theta_2 & m_2l_2^2+m_2l_1l_2\cos\theta_2 \\ m_2l_2^2+m_2l_1l_2\cos\theta_2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2(2\dot{\theta}_1\cdot\delta\dot{\theta}_2+2\dot{\theta}_2\cdot\delta\dot{\theta}_1+2\dot{\theta}_2\cdot\delta\theta_2)\sin\theta_2 \\ -m_2l_1l_2(2\dot{\theta}_1\cdot\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2^2)\cos\theta_2\cdot\delta\theta_2 \\ -m_2l_1l_2\cdot 2\dot{\theta}_1\cdot\delta\theta_1\cdot\sin\theta_2-m_2l_1l_2\cdot\dot{\theta}_1^2\cdot\cos\theta_2\cdot\delta\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)\cdot g l_2\sin\theta_1\cdot\delta\theta_1+m_2g l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot(\delta\theta_1+\delta\theta_2) \\ m_2g l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot(\delta\theta_1+\delta\theta_2) \end{bmatrix}$$

위와 같이 선형화한 결과에 식 (20)에서 주어진 초기 조건 $\theta_1(0) = -\pi/2$, $\theta_2(0) = 0$ 를 대입하면 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2)\cdot l_1^2+m_2l_2^2+2m_2l_1l_2 & m_2l_2^2+m_2l_1l_2 \\ m_2l_2^2+m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\ddot{\theta}_1 \\ \delta\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_1+m_2)\cdot g l_1-m_2g l_2 & -m_2g l_2 \\ -m_2g l_2 & -m_2g l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} 0.5313 & 0.0938 \\ 0.0938 & 0.0313 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\ddot{\theta}_1 \\ \delta\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5750 & 1.2250 \\ 1.2250 & 1.2250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

위와 같은 선형 방정식은 주파수 영역에서 해석할 수 있으며, 그 결과는 Fig. 5와 같다. Fig. 5의 첫번째 그래프는 Fig. 3에 표시된 외력 u_1 의 주파수가 달라지면 θ_1 의 응답이 어떻게 달라지는지 보여주고 있는데, u_1 대 주파수가 4.0 rad/s와 8.5 rad/s 일 때 θ_1 의 응답이 100배 가량 커지는 것을 볼 수 있다. 이와 마찬가지로 두 번째부터 네 번째 그래프를 모두 살펴보면 차례로 외력 u_1 대비 θ_1 의 응답, u_1 대비 θ_2 의 응답, 그리고 u_1 대비 θ_1 의 응답 역시 모두 주파수가 4.0 rad/s와 8.5 rad/s일 때 이중 진자의 공진 현상이 나타나는 것을 볼 수 있다.

주파수 영역에서 해석한 결과 공진이 나타나는 주파수 중 하나인 4.0 rad/s는 이미 비선형 운동 방정식을 시간 영역에서 해석하였을 때 확인하였던

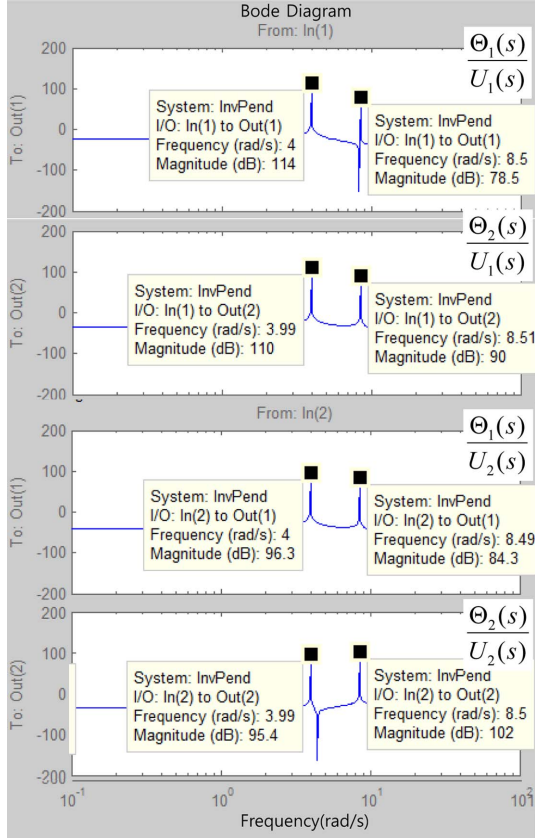


Fig. 5 Dynamic response analysis in frequency domain

공진 주기와 일치한다는 것을 알 수 있다.

