

## 원형 핀과 구멍의 접촉에서 헤르츠 응력장 가정을 위한 조건

김형규<sup>†</sup>

한국원자력연구원 경수로핵연료기술개발부

### Conditions for Assuming Hertzian Stress for the Contact between a Circular Pin and Hole

Hyung-Kyu Kim<sup>†</sup>

LWR Fuel Development Division, Korea Atomic Energy Research Institute

(Receive August 15, 2015; Revised September 20, 2015; Accepted September 21, 2015)

**Abstract** – This paper focuses on the conformal contact problem. A typical example of conformal contact is the contact between a pin and hole. In particular, this paper focuses on the condition for assuming a contact stress field to be a Hertzian pressure profile by using well-known classical solutions associated with Hertzian contact. Persson first developed the conformal contact analysis method around half a century ago, but there have been no significant improvements since then. The present research also adopted this method, but developed new solutions from the viewpoint of application to structural design. The analysis began with a comparison between Persson's conformal contact stress and the Hertzian stress fields. The next step was to check the differences in the normalized stress values of both. This study used the tolerance for the difference in the peak stresses of Persson's solution and the Hertz solution to validate the Hertzian assumption. This gave the range for the difference in radii of the pin and hole when the contact force and mechanical properties of the material are specified. The results showed that, at a tolerance of 5%, the Hertzian assumption is valid if half of the contact angle is less than 35°. In addition, the Hertzian assumption holds even for a relatively long contact length, in contrast to the general incomplete contact problem. This paper discusses these results along with other aspects of the application to the design.

**Keywords** – conformal contact(등각 접촉), contact angle(접촉 각), contact length(접촉 길이), Hertzian stress assumption(헤르츠 응력장 가정), contact mechanics(접촉역학)

#### Nomenclature

	$p(y), p(\phi), p(x)$ : Contact normal stresses
	$\nu$ : Poisson's ratio
	$\phi_c$ : Half of the contact angle
$a$	: Half of the contact length
$E, E_i, E_i^*$	: Elastic modulus, and those of the body $i$ , and under the plane condition *
$P$	: Contact normal force
$R, R_1, R_2$	: Radii of the contact contour, pin, and hole
$f(y)$	: Normalized contact normal stress

#### 1. 서론

공학 구조물의 연결부위에는 원형 핀(이하 핀이라 함)과 구멍을 많이 사용하고 있다. 이때 핀의 경우 단면에 발생하는 전단응력을 기준으로 설계하고 또한 파손을 예측하는 것이 일반적이다. 그러나 구조물에 작용하는 하중이 반복적으로 가해지는 피로에서는 핀과 구멍의 접촉면에 수직 및 전단응력이 반복적으로 발생하게 되

<sup>†</sup>Corresponding author : hkkim1@kaeri.re.kr  
Tel: +82-42-868-2111, Fax: +82-42-863-0565

어 이로부터 마멸이나 피로균열이 발생할 수 있다. 이러한 접촉면의 마멸이나 피로균열의 성장은 연결부의 설계수명을 단축하는 결과를 갖고 온다. 따라서, 핀과 구멍의 건전한 설계를 위해서는 접촉면에 발생하는 응력을 분석하는 것이 필요하다.

접촉역학에서 핀과 구멍의 접촉형상은 등각 접촉(conformal contact)이라 하며, 이것은 접촉면의 길이(크기)가 접촉물체의 특성 치수(characteristic dimension; 예를 들어 핀 또는 구멍의 반지름)와 비교할 수 있을 정도의 크기를 갖는 경우에 대해 정의된다. 즉 핀과 구멍의 접촉에서처럼 하나의 물체를 다른 물체가 감싸는 형상이 되어 각각의 반지름이 양(+)과 음(-)으로 표현하게 되는 경우가 일반적으로 등각 접촉을 형성한다. 이에 반하는 경우를 비등각 접촉(non-conformal contact)이라 한다. 한편, 접촉형상에 대한 또 다른 분류로서 완전 접촉(complete contact)과 불완전 접촉(incomplete contact)이 있으며, 이것은 각각 접촉면의 경계가 작용하중과 무관하거나 하중에 따라 변하는 경우를 일컫는다.

