Journal for History of Mathematics
Vol. 28 No. 1 (Feb. 2015), 31–44
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2015.28.1.031

A History of the Cycloid Curve and Proofs of Its Properties

사이클로이드 곡선의 역사와 그 특성에 대한 증명

Shim Seong-A 심성아

The cycloid curve had been studied by many mathematicians in the period from the 16th century to the 18th century. The results of those studies played important roles in the birth and development of Analytic Geometry, Calculus, and Variational Calculus. In this period mathematicians frequently used the cycloid as an example to apply when they presented their new mathematical methods and ideas. This paper overviews the history of mathematics on the cycloid curve and presents proofs of its important properties.

Keywords: cycloid, quadrature, rectification, Isochrone Problem, involute, Tautochrone Problem, Brachistochrone Problem; 사이클로이드, 넓이 구하기, 길이 구하기, 등시주기운동 문제, 사이클로이드의 신개선(伸開線), 동시강하 곡선, 최소시간강하 곡선.

MSC: 01A99, 30C70, 35A15, 97I40, 97I50

1 서론

수학의 역사에 등장하는 가장 유명한 곡선 중 하나인 사이클로이드는 Figure 1에서와 같이 직선 위를 굴러가는 원 위의 한 점이 그리는 자취이다. 사이클로이드 곡선을 그리기 위해 직선 위를 굴리는 원을 사이클로이드의 생성원(生成圓, the generating circle)이라고 부른다. Figure 2에서와 같이 반지름이 r이고 원점에서 x축과 접하는 생성원이 x축 위를 굴러간다고 할 때, 원점에서 출발한 생성원 위의 점 $P(x, y)$의 자취인 사이클로이드 곡선의 식은 생성원의 회전각 θ를 매개변수로 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x &= \overline{OS} - \overline{PF} &= r\theta - r\sin\theta \\ y &= r - \overline{QF} &= r - r\cos\theta \end{aligned}$$

사이클로이드 곡선은 16세기에서 18세기까지의 시기에 여러 수학자들에 의하여 연구되었고, 이러한 연구들이 해석기하학과 미적분, 변분미적분의 탄생과 발전에 중요한 역할을 하였다. 이 시기에 수학자들이 새로운 수학적 방법을 발표할 때 흔히 사이클로이드에

Shim Seong-A: Dept. of Math., Sungshin women's Univ. E-mail: shims@sungshin.ac.kr
Received on Jan. 25, 2015, revised on Feb. 12, 2015, accepted on Feb. 22, 2015.

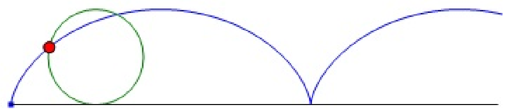


Figure 1. the cycloid curve; 사이클로이드 곡선

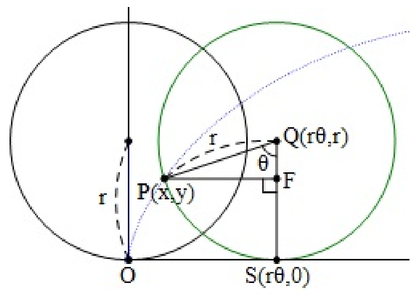


Figure 2. Parametric expressions of the cycloid curve; 사이클로이드 곡선의 매개변수 표현

적용하는 것을 예로 들었다. 사이클로이드는 '기하학의 헬렌(Helen of Geometry)' 라고 불리어졌는데, 이는 이 곡선 자체가 가지는 수학적 아름다움뿐만 아니라, 이 곡선에 대한 연구 과정에서 야기된 수학자들 사이의 갈등에서 유래된 별칭이다. 사이클로이드 곡선에 대하여 제기되었던 주요한 문제들과 그 밝혀진 결과를 정리하면 다음과 같다.

사이클로이드 곡선 아래 영역의 넓이 구하기(quadrature) 직선 l 위를 굴러가는 생성원에 의하여 그려지는 사이클로이드 곡선의 한 주기에 해당하는 아치와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는 그 생성원의 넓이의 3배이다.

사이클로이드 곡선의 길이 구하기(rectification) 사이클로이드 곡선의 한 아치의 길이는 그 생성원의 반지름의 8배이다.

등시주기운동 문제(Isochrone Problem) 진자의 운동 주기가 일정하려면 추의 이동 궤적이 사이클로이드를 이루어야 한다.

사이클로이드의 신개선(伸開線, the involute) 평면 위의 사이클로이드 곡선에 접하는 직선을 곡선을 따라서 회전시킬 때, 직선 위의 한 정점(定點)이 그 평면 위에 그리는 곡선은 다시 사이클로이드를 이룬다.

동시강하 곡선(Tautochrone Problem) 지면과 수직인 평면에서 뒤집어놓은 사이클로이드 곡선의 어느 위치에서 시작해서 구슬을 굴려도 최저점에 도달하는 시간이 같다.

최소시간강하 곡선(Brachistochrone Problem) 지면과 수직인 평면의 한 점에서 다른 한 점을 연결하는 어떤 경로를 따라 구슬이 굴러 내려올 때, 사이클로이드를 따라 내려오는 시간이 다른 어떤 곡선을 따라 내려오는 시간보다 짧다.

이 논문에서는 사이클로이드 곡선에 관련된 수학적 역사를 개관하며, 역사적으로 중요하게 연구되었던 성질들에 대한 증명을 제시한다.

