

## 토크 하중의 변동이 회전원판의 안정성에 미치는 영향

신응수<sup>a</sup>

## Influence of Torque Fluctuation on the Stability of a Rotating Disk

Eung-Soo Shin<sup>a</sup><sup>a</sup> School of Mechanical Engineering, Chungbuk National University,  
1 Chungdae-ro Seowon-gu, Cheongju, Chungbuk, 362-763, Korea

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received	28	December	2014
Revised	10	February	2015
Accepted	10	February	2015

## Keywords:

Rotating disk  
Torque fluctuation  
Rotating internal damping  
Parametric excitation  
Whirling stability  
Floquet multiplier

## ABSTRACT

This study investigates the whirling stability of a rotating shaft-disk system under parametric excitation using periodically varying torque. The equations of motion were derived using a lumped-mass model, and the Floquet method was employed to find the effects of torque fluctuation, internal and external damping, and rotational speed on whirling stability. Results indicated that the effect of torque fluctuation was considerable on the instability around resonance, but minimal on supercritical instability. Stability diagrams were sensitive to the parametric excitation frequency; critical torque decreased upon increasing excitation frequency, with faster response convergence or divergence. In addition, internal and external damping had a considerable effect on unstable regions, and reduced the effects of the parametric excitation frequency on critical torque and speed. Results obtained from the Floquet approach were in good agreement with those obtained by numerical integration, except for some cases with Floquet multipliers very close to unity.

## 1. 서론

펌프, 가스터빈, 연삭기 등 각종 회전기기의 동력전달장치는 계를 구성하는 회전원판과 구동축의 동특성과 동력전달 과정에서 작용하는 외부하중에 의해 동적 거동이 결정된다<sup>[1]</sup>. 예를 들어 미세 분말을 제조하는 미분쇄기(pulverizer)는 분말과정에서 회전원판에 작용하는 하중이 회전계의 횡방향 진동에 영향을 미친다. 특히 축방향 토크가 계의 선회안정성에 미치는 영향 및 임계하중에 관해서는 오래전부터 많은 연구가 수행되어 왔다<sup>[2]</sup>.

Kim과 Ryu는<sup>[3]</sup> 전달행렬법을 적용하여 축하중 및 접선하중이 작용하는 회전원판계의 선회안정성과 임계하중을 구동축의 베어링

지지조건에 따라 구했다. 또한 Rao 등은<sup>[4]</sup> 유한요소법을 적용하여 축방향 토크가 회전계의 횡방향 진동에 미치는 영향을 분석하였으며 비틀림 진동과의 상관 관계를 도출하였다. 그리고 Lee와 Yun은<sup>[5]</sup> Galerkin방법을 적용하여 축방향 토크와 힘이 복합적으로 작용할 때 하중 크기와 방향에 따른 회전계의 안정성을 분석하였다.

한편 회전속도에 비례하여 주기적으로 변하는 축방향 하중이 작용하는 경우에는 하중 변동에 의한 매개변수가진이 발생하게 되는 데 이에 대해서도 많은 연구들이 발표되었다. Unger와 Brull은<sup>[6]</sup> 토크하중의 변동으로부터 발생하는 회전계의 불안정 현상은 매개변수가진의 주기  $T$ 에 따라 세가지 형태로 나타난다는 것을 이론적으로 확인하였으며, Sinha는<sup>[7]</sup> 축방향 토크와 힘이 주기 함수로 주

\* Corresponding author. Tel.: +82-43-261-3159

Fax: +82-43-263-2448

E-mail address: [esshin@cbnu.ac.kr](mailto:esshin@cbnu.ac.kr) (Shin, Eung-Soo).