접촉 문제에서 가장 기초적으로 다루는 것으로 헤르츠 접촉[1]이 있으며, 아래와 같은 경우에 정의된다.

- i) 두 물체의 접촉부 형상이 연속함수(continuous function)으로 정의되며 비등각 접촉이며
- ii) 접촉면 변형률의 크기가 작고
- iii) 각각의 접촉 물체를 반 무한체(semi-infinite body)로 가정할 수 있으며
- iv) 접촉면에 마찰이 존재하지 않는다.

따라서 헤르츠 접촉은 비등각 접촉인 동시에 불완전 접촉 형상으로 정의할 수 있다. 한편 헤르츠 접촉 문제에 마찰을 추가적으로 고려하고 접촉 전단하중이 접촉면 마찰력보다 작은 경우에는 접촉면 경계 부근에 미끄럼이 나타나고 그 내부는 고착상태가 되는 부분 미끄럼 문제가 된다. 이 문제는 Mindlin-Cattaneo 문제[2,3]라 칭하고 프레팅 피로 및 프레팅 마멸 손상의 해석 모델로 널리 이용되고 있으므로 다양한 응용 예에 대한 많은 해가 존재한다[4,5].

핀과 구멍의 접촉 형상을 정의하기 위해 핀의 원형 단면을 고려하면, 접촉 하중이 증가함에 따라 핀과 구멍 사이의 접촉면 길이가 증가하게 될 것이 명백하므로 불완전 접촉으로 정의할 수 있다. 이에 더하여 접촉면의 길이가 핀 또는 구멍의 반지름에 비해 아주 작아 핀 및 구멍을 갖는 물체를 각각 반 무한체로 가정할 수 있다면 비등각 접촉으로 정의할 수 있어 접촉

형상을 헤르츠 접촉으로 가정할 수 있게 된다. 헤르츠 접촉으로 가정할 수 있으면 기존에 개발되어 있는 많은 해를 이용할 수 있어 공학적으로 매우 유용하다.

따라서 핀과 구멍의 접촉 형상을 헤르츠 접촉으로 가정할 수 있는 조건을 구하고 실제 접촉 문제에 이를 적용할 수 있다면 관련된 손상 해석이 매우 용이해질 뿐만 아니라 공학적으로 많은 정보를 제공할 수 있을 것이다. 이 문제는 접촉면의 길이가 핀과 구멍의 반지름에 비하여 얼마나 작아야 하며 이를 위한 조건이 무엇인지를 파악하는 것으로 귀결되며 이것이 본 논문의 목적이다.

따라서 본 논문의 전개는 다음과 같이 하였다. 우선 Persson이 유도한 등각 접촉 상태의 접촉 응력장[6]을 분석한다. 또한 핀과 구멍의 접촉 형상에서 헤르츠 응력장을 유도하고 동일한 접촉 길이에서의 Persson의 응력장과 헤르츠 응력장을 비교한다. 이로부터 각각의 접촉 응력 최대값의 차이가 사용자가 설정한 공차보다 작은 경우를 찾아 핀과 구멍의 접촉 응력을 헤르츠 응력으로 가정할 수 있는 조건을 도출한다. 다음, 응용 예제로서 알루미늄 7075-T651 합금(Al 7075-T651), 304 스테인레스강(SST 304), 그리고 HT-9강에 대해 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있는 접촉 하중 및 핀과 구멍의 반지름을 구하고 그 결과를 고찰한다.

## 2. 이 론

### 2-1. 등각 접촉에 대한 Persson의 해

원형 단면의 핀과 구멍의 접촉 문제를 풀기 위해 Fig. 1과 같은 기하학적 형상을 생각하였다. Fig. 1에

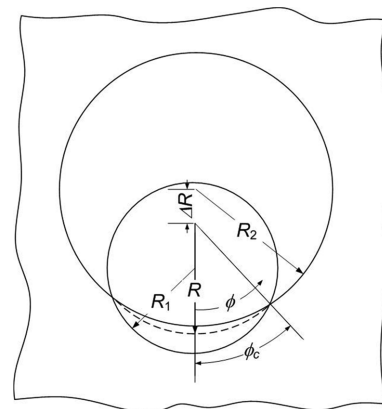


Fig. 1. Geometrical configuration of the present problem.