2 사이클로이드 곡선의 역사

기원전 3000년 무렵 바퀴가 발명된 이후 사이클로이드 모양의 곡선도 일찌기 발견되었을 수도 있으나, '움직이는 원 위의 한 점에 의하여 생성되는 곡선' 이 문헌에 최초로 언급된 것은 1501년 부벨(Charles de Bouvelles, 1475–1566)이 원의 넓이를 구하는 과정에서 그러한 곡선을 이용하였다는 것이다 [10]. '사이클로이드(cycloid)' 라는 이름을 명명한 것은 1599년 갈릴레오(Galileo Galilei, 1564–1642)에 의해서였다 [16]. 그는 사이클로이드의 한 아치 아랫부분의 넓이를 구하는 수학적 방법을 찾으려고 하였으나 성공하지 못했다. 그리고 실제로 금속판으로 생성원과 사이클로이드 모양을 만들어 무게를 비교하여 사이클로이드 아치의 넓이가 생성원의 넓이의 3배라는 결과를 얻었으나, 자신이 증명할 수 없었던 것으로 미루어보아 정확한 값은 3이 아닌 어떤 무리수일 것이라고 믿었다. 이후 1634년에 프랑스의 수학자 로버벌(Gilles Persone de Roberval, 1602–1675)이 카발리에리(Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598–1647)의 불가분량의 방법(the method of indivisibles)을 이용하여 사이클로이드 아치의 넓이를 다음과 같이 구하였다 [14].

로버벌의 증명. Figure 3에서와 같이 사이클로이드 위의 각 점 P에서 직선 AB와 평행하게 그은 직선이 생성원의 내부에 포함되는 길이만큼의 선분을 그린다. 이러한 선분들이 이루는 영역의 넓이는 카발리에리의 불가분량의 방법에 의하여 생성원의 넓이와 같다. 그리고 이 선분들의 중점의 자취곡선은 대칭성에 의하여 사각형 $ABCD$의 넓이를 이등분한다. 따라서 사이클로이드 곡선의 아랫부분 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\left(\pi r^2 + 2r \times \pi r\right)$이다. 따라서 사이클로이드 곡선의 한 아치 아랫부분의 넓이는 $3\pi r^2$이다.

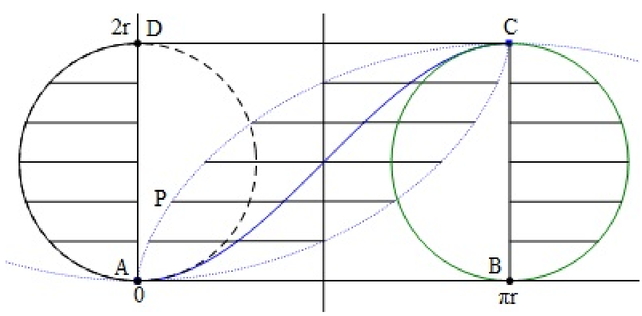


Figure 3. Roberval's method to calculate the area of the region under the cycloid curve; 사이클로이드 곡선 아랫부분의 넓이를 구하는 로버벌의 방법

사이클로이드 곡선의 접선을 그리는 문제에 대해서는 로버벌을 비롯하여 페르마(Pierre de Fermat, 1601–1665), 데카르트(René Descartes, 1596–1650)등이 각각 서로 다른 해

법을 발표하였다 [10]. 또 갈릴레오와 교신했고, 카발리에리의 제자이기도 했던 토리첼리(Evangelista Torricelli, 1608–1647)도 사이클로이드의 넓이와 접선에 관한 자신의 발견을 1644년에 발표하였다. 1658년 영국의 건축가이자 천문학자였던 렌(Christopher Wren, 1632–1723)은 사이클로이드의 한 아치의 길이가 생성원의 지름의 4배임을 밝혔다. 이후에 발명된 미적분을 이용하면 사이클로이드 곡선 넓이와 길이를 구하는 문제나 접선을 그리는 문제 등은 아주 간단하게 풀 수 있지만, 최초의 증명들은 무한급수만을 이용하여 기하학적 방법으로 접근하였으며 뛰어난 통찰력과 고심 끝에 얻어진 것들이었다.

사이클로이드 곡선의 성질에 대한 이러한 발견들에 이어서 흥미롭고 중요한 연구결과들이 계속 나타났다. 1673년 네덜란드의 물리학자 호이겐스(Christian Huygens, 1629–1695)는 '진자시계(Horologium Oscillatorium)' 라는 저서에서 진자의 궤적이 원의 호가 아니라 사이클로이드 곡선이 되어야 진자의 주기가 정확히 일정하게 된다는 것을 증명하고(정리 3.1), 이러한 성질을 이용해 진자시계를 만들었다 [15]. 그 이전 1583년 갈릴레이가 피사의 성당 천장에 매달린 진자의 주기가 일정하다는 것을 발견했다는 일화가 유명한데, 실제로는 한 점에 매달려 원의 호를 따라 진동하는 단진자는 진폭이 아주 작을 경우에만 거의 일정한 주기를 갖는다. 이때도 주기가 정확히 일정한 것은 아니었지만 정밀한 시계가 없었던 갈릴레오 시대에는 측정으로 이를 알아내기는 어려웠을 것이다. 호이겐스는 사이클로이드 곡선의 신개선(involute)이 다시 사이클로이드임을 증명하고(정리 3.2) 이 원리를 바탕으로 두 개의 사이클로이드 벽면 사이에서 진자가 움직이도록 하여 진자의 궤적이 사이클로이드 곡선을 따르는 진자시계를 제작하였다. 이렇게 고안된 진자시계의 추는 이론상 진폭에 상관없이 같은 주기로 움직인다. 이는 사이클로이드가 동시강하곡선이기 때문이다(the Tautochrone problem, 정리 3.3). 시계의 추가 사이클로이드 곡선 상의 어느 위치에서 출발하여도 중력에 의하여 내려와서 최저점에 도달하는 데 걸리는 시간은 같아야 한다. 하지만 현실적으로는 추를 매단 줄과 사이클로이드 벽면 사이의 마찰때문에 일정한 주기가 유지되지 않았다 [4]. 이후 1675년에 호이겐스는 가느다란 나선형의 금속스프링이 감겼다 풀렸다 할 때 진동의 주기가 일정한 것을 응용한 시계를 고안하였다 [2]. 이 시기에 과학자들은 용수철에 매달린 물체와 진자의 운동에 관심을 갖고 연구하였고, 그 결과들은 근대적인 시계의 발명, 표준 도량형의 정립 등으로 이어지며 자연을 수량화하여 연구하는 기초가 되었다.