어진 계에 대해서 Galerkin 방법을 적용하여 가진특성 및 시스템 감쇠가 주공진 대역에서 발생하는 불안정 현상에 미치는 영향을 분석하였다. 또한 Pei와 Chatwin은<sup>[8]</sup> 토크하중과 회전속도의 변동이 동시에 존재할 때 회전원판의 횡방향 진동 거동을 분석하였으며 회전속도와 하중 크기에 따라 계의 안정성이 민감하게 바뀌는 것을 확인하였다. 그리고 Sheu와 Chen은<sup>[9]</sup> 집중질량법을 적용하여 회전원판에 작용하는 힘이 주기적으로 변하는 계에 대한 운동방정식을 유도하고 Bolotin의 조화근형법에 근거한 안정선도를 도출하였으며 Chen은<sup>[10]</sup> Floquet 방법과 Bolotin 방법을 적용한 매개변수 가진계의 안정성 해석의 결과를 비교 분석하여 자이로스코프 현상으로 인하여 두 방법의 차이가 발생함을 보여주었다.

본 연구에서는 토크 하중이 주기적으로 변하는 회전계의 횡방향 진동의 동특성을 분석하고자 한다. 매개변수가진에 관한 선행 연구들은 위에서 언급한 바와 같이 많이 있지만 시스템 감쇠의 영향을 고려하여 수행한 연구는 아직 없다. 모든 회전계에는 내부 및 외부 감쇠가 존재하고 또한 계의 안정성에 미치는 영향이 매우 크기 때문에 하중 변동에 의한 매개변수가진계 경우에도 감쇠를 고려한 안정성 분석이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 집중질량법을 적용하여 회전계의 운동방정식을 유도하고 Floquet 방법에 근거한 안정성 해석을 통하여 매개변수가진에 의한 임계하중을 계의 감쇠 및 회전속도의 변화에 따라 구하고자 한다.

## 2. 매개변수가진계의 안정성 해석

### 2.1 축방향 토크가 작용하는 회전계의 운동방정식

Fig. 1에 나타난 바와 같이 본 연구의 시스템은  $\Omega$ 의 속도로 회전하는 구동축, 그 끝단에 부착되어 같이 회전하는 원판, 그리고 구동축을 지지하는 베어링으로 구성되며 원판에는 축방향의 접선 토크  $T$ 가 작용한다. 집중질량법을 적용하여 원판의 횡방향 변위  $x$ ,  $y$ 와 회전  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ 에 대한 운동방정식을 유도하면 다음과 같다<sup>[2]</sup>.

$$\overline{M}\{\ddot{q}\} + (\overline{C} - i\Omega\overline{G})\{\dot{q}\} + (\overline{K} - i\Omega\overline{C}_R - iT\overline{K}_T)\{q\} = \{0\} \quad (1)$$

식 (1)에서  $\{q\}$ 는 원판의 복소변위,  $\overline{M}$ 은 질량 행렬,  $\overline{C}$ 는 감쇠

행렬,  $\overline{G}$ 는 자이로 행렬,  $\overline{K}$ 는 강성 행렬,  $\overline{C}_R$ 은 회전 내부감쇠 행렬, 그리고  $\overline{K}_T$ 는 토크 행렬로서 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \{q\} &= \begin{Bmatrix} x + iy \\ \phi_y - i\phi_x \end{Bmatrix}; \\ \overline{M} &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_T \end{bmatrix}; \quad \overline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_P \end{bmatrix}; \\ \overline{K} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}^{-1}; \\ \overline{C} &= 2(\zeta_N + \zeta_R) \begin{bmatrix} mk_{11} & \sqrt{mJ_T}k_{12} \\ \sqrt{mJ_T}k_{12} & J_Tk_{22} \end{bmatrix}^{1/2}; \\ \overline{C}_R &= \frac{\zeta_R}{\zeta_N + \zeta_R} \overline{C}; \\ \overline{K}_T &= \begin{bmatrix} 0 & \gamma_\theta/L \\ -\gamma_\delta/L & \gamma_\theta/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $m$ 은 원판의 질량,  $J_T$ ,  $J_P$ 는 원판의 횡방향 및 축방향 질량 관성모멘트이고  $\zeta_N$ ,  $\zeta_R$ 은 계의 외부 및 내부감쇠비이다. 또한  $\overline{K}$ 는 베어링 지지조건을 고려한 영향 계수  $b_{ij}$ 로부터 유도할 수 있으며  $b_{ij}$ 는 아래와 같다<sup>[11]</sup>.