서 핀과 구멍의 반지름은 각각  $R_1, R_2$ 로 표기되어 있으며 접촉 하중  $P$ 에 의해 접촉면에서 탄성 변형이 발생한 이후의 원형 접촉면 반지름을  $R$ 이라 하였다. 또한 접촉면 중앙으로부터 각의 변화를  $\phi$ 로 나타내고, 접촉면의 양 경계는 중앙으로부터  $\pm\phi$  만큼 떨어져 있다고 생각한다.

Persson은, 그의 박사학위 논문에서 Fig. 1과 같은 등각 접촉 문제를 최초로 해석하였으며, 반경 방향의 변위와 접촉 응력의 관계를 분석하여 접촉 응력장을 구할 수 있는 지배방정식으로서 다음의 특이 미적분 방정식(singular integro-differential equation)을 유도하였다[6].

$$\int_{-b}^b \frac{df(t)}{dt} \frac{dt}{t-y} + \frac{\lambda\pi f(y)}{1+\eta(1+y^2)} = -\frac{4\xi}{\pi(1+y^2)^2} + \frac{B}{1+y^2} \quad (1)$$

$$B = \frac{2\xi}{\pi} - \frac{2\eta}{1+\eta} \int_{-b}^b \frac{f(t)dt}{1+t^2} - \frac{\pi E_1^* \Delta R}{(1+\eta)P} \quad (2)$$

여기서  $f(y) = Rp(y)/P$ 는 접촉 수직응력  $p(y)$ 를 무차원화한 함수이며, 다음의 조건을 만족한다.

$$\int_{-b}^b \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \quad (3)$$

한편  $b, y$ 는 문제의 기하학적 형상과 관련한 변수이며,  $\eta, \lambda, \xi$ 는 재료의 탄성적 성질과 관련한 상수로서 각각 다음과 같다.

$$b = \tan\left(\frac{\phi_2}{2}\right), \quad y = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (4)$$

$$\eta = \frac{E_1^*}{E_2^*}, \quad \lambda = (1-\nu_1^*) - \eta(1-\nu_2^*), \quad \xi = \frac{\pi 2(1+\eta) - \lambda}{2(1+\eta)} \quad (5)$$

식 (5)에서  $E, \nu$ 는 각각 탄성계수, 포와송 비를 나타내며, 하첨자 1은 핀, 2는 구멍을 갖는 물체를 의미한다. 상첨자로 표기된 \*는 평면 응력 및 평면 변형률 조건을 구분하기 위한 것으로 아래의 Table 1과 같다.

본 논문에서는 문제의 단순화를 위해 핀과 구멍을 갖는 물체가 동일한 재료인 경우를 고려한다. 이 경우,

**Table 1. Definition of  $E_i^*$  and  $\nu_i^*$  of Eq. (5) ( $i = 1, 2$ )**

	Plane strain	Plane stress
$E_i^*$	$E_i/(1-\nu_i^2)$	$E_i$
$\nu_i^*$	$\nu_i/(1-\nu_i)$	$\nu_i$

식 (4)에서  $\eta=1, \lambda=0, \xi=\pi$ 이 되고, 식 (1)과 (2)의 지배방정식은 다음과 같이 단순해진다.

$$\int_{-b}^b \frac{df(t)}{dt} \frac{dt}{t-y} = \frac{4}{(1+y^2)^2} + \frac{B}{1+y^2} \quad (6)$$

$$B = 2 - \int_{-b}^b \frac{f(t)dt}{1+t^2} - \frac{\pi E^* \Delta R}{2P} \quad (7)$$

Persson은 식(6)의 해로서 무차원화된 접촉 수직응력을 다음 식과 같이 유도하였다[6].