사이클로이드 곡선은 계속하여 그 당시 유럽의 최고 수학자들의 관심을 끌었고, 대단한 새로운 결과들이 밝혀졌다. 1696년 요한 베르누이(Johann Bernoulli, 1667–1748)는 유럽의 수학자들에게 한 도전 문제를 제시하였다 [7]. 그것은 지면에 수직인 한 평면에 놓인 두 점 사이를 연결하는 어떤 경로를 따라 공이 중력에 의하여 굴러내려 올 때 최단시간이 걸리도록 하는 경로의 곡선을 찾는 문제였다. 최단시간곡선(the brachistochrone)

이라고 불려졌던 이 곡선을 처음으로 찾은 사람은 요한 베르누이 또는 그의 형 쟈크 베르누이(Jacques Bernoulli, 1655–1705)로 알려져있다. 이 문제의 해법을 찾은 수학적 업적을 두고 두 형제 사이에 다툼이 있었다 [9]. 그리고 이 문제가 제안된 후 곧 라이프니츠(Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646–1716), 로피탈(Guillaume de l'Hospital, 1661–1704), 뉴튼(Isaac Newton, 1642–1726)도 각각 해법을 찾았다 [7].

요한 베르누이는 1697년 1월 자신의 해법을 발표할 때, 호이겐스의 등시주기곡선을 언급하면서 "내가 그 똑같은 사이클로이드가 바로 우리가 찾던 최소시간곡선이라고 밝히면 다들 깜짝 놀라실겁니다."라고 말했다. 그는 밀도가 다른 여러 겹의 매질을 통과하는 빛이 최단시간이 걸리는 경로를 따라 굴절하는 것과 물체가 중력에 의하여 가속되며 내려올 때 최단시간이 걸리는 경로를 찾는 것은 같은 원리의 문제라는 것을 파악하였다 [12]. Figure 4에서와 같이 i번째 매질을 통과하는 빛의 속도를 v_i, 굴절각을 θ_i $(i = 1, 2, \cdots)$라고 할 때, 모든 i에 대하여 다음과 같은 Snell의 법칙이 성립한다.

$$\frac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} = \frac{v_{i+1}}{v_i} \qquad \text{즉,} \qquad \frac{v_i}{\sin\theta_i} = \frac{v_{i+1}}{\sin\theta_{i+1}}$$

그리고 $\sin\theta_i = \dfrac{dx}{ds}$ 이다.

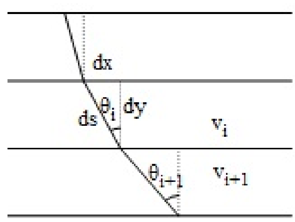


Figure 4. The refraction path of the light ray through multiple layers of media of different densities; 밀도가 다른 여러 겹의 매질을 통과하는 빛의 굴절경로

요한 베르누이는 여기에서 각 겹의 두께를 아주 작게 하고 v와 θ가 연속적으로 변한다고 생각하여 다음 식을 도출하였다.

$$\frac{v}{\sin\theta} = \frac{v}{dx/ds} = k \qquad (k\text{는 어떤 상수})$$

위 식으로부터 $v\,ds = k\,dx$이고, 이 식의 양변을 제곱한 후 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ 임을 적용하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$dx = \frac{v}{\sqrt{k^2 - v^2}}\,dy \tag{2.1}$$

정지상태에 있던 질량 m인 물체가 중력에 의하여 낙하할 때 내려온 거리 y와 물체의 속도 v 사이에는 위치에너지의 변화가 운동에너지의 변화로 전환되는 관계에 의하여 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \qquad (g\text{는 중력가속도 상수}) \tag{2.2}$$

이제 식 (2.1)의 상수 k가 $k = 2g$인 상황을 식 (2.2)에 적용하여 다음 식을 얻는다.

$$dx = \sqrt{\frac{y}{k-y}}\,dy \tag{2.3}$$

요한 베르누이는 이 식이 바로 사이클로이드 곡선을 나타내는 미분방정식임을 보였다. 그리고 다음과 같이 결론지었다.