그리고 Fig. 5에서 입력 1과 출력 1의 RAO와 입력 2와 출력 2의 RAO를 보면 그래프가 아래로 크게 꺾여 내려간 부분을 볼 수 있다. 이는 anti-resonance에 관련된 부분이다. 본 예시에서 다루고 있는 이중 진자 시스템은 2자유도계 시스템이며, 이는 1자유도계 시스템이 2개 있는 것으로 해석할 수 있다. 여기서 2자유도계 시스템의 주파수 응답 함수의 주파수 별 크기는 각 2개의 1자유도계 시스템의 주파수 응답함수의 주파수 별 크기를 구해 더하면 되는데, anti-resonance에서는 2개 주파수 응답함수의 크기는 같지만 위상이 반대이기 때문에 합하면 서로 상쇄되어 크기가 0(이론적으로는) 이 되는 주파수를 말한다. 그 상세한 내용은 참고 문헌^[3]을 참조한다.

4. 해상 풍력 발전기의 운동 방정식 유도

Fig. 6은 해상 풍력 발전기의 운동 방정식 구성

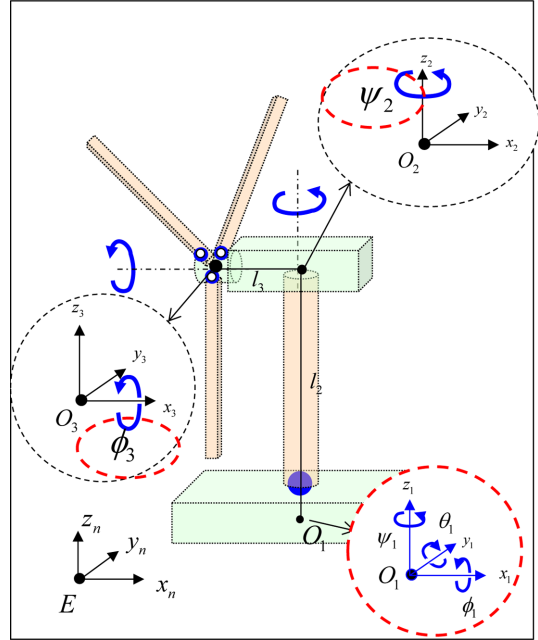


Fig. 6 Coordinate system of offshore wind turbine

을 위한 좌표계를 설정한 것이다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 해상 풍력 발전기는 플랫폼과 타워, 나셀, 그리고 로터 이렇게 3가지 강체로 구분되어 있으며, 각각 회전 관절로 연결되어 있다.

첫 번째 바디는 플랫폼과 타워, 두 번째는 나셀, 세 번째는 바디는 로터로 정의하고, 따라서 3가지 강체의 운동 방정식을 하나의 행렬로 표현 하면 식 (35)와 같다.

$$M\ddot{r} + N\dot{r} = F^e + F^c \tag{31}$$

여기서, $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix}$, $\ddot{r} = \begin{bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_2 \\ \ddot{r}_3 \end{bmatrix}$

$$F^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \end{bmatrix}, F^c = \begin{bmatrix} F_1^c \\ F_2^c \\ F_3^c \end{bmatrix}, m_i = \begin{bmatrix} m_i I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & I_i \end{bmatrix}, n_i = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_i \cdot I_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{i,x} & -\omega_{i,y} \\ -\omega_{i,z} & 0 & \omega_{i,z} \\ \omega_{i,y} & -\omega_{i,x} & 0 \end{bmatrix}, m_i \text{는 } i\text{번째 바디의 질량, } I_i$$