$$f(y) = \frac{Rp(y)}{P} = \frac{Rp(\phi)}{P} = \frac{2}{\pi\sqrt{b^2+1}} \frac{\sqrt{b^2-y^2}}{1+y^2} + \frac{1}{2\pi b^2(b^2+1)} \log \left[ \frac{\sqrt{b^2+1} + \sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{b^2+1} - \sqrt{b^2-y^2}} \right] \quad (8)$$

한편 접촉 길이(또는 접촉 각,  $\phi$ ;  $\phi$ 는 Fig. 1에서 보는 것과 같이 접촉 각의 반(1/2)을 의미하나, 수식에서의 용어 단순화를 위해 이후 ‘접촉 각’이라 함)는 핀과 구멍의 반지름 차, 재료의 성질 및 접촉 하중에 영향을 받게 될 것이라는 것을 쉽게 예측할 수 있다. 이에 대한 관계 식을 Persson은 다음과 같이 정리하였다[6].

$$\frac{E^* \Delta R}{P} = \frac{21-b^2}{\pi b^2} - \frac{I}{\pi^2 b^2(b^2+1)} \quad (9)$$

$$I = \int_{-b}^b \log \left[ \frac{\sqrt{b^2+1} + \sqrt{b^2-t^2}}{\sqrt{b^2+1} - \sqrt{b^2-t^2}} \right] \frac{dt}{t^2+1} \quad (10)$$

여기서  $\Delta R = R_2 - R_1$ 으로서 핀과 구멍의 반지름 차이를 말한다.

### 2-2. 등각 접촉 경우의 헤르츠 응력장

헤르츠 응력장은 다음과 같이 표현된다[5].

$$p(x) = p_o \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2P}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (11)$$

여기서  $p_o$ 는 접촉면 중앙에서의 최대 응력이며  $a$ 는 접촉 길이의 반을 의미한다. 이때  $x$ 축은 원형 단면이 평판에 접촉하는 경우를 생각할 때 평판의 윗변인 직선을 따르는 좌표이다. 식 (11)을 Fig. 1과 같은 핀과 구멍의 형상에 적용하기 위해 다음과 같이 변수 치환을 한다.

$$x = R\phi, \quad a = R\phi_o \quad (12)$$

식 (12)를 식 (11)에 대입하여 식 (8)과 같이 무차

원화된 접촉 수직 응력장을 유도하면 다음과 같다.

$$\frac{Rp(\phi)}{P} = \frac{2}{\pi\phi_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\phi}{\phi_c}\right)^2} \quad (13)$$

한편 접촉면 중앙에서의 최대 응력은  $\phi=0$ 일 때로서 다음과 같다.

$$\frac{Rp_{\max}}{P} = \frac{Rp(0)}{P} = \frac{2}{\pi\phi_c} \quad (14)$$

### 3. 해석

#### 3-1. Persson 해와 헤르츠 응력장의 비교

Persson이 유도한 등각 접촉에서의 접촉 응력장과 헤르츠 응력장을 비교하여 Fig. 2에 도시하였다. 이를 위해 특정한 접촉 각,  $\phi$ 일 때의 식 (8)과 식 (13)의 거동을  $\phi$ 를 변수로 하여 나타낸 것이다. 우선, 등각 접촉 응력장의 형상(식 (8))이 헤르츠 응력장(식 (13))과 같이 접촉 구간의 중앙에서 최대가 되고,  $\phi$ 의 절대 값이 증가함에 따라 포물선 형태로 단조 감소하며,

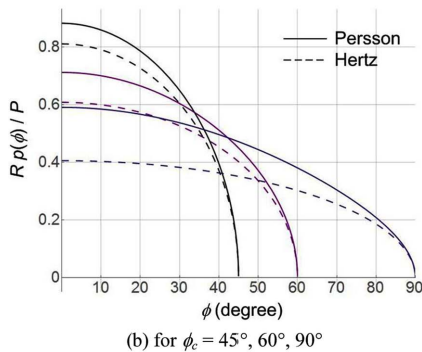
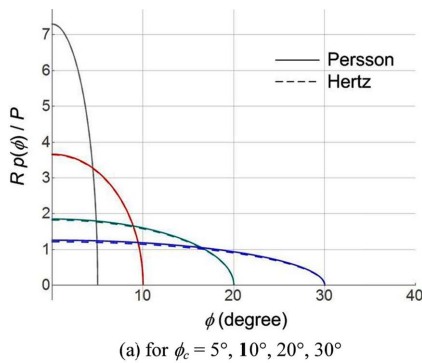