"끝으로 나는 호이겐스의 등시주기곡선과 나의 최소시간곡선의 뜻밖의 일치에 대하여 경외감을 다시 한 번 말해야겠다. 특히 이러한 일치가 갈릴레오의 가설 하에서만 일어날 수 있고, 우리가 이 사실로부터 갈릴레오의 가설이 옳다는 증명을 얻은 것은 주목할만 하다. 자연은 항상 가장 단순한 방식으로 작동하며, 여기에서 한 곡선이 두 가지 다른 기능을 하도록 하였다. 그렇지않다면 우리는 두 가지의 다른 곡선이 필요했을 것이다."

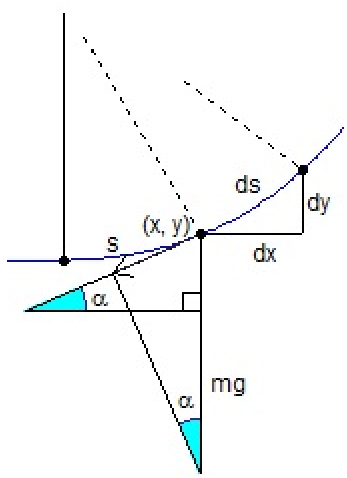
요한 베르누이의 해법은 최소시간곡선 문제를 해결하는 뛰어난 방법이었지만, 광학에 비유하는 것에 의존하여 일반화될 수가 없었다. 한편 쟈크 베르누이는 동생 요한이 제안한 최단시간곡선 문제에 대한 해법으로 이 문제에서 고려되는 '여러 가지 곡선' 을 변수로 생각하는 방법을 고안하였다(정리 3.4). 그의 이러한 생각은 이후 발전한 '변분 미적분(the calculus of variations)' 의 시초가 되었다 [6]. 요한 베르누이에 의하여 제기된 최소시간곡선 문제를 발단으로 시작되어 자크 베르누이가 초석을 놓은 변분법(變分法, the variational method)은 이후 비슷한 시기에 물리학에서도 모페르튀(Pierre Louis Maupertuis, 1698–1759)와 오일러(Leonhard Euler, 1707–1783), 라이프니츠 등에 의하여 독립적으로 고안되어 이용되었고 [3,5,8], 후에 '최소작용의 원리(the principle of least action)' 라고 불리게 되었다. 빛이 최소시간경로로 진행한다는 페르마의 법칙도 이 변분법적인 접근의 한 특별히 놀라운 응용이다 [13]. 양자역학의 성립에 핵심적으로 기여한 플랑크(Max Planck, 1858–1947)는 20세기에 변분법적인 접근을 가장 열정적으로 주창한 학자였다. 그는 '최소작용의 원리' 가 형식과 내용에서 이론적 연구의 이상적이고 최종적인 목적에 가장 근접한 것이라고 말하였으며, 모든 물리 법칙들 중에서 가장 포괄적인 것일 뿐만 아니라 신의 생각의 가장 순수한 표현을 나타낸다고 주장하였다 [17]. 반면에 이 원리를 시작했던 페르마는 "자연은 모호하고 숨겨진 길로 움직인다." 고 말하며, '최소작용의 원리' 는 빛의 행동을 묘사하는 순수하게 추상적인 수학적 정리라고 생각하였다 [11]. 뉴튼의 역학에서 똑같은 질량을 가지는 두 입자가 중력에 의하여 직선방향으로 서로 끌릴 때 두 물체 사이의 거리와 시간의 관계가 사이클로이드를 이룬다(정리 3.5). 이 사이클로이드 관계는 시간을 각 입자의 상대적 시간(proper time)으로 이해하여 일반상대성이론을 적용하여도 여전히 성립한다([1] Section 4.3 Free-Fall Equations). 이 사실로부터 중력이 물체를 한 위치에서 다른 위치로 이동시킬 때 가장 효율적인 방법으로 작용한다고 이해할 수 있다.

3 사이클로이드 곡선의 특성에 대한 증명

사이클로이드 곡선 아래 영역의 넓이를 구하는 문제(quadrature)와 사이클로이드 곡선의 길이를 구하는 문제(rectification)는 Roberval과 Wren에 의하여 처음 연구되었을 때는 무한급수를 바탕으로하는 기하학적인 방법이 이용된 고도의 문제였지만 이후 발전한 미적분학에서는 기초적인 연습문제로 다루어진다. 정리 3.1은 등시주기운동 문제(Isochrone Problem)에 대한 증명을 보인다. 정리 3.2는 사이클로이드의 신개선(伸開線, the involute)이 다시 사이클로이드 곡선임을 보인다. 정리 3.3은 사이클로이드가 동시강하곡선임을 보인다(Tautochrone Problem). 정리 3.4는 변분법을 이용하여 최소시간강하곡선 문제의 해가 사이클로이드임을 증명한다(Brachistochrone Problem). 정리 3.5는 똑같은 질량을 가지는 두 입자가 중력에 의하여 직선방향으로 서로 끌릴 때 두 물체 사이의 거리와 시간의 관계가 사이클로이드를 이룬다는 사실을 증명한다.

정리 3.1 진자의 운동 주기가 일정하려면 추의 이동 궤적이 사이클로이드를 이루어야 한다.