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{k_C} \left\{ (1 - \gamma_d)^2 + \frac{1}{\gamma_{BS}} \left( 1 - \frac{2}{\gamma_d} + \frac{2}{\gamma_d^2} \right) \right\}; \\ b_{12} &= \frac{1}{k_C L} \left\{ (1.5 - 2\gamma_d + 2\gamma_d^2) + \frac{2 - \gamma_d}{\gamma_{BS} \gamma_d^2} \right\}; \\ b_{22} &= \frac{1}{k_C L^2} \left\{ (3 - 2\gamma_d) + \frac{2}{\gamma_{BS} \gamma_d^2} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서  $L$ 은 축의 길이이고  $k_C$ ,  $\gamma_d$  및  $\gamma_{BS}$ 는 베어링의 지지 간격을  $d$ , 지지 강성을  $k_B$ 라 할 때 다음과 같이 주어진다.

$$k_C = \frac{3EI}{L^3}; \quad \gamma_d = \frac{d}{L}; \quad \gamma_{BS} = \frac{k_B}{k_C}; \quad (4)$$

위에서  $E$  및  $I$ 는 각각 축의 탄성계수와 횡방향 단면관성모멘트이다. 한편 식 (2)의 토크행렬  $\overline{K}_T$ 에서  $\gamma_\delta$ 와  $\gamma_\theta$ 는 베어링 지지조건을 고려한 계수로서 다음과 같이 주어진다.

$$\gamma_\delta = k_C b_{11}; \quad \gamma_\theta = \frac{k_C L^2 b_{22}}{3} \quad (5)$$

또한 식 (1)에서 토크하중  $T$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$T = T_0 \{1 - \epsilon \cos(\omega_f t)\} \quad (6)$$

따라서 식 (1)로 주어지는 시스템은 식 (6)에 의해 계의 강성이 시간의 함수로 변하는 매개변수가진계이다.

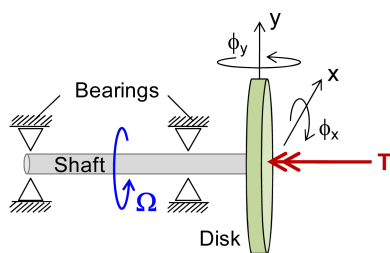


Fig. 1 Schematic of a disk-shaft system under torque loading

### 2.2 Floquet 방법에 의한 안정성 판별

가진주기가  $\Gamma$ 인 매개변수가진계의 안정 경계는  $\Gamma$  또는  $2\Gamma$ 의 주기를 갖는 함수의 조합으로 주어진다고 알려져 있으며 이에 근거하여 Bolotin방법 또는 Floquet방법을 적용하면 안정성 여부를 판별할 수 있다<sup>[10]</sup>. 본 연구의 매개변수가진계는 식 (1)에 보이는 바와 같이  $i\bar{G}$ ,  $i\bar{C}_R$ , 그리고  $i\bar{K}_T$ 와 같이 비대칭성을 갖는 행렬이 다수 운동방정식에 포함되어 있어 Bolotin방법을 적용하면 결과에 오차를 초래할 수 있다<sup>[10]</sup>. 따라서 여기서는 Floquet방법을 적용하여 안정성 해석을 수행하였다.

먼저 복소수 형태로 유도한 식 (1)의 운동방정식을 실수 형태의 상태방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\{\dot{Q}(t)\} = [A(\Gamma)]\{Q(t)\} \quad (7)$$

여기서  $\Gamma = 2\pi/\omega_F$ 이고  $\{Q(t)\}$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\{Q(t)\} = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}, \phi_x, \dot{\phi}_x, \phi_y, \dot{\phi}_y\}^t \quad (8)$$

Floquet 정리에 의하면 식 (8)을 만족하는 주기해는 다음 조건을 충족한다.