Fig. 2. Comparison of Persson's solution (Eq. (8)) and the Hertz contact stress (Eq. (13)).

접촉 경계에 도달하면 접촉 응력이 0이 되는 것을 알 수 있다. 접촉 경계에서 접촉 응력이 0이 되는 것은 불완전 접촉을 나타내는 것으로 본 문제의 기하학적 형상을 고려할 때 타당한 결과이다.

한편  $\phi$ 가 작을수록 식 (8)과 식 (13)에 의한 접촉 응력의 차이가 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 쉽게 예상할 수 있는 것과 같이, 이것은 접촉 길이가 줄어들수록 등각 접촉 응력장이 헤르츠 응력장과 점점 더 유사해지는 것을 보여주는 것이다. 특히 그 응력의 차이는 접촉 경계로 접근함에 따라 단조 감소하는 것을 알 수 있다. 따라서, 헤르츠 응력으로 가정할 수 있는 등각 접촉 조건은 접촉부 중앙에서의 최대 응력 값 차이를 이용하여, 이 값이 설정하는 허용 값(공차) 이내로 되는 것을 찾는 것이 타당하다고 생각할 수 있다.

#### 3-2. 헤르츠 응력장의 적용 가능 조건

##### 3-2-1. 접촉 각의 조건

식 (8)과 식 (13)의 응력장에서  $\phi = 0$ 일 때의 접촉 응력 최대 값을 비교하였다. 본 연구에서는 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있는 등각 접촉 응력장은 각각의 최대 응력 값 차이의 비(공차)가 5% 이하가 되는 것을 기준으로 설정하였다. Fig. 3에 그 결과를 보여주고 있으며  $\phi_c \leq 35.57^\circ$ 일 때 설정한 공차(5%)를 만족하였다.

한편 Fig. 2의 결과와 함께,  $\phi \leq \phi_c = 35.57^\circ$ 인 구간에서 접촉 응력 값 차이는 5% 보다 항상 더 작게 되는 것을 알 수 있다.

##### 3-2-2. 하중, 재료 및 기하학적 조건

실제 핀과 구멍의 설계에서는 접촉 응력을 헤르츠 응력장으로 가정하기 위해 접촉 각,  $\phi$ 를 기준 변수로

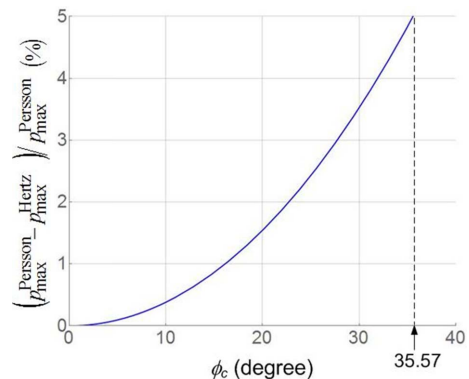


Fig. 3. Ratio of the peak contact stress differences of Persson's and Hertzian solutions.

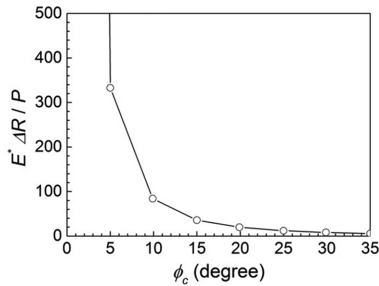


Fig. 4. Behaviour of  $E^* \Delta R / P$  as a function of  $\phi_c$ .