증명. 한 점에서 출발한 진자가 그 궤적을 따라 t초 동안 움직였을 때, 추의 이동거리를 $s(t)$, 추의 위치를 $(x(t), y(t))$, 추의 이동 궤적의 접선과 수평방향이 이루는 각을 $\alpha(t)$ 라고 하면



$$\frac{dy}{ds} = \sin\alpha, \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha$$

이고, 추의 궤적에 접하는 중력의 성분이 진자의 운동에너지로 전환되는 다음 관계식이 성립한다.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\alpha$$

이때 진자의 운동주기가 일정하려면 초기조건을 $s(0)=0$ 으로 두었을 때 주기함수 $s(t)=C\sin\omega t$ 를 해로 얻을 수 있는 미분방정식

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0$$

도 성립해야한다. 따라서 $s=-\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{g}{\omega^2}\sin\alpha,\ \frac{ds}{d\alpha}=\frac{g}{\omega^2}\cos\alpha$ 이므로

$$\frac{dx}{d\alpha}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\alpha}=\cos\alpha\cdot\frac{g}{\omega^2}\cos\alpha=\frac{g}{\omega^2}\cos^2\alpha=\frac{g}{2\omega^2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\frac{dy}{d\alpha}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\alpha}=\sin\alpha\cdot\frac{g}{\omega^2}\cos\alpha=\frac{g}{2\omega^2}\sin 2\alpha$$

위의 식들을 α에 대하여 적분하고, $\alpha=0$ 일 때 $(x,y)=(0,0)$ 이라고 두면,

$$x=\frac{g}{4\omega^2}(2\alpha+\sin 2\alpha), \qquad y=\frac{g}{4\omega^2}(1-\cos 2\alpha)$$

이므로 추의 이동 궤적은 사이클로이드를 이룬다.

정리 3.2 윗면을 이루는 사이클로이드가 매개변수 β에 대하여 다음 식으로 주어졌다고 하자.

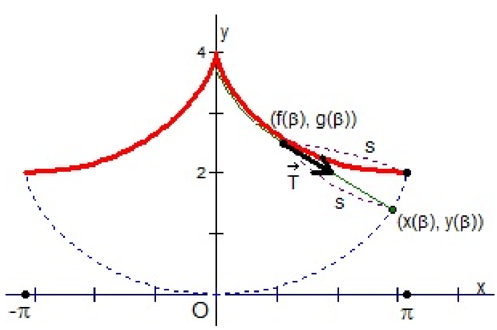
$$\vec{r}=(f(\beta),g(\beta))=(\beta-\sin\beta,\,3+\cos\beta)$$

로 주어졌다고 하자. 이때, 점 $(0,4)$에 매달린 길이가 4인 진자의 추의 궤적 $(x(\beta),y(\beta))$는

$$x(\beta)=\beta+\sin\beta, \qquad y(t)=1-\cos\beta$$

와 같이 주어져 사이클로이드를 이룬다.

증명. 아래 그림에서 벡터들의 관계로부터 같이 진자의 추의 위치를 구할 수 있다.



$$\begin{aligned}(x(\beta),y(\beta)) &=\vec{r}_i=\vec{r}+s\vec{T}\\ &=(f(\beta),g(\beta))+\frac{s\,(f'(\beta),g'(\beta))}{\sqrt{(f'(\beta))^2+(g'(\beta))^2}}\\ &=(\beta-\sin\beta,\,3+\cos\beta)+\frac{s\,(1-\cos\beta,\,\sin\beta)}{\sqrt{(1-\cos\beta)^2+(\sin\beta)^2}}\end{aligned}$$

$$= (\beta - \sin\beta,\ 3 + \cos\beta) + \frac{s\,(1-\cos\beta,\ \sin\beta)}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\beta}}$$

$$\begin{aligned}
s =& \int_\beta^\pi \sqrt{(f'(\beta))^2 + (g'(\beta))^2}\, d\beta = \int_\beta^\pi \sqrt{(1-\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2}\, d\beta \\
=& \sqrt{2}\int_\beta^\pi \sqrt{1-\cos\beta}\, d\beta = \sqrt{2}\int_\beta^\pi \sqrt{2\sin^2\frac{\beta}{2}}\, d\beta = 2\int_\beta^\pi \sin\frac{\beta}{2}\, d\beta = 4\cos\frac{\beta}{2} \\
x(\beta) =& \beta - \sin\beta + \frac{s}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\beta} = \beta - \sin\beta + \frac{4}{\sqrt{2}}\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{1-\cos\beta} \\
=& \beta - \sin\beta + 4\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \beta - \sin\beta + 2\sin\beta = \beta + \sin\beta \\
y(\beta) =& 3 + \cos\beta - \frac{s}{\sqrt{2}}\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\cos\beta}} = 3 + \cos\beta - \frac{4}{\sqrt{2}}\cos\frac{\beta}{2}\frac{\sin\beta\sqrt{1+\cos\beta}}{\sin\beta} \\
=& 3 + \cos\beta - 4\cos^2\frac{\beta}{2} = 1 - \cos\beta
\end{aligned}$$

정리 3.3 y축의 양의 방향이 아래로 향하도록 지면과 수직으로 세워놓은 좌표평면에서 $(x,y) = r(\theta - \sin\theta,\ 1-\cos\theta)$, $(0 \le \theta \le \pi)$로 주어진 사이클로이드 곡선을 따라 구슬을 가만히 놓아 굴러내려가도록 하자. 점 $O(0,0)$에서 구슬을 놓아 최저점 $A(\pi r, 2r) = r(\pi - \sin\pi,\ 1-\cos\pi)$에 도달할 때까지의 시간 T와 점 O와 A 사이의 임의의 점 $P(x_0,y_0) = r(\theta_0 - \sin\theta_0,\ 1-\cos\theta_0)$에서 구슬을 놓아 최저점 A에 도달할 때까지의 시간 T_0에 대하여 $T = T_0$이다.