는 i 번째 바디의 질량 이차 모멘트, $I_{3 \times 3}$ 은 3×3 단 위 행렬, ω_i 는 i 번째 바디의 각속도 벡터,

$\ddot{\mathbf{r}}(\ddot{x}_i, \ddot{x}_j, \ddot{x}_k, \dot{\omega}_{i,x}, \dot{\omega}_{i,y}, \dot{\omega}_{i,z})$ 는 i 번째 바디 무게 중심에 정의한 물체 고정 좌표계의 선가속도 벡터와 각가속도 벡터, \mathbf{F}_i 는 i 번째 바디의 무게 중심에 작용하는 힘이다. 이상과 같이 식 (31)은 총 18개 변수로 이루어져 있다.

여기에서 유의할 점은 식 (31)의 좌변 두 번째 항이 식 (9)에는 없었던 항이라는 것이다. 식 (31)의 좌변 두 번째 항은 3차원 운동을 하는 강체의 운동을 기술할 때에 나타나는 항으로서 식 (9)은 2차원 평면 운동을 하는 질점의 운동 방정식이었기 때문에 나타나지 않았다. 이 추가 항에 대한 상세한 설명은 참고 문헌^[4,6]을 참고한다. 식 (31)이 식 (9)와 다르기 때문에 최종 유도된 형태인 식 (14)도 다음과 같은 형태로 다르게 표현된다.

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}} \tag{32}$$

여기서, $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{J}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{J}}$, $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}^e$ 이다.

이상과 같은 방법으로 해상 풍력 발전기에 대한 운동 방정식을 최종적으로 유도할 수 있다. 이상에서 보인 바와 같이 풍력 발전기는 여러 강체들이 관절로써 서로 연결되어 있는 시스템, 즉 다물체계 시스템이며, 운동 방정식은 비선형이고, 운동 특성은 시간 영역에서 해석되어야 한다. 그러나 1절에서 밝힌 바와 같이 시간영역에서의 운동 해석은 수많은 외력에 대하여 각각 수행하여야 하기 때문에 적지 않은 시간이 소요된다. 예를 들어 본 논문의 이중 진자 예제에서 한가지 외력에 대하여 약 200초 가량의 거동을 시간영역에서 해석하는데 걸리는 시간은 약 10초 가량이다. Fig. 4에서는 주파수가 다른 4가지의 외력에 대한 해석 결과만 도시 하였으나, 정확한 공진 주파수를 알아내기 위해서 본 연구에서는 약 40회 이상, 즉 해석 시간만 400초 가량 소요 되었다. 또한, 해석 준비 시간까지 포함하면 더 많은 시간이 소요 되었다. 그러나 주파수 영역에서 해석을 수행했을 때는 약 5초 미만의 시간으로 모든 영역의 주파수에서 공진지점을 찾아낼 수 있었다. 이에 따라서 3절에서 밝힌 바와 같이 풍력 발전기의 비선형 다물체계 운동 방정식을 식 (28)을 이용하여 선형화하고 주파수 영역에서 해석하면 이중진자의 해석을 통해 밝힌 시간 차이보다 큰 효율로 해상 풍력 발전기의 운동 특성을 밝힐 수 있을 것이라고 예상된다.

여기서 중요한 것은 식 (28)을 자동으로 유도할

수 있도록 하는 것인데, 식 (28)은 이미 선형화 되기 전의 운동방정식인 식 (14)에 있는 항으로 구성되어 있는 것을 알 수 있으며, 해당하는 모든 항은 자동으로 유도가 가능하기 때문에 식 (28)역시 자동으로 유도하는 것이 가능하리라 예상 된다.

5. 결론 및 향후 연구 계획

본 연구에서는 비선형 다물체계 시스템의 운동 방정식을 선형화하는 방법과 선형화한 다물체계 시스템 운동 방정식을 주파수 영역에서 해석하는 방법을 연구하였다. 본 방법의 효용성을 검토하기 위해 이중 진자 시스템에 적용하였다. 끝으로 본 방법을 해상 풍력 발전기에의 동적 거동을 해석하는데 활용하기 위해 해상 풍력 발전기를 다물체계 시스템으로 모델링하고 이에 따라 운동 방정식을 유도하였다.