할 수 없다. 그 이유는 식 (9)와 (10)에서 볼 수 있듯이  $\phi_c$ 는 핀과 구멍을 갖는 물체의 탄성계수, 반지름의 차이 및 접촉 하중에 영향을 받기 때문이다. 따라서 여기서는 실제의 설계를 위한 방법을 생각한다.

이를 위하여 우선 식 (10)의 거동을 조사하였으며 이를 Fig. 4에 보여 주고 있다. Fig. 4에서  $\phi_c$ 의 범위는 3.2.1항의 결과를 이용하여, 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있는  $0^\circ \leq \phi_c \leq 35^\circ$ 에 대해 나타내었다. 여기서 식 (9)의 좌변,  $E^* \Delta R / P$ 는  $\phi_c$ 가 증가함에 따라 감소하는 것을 알 수 있다. 특히  $\phi_c$ 가 작은 구간에서 감소하는 속도가 매우 크며 이후 점차 느려지는 것을 알 수 있다.

$\phi_c$ 가 감소하기 위한 조건은 접촉 하중이 감소하거나 핀과 구멍의 반지름 차이가 증가하거나 또는 재료의 탄성계수가 증가하는 경우가 되며, 이 각각의 조건이 등각 접촉 응력장을 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있는 조건이 된다. 따라서 실제 핀과 구멍의 해석적 설계에서 접촉 응력을 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있기 위해서는, 예를 들어 핀과 구멍의 틈새가 결정되어 있는 경우, 접촉 하중을 줄이거나 탄성계수가 큰 재료를 사용하는 것이 요구된다. 만일 접촉 하중 및 재료가 결정되어 있을 때에는 구멍에 대한 핀의 반지름을 줄이는 방법을 사용하면 된다. 이러한 설계 문제를 다음 절에서 응용 예를 이용하여 분석한다.

#### 4. 응용 예

핀과 구멍을 갖는 물체의 재료로서 구조용 재료로 널리 사용하는 Al7075-T651, SST 304 및 HT-9강을 고려하였으며 각각의 탄성계수와 프와송 비, 그리고 이 들로부터 평면 변형을 상태일 때의  $E^*$  값을 Table 2에 보여 준다.

한편 접촉 각,  $\phi_c=5^\circ$  및  $35^\circ$ 인 경우를 고려하며 이

Table 2. Mechanical properties of the materials for example problems

Material	$E$ (MPa)	$\nu$	$E^*$ (MPa)
Al 7075-T651	71700	0.33	80462.3
SST 304	193000	0.29	21072.2
HT-9	220000	0.33	246886

Table 3. Difference in radii of the pin and hole (in mm)

$\phi_c$	$5^\circ$	$35^\circ$
Al 7075-T651	4.13	0.06
SST 304	1.58	0.02
HT-9	1.34	0.02

때 식 (9) 및 (10)을 이용하면,  $\phi_c=5^\circ, 35^\circ$  각각  $E^* \Delta R / P=333.006, 5.49112$ 로 계산된다. 한편 접촉 하중은  $P=1$  kN로 하였다. 이를 이용하여, 각각의 경우에 핀과 구멍의 반지름 차이,  $\Delta R$ 의 결과를 Table 3에 나타내었다.

Table 3에서 탄성계수가 낮은 재질일수록, 접촉 응력을 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있는 핀과 구멍의 반지름 차이 및 범위를 증가시킬 수 있다는 것을 확인할 수 있다. 이것은 헤르츠 응력장으로 해석할 수 있는 핀과 구멍의 설계에서 틈새 크기 및 공차의 결정에 여유를 갖기 위해서는 탄성계수가 낮은 재료를 사용하면 가능하다는 것을 의미한다.

한편, Table 3의 결과는 하중의 증가에 대해 일차적으로 비례하게 된다. 즉, 10 kN의 하중이 작용할 경우, 반지름의 차이는 Table 3의 각각의 값이 10배가 되며, 이것은 핀과 구멍의 사이의 틈새를 10배가 되도록 하여도 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있다는 것을 의미한다.