증명. $O(0,0)$에서 구슬을 잡고 있다가 가만히 놓으면(초기속도 = 0) 곡선을 따라 내려가면서 에너지보존법칙에 의하여 운동에너지와 중력에 의한 위치에너지의 변화량이 같다. 즉, $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$. 이로부터 $v = \sqrt{2gy}$이고, $v = \frac{ds}{dt}$이므로 $dt = \frac{1}{\sqrt{2gy}}\,ds$이다. 여기에서 s는 곡선의 길이를 나타내는 변수이고, $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 또는 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta$로 나타낼 수 있다. 따라서 $O(0,0)$에서 구슬을 놓아 최저점 $A(\pi r, 2r) = r(\pi - \sin\pi,\ 1-\cos\pi)$에 도달할 때까지의 시간 T에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
T =& \int dt = \int \frac{1}{\sqrt{2gy}}\,ds = \int_0^\pi \frac{\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}}{\sqrt{2gy}}\,d\theta \\
=& \int_0^\pi \frac{\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}}\,d\theta = \int_0^\pi \frac{\sqrt{r^2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta) + r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}}\,d\theta \\
=& \int_0^\pi \frac{\sqrt{2r^2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}}\,d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\frac{r}{g}}\,d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\pi
\end{aligned}$$

임의의 점 $P(x_0,y_0)$에서 구슬을 놓으면 곡선을 따라 내려갈 때의 에너지보존법칙 $\frac{1}{2}mv^2 = mg(y-y_0)$으로 부터 $v = \sqrt{2g(y-y_0)}$이고, $v = \frac{ds}{dt}$이므로 $dt = \dfrac{1}{\sqrt{2g(y-y_0)}}\,ds$이다. 따라서 $P(x_0,y_0) = r(\theta_0 - \sin\theta_0,\ 1-\cos\theta_0)$에서 구슬을 놓아 최저점 A에 도달할 때까

지의 시간 T_0 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} T_0 &= \int dt = \int \frac{1}{\sqrt{2g(y-y_0)}}\, ds = \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}}{\sqrt{2g(y-y_0)}}\, d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{2gr(1-\cos\theta-1+\cos\theta_0)}}\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{2r^2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0-\cos\theta)}}\, d\theta \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{(2\cos^2\frac{\theta_0}{2}-1)-(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)}}\, d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta_0}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\, d\theta \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{1}{|\cos\frac{\theta_0}{2}|} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta_0}{2}}}}\, d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{1}^{0} \frac{-2}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[\sin^{-1} u\right]_0^1 = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\pi \end{aligned}$$

그러므로 $T = T_0$ 이고, 어느 높이에서 구슬을 놓더라도 사이클로이드를 따라 최저점까지 내려오는 시간은 같다.

변분법(variational method)을 이용하여 함수 $y = y(x)$와 그 도함수 y'에 대한 다음과 같은 적분형태로 표현된 범함수(functional) $T(y)$의 값이 극대 또는 극소가 되는 해 $y_*(x)$를 찾아보자.

$$T(y) = \int_a^b H(y, y')\, dx$$

이를 위하여 곡선 $y = y_*(x)$ 근방의 임의의 매끈한 곡선들을

$$y = y_*(x) + \epsilon\eta(x)$$

로 나타낸다. 여기에서 함수 $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}$ 은 $\eta(a) = \eta(b) = 0$ 인 임의의 매끈한 함수를 나타낸다. 범함수 $T(y)$ 가 $y = y_*(x)$ 일 때 극값을 갖는다고 하였으므로

$$\left.\frac{d}{d\epsilon} T(y_* + \epsilon\eta)\right|_{\epsilon=0} = 0$$

이어야 한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{d\epsilon} T(y_* + \epsilon\eta)\right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_a^b \left[\frac{dH}{dy}(y_* + \epsilon\eta, y_*' + \epsilon\eta')\,\eta + \frac{dH}{dy'}(y_* + \epsilon\eta, y_*' + \epsilon\eta')\,\eta'\right]_{\epsilon=0} dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{dH}{dy}(y_*, y_*')\,\eta + \frac{dH}{dy'}(y_*, y_*')\,\eta'\right) dx \\ &= \int_a^b \frac{dH}{dy}(y_*, y_*')\,\eta\, dx + \left[\frac{dH}{dy}(y_*, y_*')\,\eta\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{dH}{dy'}(y_*, y_*')\,\eta\, dx \\ &= \int_a^b \frac{dH}{dy}(y_*, y_*')\,\eta\, dx + 0 - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{dH}{dy'}(y_*, y_*')\,\eta\, dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{dH}{dy}(y_*, y_*') - \frac{d}{dx}\frac{dH}{dy'}(y_*, y_*')\right) \eta\, dx \end{aligned}$$

위 식에서 η는 $\eta(a) = \eta(b) = 0$인 임의의 매끈한 함수를 나타내므로 함수 y_*는 다음과 같은 미분방정식을 만족한다.

$$\text{Euler-Lagrange equation} : \quad \frac{dH}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dH}{dy'} = 0$$

그리고 위 식의 양변에 y'을 곱한 식을 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$y'\frac{dH}{dy} - y'\frac{d}{dx}\frac{dH}{dy'} = 0, \quad \frac{dH}{dx} = \frac{dH}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dH}{dy'}\frac{dy'}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left(y'\frac{dH}{dy'}\right) = \frac{dy'}{dx}\frac{dH}{dy'} + y'\frac{d}{dx}\frac{dH}{dy'}$$