향후에는 해상 풍력 발전기의 운동 방정식을 선형화한 후, 이의 동적 거동을 주파수 영역에서 해석함으로써 짧은 시간 내에 해상 풍력 발전기의 운동 특성을 파악할 예정이다.

후 기

이 논문은 (a) 2014학년도 동의대학교 교내연구비(2014AA443), (b) 2012년도 산업통상자원부/한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원 사업(No. 20124030200110 and No. 20128520020010), (c) 산업통상자원부의 산업원천기술개발사업(10035331, 시뮬레이션 기반의 선박 및 해양플랜트 생산기술 개발), (d) 서울대학교 공학연구소, (e) 서울대학교 해양시스템공학연구소의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다.

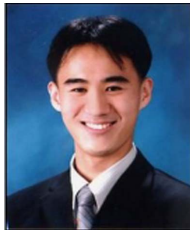
References

1. Haug, E.J., 1992, *Intermediate Dynamics*, Prentice-Hall.
2. Minaker, B. and Frise, P., 2005, Linearizing the Equations of Motion for Multibody Systems Using an Orthogonal Complement Method, *Journal of Vibration and Control*, 11, pp.51-66.
3. Ryue, J.S., 2011, *Vibration and Noise*, Naval Architecture and Ocean Engineering, Ulsan University, Lecture Note.
4. Ginsberg, J.H., 2008, *Engineering Dynamics*,

Cambridge.

5. Cha, J.H. and Roh, M.I., 2010, Dynamic Response Simulation of a Heavy Cargo Suspended by a Floating Crane Based on Multibody System Dynamics, *Ocean Engineering*, 37(14-15), pp.1273-1291.

6. Cha, J.H., Ham, S.H., Lee, K.Y. and Roh, M.I., 2010, Application of a Topological Modelling Approach of Multi-body System Dynamics to Simulation of Multi-floating Cranes in Shipyards, *Journal of Multi-body Dynamics*, 224(4), pp.365-373.



구 남 국

2004년 서울대학교 조선해양공학과 학사
 2012년 서울대학교 조선해양공학과 박사
 2012년 서울대학교 해양기술인력양성사업단 연수연구원
 2013년 서울대학교 공학연구소 선임연구원
 2014년~현재 동의대학교 조선해양공학과 조교수
 관심분야: 해양 플랜트, 다물체계 동역학 및 제어, 용접/전처리 로봇



노 명 일

1998년 서울대학교 조선해양공학과 학사
 2000년 서울대학교 조선해양공학과 석사
 2005년 서울대학교 조선해양공학과 박사
 2005년~2007년 서울대학교 공학연구소/해양시스템공학연구소 선임연구원
 2007년~2013년 울산대학교 조선해양공학부 전임강사, 조교수
 2013년~현재 서울대학교 조선해양공학과 부교수
 관심분야: 전산선박설계 및 생산, 시뮬레이션 기반 설계 및 생산, 최적 설계, 해양 플랜트 설계, CAD/CAM/CAE, CAGD



하 솔

2003년 서울대학교 조선해양공학과 학사
 2013년 서울대학교 조선해양공학과 박사
 2013년~현재 서울대학교 공학연구소 선임연구원
 관심분야: 해양 플랜트 설계 최적화, 모델링 및 시뮬레이션, 수중 운동체(잠수함, 어뢰) 교전 시뮬레이션, 격자 기반 시뮬레이션 (Cellular Automata, Lattice Gas Automata, Lattice Boltzmann Method)



신 현 경

1979년 서울대학교 조선공학과 학사
 1981년 서울대학교 조선공학과 석사
 1983년 미국 MIT 해양공학과 Ocean Engineer
 1987년 미국 MIT 해양공학과 박사
 1981년~현재 울산대학교 조선해양공학부 교수
 관심분야: 해양 구조물 동역학