#### 5. 토 의

본 연구결과, 등각 접촉 형상의 접촉 응력장을 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있는 접촉 길이는 반지름의 약 1.2배 또는 원주의 약 20% 정도까지도 가능한 것으로 나타났다( $2\phi_c^{max}=70^\circ \approx 1.221; 70^\circ/360^\circ \approx 0.194$ ). 이것은 헤르츠 접촉에서의 접촉 길이 ( $a = \sqrt{(4PR)/(\pi E^*)}$ , [5])에 비해 상당히 큰 값이다. 물론 이 값은 본 논문에서 헤르츠 응력장으로 가정하기 위한 최대 응력의 공차를 5%로 한 것이므로, 공차를 줄일 경우 감소할

수는 있다. 그럼에도 불구하고, 접촉 경계에서의 접촉 응력이 0이 되어 불완전 접촉의 기준을 명백히 만족하는, 원형 핀과 구멍의 등각 접촉 문제는 헤르츠 접촉과 같은 비등각 및 불완전 접촉과는 접촉 길이에 있어 다른 특성을 갖는 것으로 파악되었다.

Table 3에서 보여 주는 것과 같은 핀과 구멍의 반지름 차이(또는 틈새) 값 및 이를 위한 식 (9)와 (10)은 기계 요소에 따라 달리 적용하여야 할 것으로 판단된다. 예를 들어, AI 7075-T651과 같이 낮은 탄성계수의 재료에서 접촉 각이 작은 경우에 계산된 큰 틈새는 체결에 의한 동력 전달이 필요한 구조에 적용하기는 어려울 것이며 단순한 조립 구조에 적절한 설계가 될 수 있다. 이와 반대로 탄성계수가 큰 SST 304 또는 HT-9 강과 같은 재료의 경우에 보여 주는 0.02 mm 정도의 틈새는 기계가공에서 상당히 작은 제작 공차의 크기와 근사하다. 따라서 가공 후 핀과 구멍과의 틈새가 전혀 없는 결과를 얻을 수 있으므로 접촉 하중을 줄이는 설계가 요구될 것으로 판단된다.

## 5. 결 론

핀과 구멍 사이의 등각 접촉 문제에서 접촉 응력을 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있는 조건을 얻고자 한 본 연구 결과 다음과 같은 결론을 도출할 수 있었다.

1. 등각 접촉 응력과 헤르츠 응력의 최대값 차이를 5% 이내로 할 때, 핀과 구멍의 접촉 각( $\phi$ )이  $35^\circ$  이하가 되면 헤르츠 응력장으로 가정할 수 있다.
2. 등각 접촉 응력과 헤르츠 응력의 차이는 접촉부

중앙에서 최대가 되며 접촉 경계로 갈수록 단조 감소한다.

3. 등각 접촉 형상에서 헤르츠 응력과 관련한 해를 사용할 수 있는 핀과 구멍의 반지름 차이, 재질, 그리고 접촉 하중에 대한 설계 방향을 제안하였다.

## Acknowledgements

본 연구는 미래창조과학부 원자력연구개발 사업의 지원으로 수행되었음(과제번호: 012M2A8A2025639).

## References

- [1] Hertz, H., "Über die Berührung fester elastische Körper", *J. Reine und angewandte Mathematik*, Vol. 92, pp. 156-171, 1882.
- [2] Mindlin, R. D., "Compliance of elastic bodies in contact", *J. Appl. Mech.*, Vol. 16, pp. 259-268, 1949.
- [3] Cattaneo, C., "Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi", *Rendiconti dell' Accademia nazionale dei Lincei*, Vol. 27, Ser. 6, pp. 342, 1938.
- [4] Hills, D. A., Nowell, D., *Mechanics of Fretting Fatigue*, Chap. 3, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994. (ISBN 0-7923-2866-3)
- [5] Johnson, K. L., *Contact Mechanics*, Chaps. 4, 7, Cambridge Univ. Press, UK, 1985. (ISBN 0-521-34796-3)
- [6] Persson, A., *On the Stress Distribution of Cylindrical Elastic Bodies in Contact*, PhD Dissertation, Chalmers Techniska Högskola, Göteborg, Sweden, 1964.