이 식들을 정리하면 $\dfrac{dH}{dx} - \dfrac{d}{dx}\left(y'\dfrac{dH}{dy'}\right) = 0$이므로 다음과 같은 미분방정식을 얻는다.

$$\text{Beltrami equation} : \quad H - y'\frac{dH}{dy'} = C \qquad (C\text{는 상수})$$

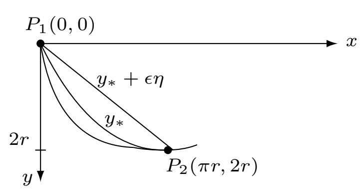
따라서 Euler-Lagrange equation이나 Beltrami equation으로 주어진 미분방정식의 해를 구하면 범함수 $T(y) = \int_a^b H(y, y')\,dx$를 극대화 또는 극소화하는 곡선 $y = y(x)$를 찾을 수 있다.

광학에서 “빛은 이동 시간를 최소화하는 경로로 진행한다”는 페르마의 법칙과 균일한 매질에서는 빛의 속도가 일정하다는 사실을 바탕으로 변분법을 이용하여 빛이 최단거리인 직선 경로로 이동한다는 사실을 보일 수 있고, 또 이로부터 빛의 반사 법칙(Law of Reflection)과 굴절 법칙(Law of Refraction, Snell’s Law)을 증명할 수 있다. 다음 정리는 변분법을 이용하여 최단시간강하곡선이 사이클로이드임을 증명한다.

정리 3.4 지면과 수직인 평면의 한 점에서 다른 한 점을 연결하는 어떤 경로를 따라 구슬이 굴러 내려올 때, 시간을 최소화하는 경로는 사이클로이드이다. (단, 구슬의 운동에 대하여 마찰력은 무시하고 중력만을 고려한다.)

증명. 두 점 $P_1(0,0)$과 $P_2(\pi r, 2r)$에 대하여 구슬이 어떤 곡선을 따라 P_1에서 P_2까지 굴러 내려올 때 걸리는 시간범함수 $T(y)$는 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} T(y) &= \int dt = \int \frac{1}{\sqrt{2gy}}\,ds \\ &= \int_0^{\pi r} \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx = \int_0^{\pi r} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \end{aligned}$$



$T(y)$를 최소화하는 곡선 $y = y_*(x)$를 구하기 위하여 다음 Beltrami equation의 해를 구한다.

$$C = H - y'\frac{dH}{dy'} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} - y'\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{(y')^2\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}\,(1+(y')^2)}$$

$$=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}\,(1+(y')^2)} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\,\sqrt{1+(y')^2}}$$

즉 미분방정식 $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1+\dfrac{1}{2C^2gy}}$ 의 해가 T를 최소화하는 함수 $y_*(x)$이다.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-1+\frac{1}{2C^2gy}}} = \pm\int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{k^2-y}} = \pm(x+C_1) \quad \text{여기에서} \quad k^2 = \frac{1}{2C^2g}$$

이제 $y = k^2\sin^2\frac{\theta}{2}$ $(0\le\theta\le\pi)$로 치환하면 $dy = k^2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\,d\theta$ 이므로,

$$\int \frac{\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{k^2-y}} = \int \frac{k\sin\frac{\theta}{2}\,k^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{k^2-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \int \frac{k\sin\frac{\theta}{2}k^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{k\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=k^2\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = k^2\int\frac{1-\cos\theta}{2}\,d\theta = \frac{k^2}{2}(\theta-\sin\theta)$$

이다. 따라서 $\frac{k^2}{2}(\theta-\sin\theta) = \pm(x+C_1)$이고, $x(0)=0$이므로 $x = \frac{k^2}{2}(\theta-\sin\theta)$이다. 그리고 $y = k^2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{k^2}{2}(1-\cos\theta)$이므로 $(x(\theta), y(\theta))$는 사이클로이드를 이룬다.

똑같은 질량 m을 가지는 두 입자가 중력에 의하여 직선방향으로 서로 끌릴 때 뉴튼의 만유인력의 법칙과 운동법칙으로부터 두 입자 사이의 거리 r과 시간 t의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r'' = \frac{2Gm}{r^2} \tag{3.1}$$

여기에서 $r'' = \frac{d^2r}{dt^2}$이고, G는 만유인력상수를 나타낸다. 일반상대성이론에서도 구면대칭인 중력장에서 입자의 상대적 시간에 대하여 같은 형태의 관계가 성립한다. 다음 정리는 식 (3.1)을 만족하는 r이 유계이면 r과 t의 관계가 사이클로이드를 이룬다는 것을 보여준다.

정리 3.5 $t=0$인 초기에 $r'(0) < \sqrt{\frac{4Gm}{r(0)}}$이면 식 (3.1)을 만족하는 r이 유계이고, 이때 r과 t를 매개변수 θ를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{t}{\sqrt{r(0)^3/(4Gm)}} = \frac{1}{2}(\theta+\sin\theta), \qquad \frac{r}{r(0)} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \tag{3.2}$$

$t=0$인 초기에 $r'(0) \ge \sqrt{\frac{4Gm}{r(0)}}$이면 식 (3.1)을 만족하는 r에 대하여 $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = \infty$가 성립한다.

증명. 식 (3.1)의 양변에 변수 r에 대하여 $r(0)$에서 $r(t)$까지의 적분을 취하여 다음 식을 얻는다.

$$\int_{r(0)}^{r(t)} r''\,dr = 2Gm\int_{r(0)}^{r(t)}\frac{1}{r^2}\,dr \tag{3.3}$$

여기에서 치환적분법에 의하여

$$\int_{r(0)}^{r(t)} r''\,dr = \int_{r(0)}^{r(t)}\frac{d(r')}{dt}\,dr = \int_{r'(0)}^{r'(t)}\frac{dr}{dt}\,d(r') = \int_{r'(0)}^{r'(t)} r'\,d(r')$$

이므로 식 (3.3)의 양변의 적분을 모두 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\left(r'(t)^2 - r'(0)^2\right) = 2Gm\left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r(0)}\right)$$

따라서

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{4Gm\left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r(0)}\right) + r'(0)^2},$$

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{r(0)}{4Gm}}\sqrt{\frac{r(t)}{r(0)}}}{\sqrt{1 - \frac{r(t)}{r(0)}\left(1 - \frac{r'(0)^2 r(0)}{4Gm}\right)}}\, dr \tag{3.4}$$

이다. 여기에서 $t = 0$ 인 초기에 $r'(0) < \sqrt{\frac{4Gm}{r(0)}}$ 인 경우에는 시간 t 가 증가할 때 r 의 크기는 유계이므로 $r' = 0$ 이 되는 시점이 있다. 이 시점을 초기 시간으로 다시 정하여 $r'(0) = 0$ 으로 두고, $\frac{r(t)}{r(0)} = s(t)$ 로 나타내면 식 (3.4)를 간단히

$$dt = \sqrt{\frac{r(0)^3}{4Gm}}\sqrt{\frac{s}{1-s}}\, ds$$

으로 쓸 수있다. 이 식의 양변을 적분하면

$$t = \sqrt{\frac{r(0)^3}{4Gm}}\left(\sqrt{s - s^2} + \sin^{-1}\sqrt{1-s}\right)$$

이다. 여기에서 매개변수 θ 를 이용하여 $s = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ 로 나타내면

$$\frac{t}{\sqrt{r(0)^3/(4Gm)}} = \frac{1}{2}(\theta + \sin\theta), \qquad \frac{r(t)}{r(0)} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

이므로 시간 t 에 대하여 r 의 그래프는 사이클로이드 곡선임을 알 수 있다.

$t = 0$ 인 초기에 $r'(0) > \sqrt{\frac{4Gm}{r(0)}}$ 인 경우에는 $k = \frac{r'(0)^2 r(0)}{4Gm} - 1 > 0$, $\frac{r(t)}{r(0)} = s(t)$ 로 두고 식 (3.4)의 양변을 적분하면

$$t = \frac{\sqrt{r(0)^3/(4Gm)}}{k\sqrt{k}}\left[\sqrt{(ks)^2 + ks} - \ln\left(\sqrt{ks} + \sqrt{1+ks}\right)\right] + C, \quad (C\text{는 적분상수})$$

이므로 $\lim_{t\to\infty} k\, s(t) = \infty$ 이다. 그리고 $r(t) = r(0)s(t)$ 이므로 $\lim_{t\to\infty} r(t) = \infty$ 가 성립한다.

$t = 0$ 인 초기에 $r'(0) = \sqrt{\frac{4Gm}{r(0)}}$ 인 경우에는 식 (3.4)의 양변을 적분하면

$$t = \frac{1}{3\sqrt{Gm}}\left(r\sqrt{r} + C\right) \qquad (C\text{는 적분상수})$$

이므로 $\lim_{t\to\infty} r(t) = \infty$ 가 성립한다.

References

1. Kevin Brown, *Reflections on Relativity*, lulu.com, September 22, 2014.
2. Hans van den Ende, *Huygens's Legacy, The Golden Age of the Pendulum Clock*, Fromanteel Ldt., 2004.
3. Leonhard Euler, *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes*, Bousquet, Lausanne & Geneva, 1744.
4. M. Gardner, *The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*, Chicago, IL: University of Chicago Press, 1984.

5. C. I. Gerhardt, *Uber die vier Briefe von Leibniz, die Samuel Konig in dem Appel au public, Leide MDCCLIII, veroffentlicht hat*, Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften, I, 1898.
6. N. P. Johnson, The brachistochrone problem, *The College Mathematics Journal* 35 (2004), 192–197.
7. V. J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction, 2nd ed.*, Addison Wesley, 1998.
8. P. L. M. de Maupertuis, *Accord de differentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles*, Mem. As. Sc. Paris, 1744.
9. J. P. Phillips, Brachistochrone, Tautochrone, Cycloid-Apple of Discord, *Math. Teacher* 60 (1967), 506–508.
10. P. Sanders, Charles de Bovelles's Treatise on the Regular Polyhedra (Paris, 1511), *Annals of Science* 41 (1984), 513–566.
11. David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics*, Dover books, 1984.
12. D. J. Struik, ed., *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*, Harvard Univ. Press, 1969.
13. S. Wagon, *Mathematica in Action*, New York: W. H. Freeman, 1991.
14. Evelyn Walker, *A Study of Roberval's Traite des Indivisibles*, Columbia University, 1932.
15. D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, London: Penguin, 1991.
16. E. A. Whitman, Some historical notes on the cycloid, *The American Mathematical Monthly* 50(5) (1943), 309–315.
17. Wolfgang Yourgrau, Stanley Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, Courier Corporation, 1979.