$$\{Q(n\tau)\} = [D]^n\{Q(0)\} \quad (9)$$

식 (9)는  $n$ 주기가 경과한 후 계의 응답이 초기조건과 행렬  $[D]$ 에 의해 결정된다는 것을 보여준다. Floquet 상수라 정의되는  $[D]$ 의 고유치  $\lambda_i$ 의 절댓값이 1보다 큰 경우 계의 응답은 초기 상태로부터 시간에 따라 점점 증폭하게 되며 이는 곧 계가 불안정하다는 것을 의미한다. 따라서  $|\lambda_i|=1$ 인 조건을 구하면 계의 안정 경계를 알 수 있으며 그 중에서  $\lambda_i=1$ 인 경우는  $\Gamma$ 의 1배수 주기함수의 안정 경계이고  $\lambda_i=-1$ 인 경우는 2배수 주기함수의 안정경계이다.

### 3. 매개변수가진에 의한 불안정 특성 분석

#### 3.1 분석 개요

매개변수가진계의 선형 안정성은 다양한 시스템 파라미터의 영향을 받는다. 본 연구에서는 정격토크  $T_O$ , 토크 변동  $\epsilon$ , 외부감쇠비  $\zeta_N$ , 내부감쇠비  $\zeta_R$ , 회전속도  $\Omega$  및 매개변수가진 주파수  $\omega_F$ 를 변화시키면서 계의 안정성에 미치는 영향을 고찰하였으며 비교 분석을 위하여 아래와 같이 무차원 변수를 정의하였다.

$$\Omega_N \equiv \frac{\Omega}{\omega_{n1}}; \omega_{FN} \equiv \frac{\omega_F}{\omega_{n1}}; T_N \equiv \frac{T_O L}{EI \zeta_N} \quad (10)$$

식 (10)에서  $\Omega_N$ 과  $\omega_{FN}$ 은 계의 1차 고유진동수  $\omega_{n1}$ 에 대해 무차

원화된 회전속도 및 가진주파수이고  $T_N$ 은 외부감쇠에 대해 무차원화된 정격토크이다.

Table 1은 주요 변수를 제외한 시스템 상수를 정리한 것이다.

#### 3.2 토크변동이 없는 경우의 불안정 특성

$\epsilon=0$ 인 경우 식 (1)로부터 아래와 같이 특성방정식을 유도할 수 있으며 그 실수해가 0보다 작으면 대수감소의 형태로 줄어드는 안정계이고 0보다 크면 불안정계가 된다.

$$|s^2 \bar{M} + s(\bar{C} - i\Omega \bar{G}) + (\bar{K} - i\Omega \bar{C}_R - iT_O \bar{K}_T)| = 0 \quad (11)$$

Fig. 2는 토크 하중  $T_N$ 과 회전속도  $\Omega_N$ 을 변화시키면서 불안정 영역을 구한 결과로서 불안정 영역은 크게 영역 I과 영역 II로 구분된다. 영역 I은 회전속도가 공진 대역에 있고 임계값 이상의  $T_N$ 이 작용할 때 발생하는 불안정 영역으로서  $T_N$ 이 증가하면 불안정해지는  $\Omega_N$ 의 범위도 증가한다. 반면 영역 II는  $\Omega_N$ 이 초임계 범위에 도달했을 때 회전내부감쇠에 의해 발생하는 불안정 영역으로 알려져 있는데 Fig. 2에 보이는 바와 같이 토크 하중이 미치는 영향은 거의 없다.

Fig. 3은 시스템 응답의 대수감소를 나타낸 것으로 전방휘돌림

Table 1 System constants

Constants (symbol)		Value
Disk	Mass ( $m$ )	9.28 kg
	Lateral inertia ( $J_T$ )	0.25 kg·m <sup>2</sup>
	Axial inertia ( $J_p$ )	0.50 kg·m <sup>2</sup>
Shaft	Length ( $L$ )	0.24 m
	Young's modulus ( $E$ )	200 GPa
	Area moment of inertia ( $I$ )	1.06x10 <sup>-7</sup> m <sup>4</sup>
Bearing	Stiffness ( $k_B$ )	1.53x10 <sup>7</sup> N/m
	Support interval ( $d$ )	0.18 m
System's 1 <sup>st</sup> natural frequency ( $\omega_{n1}$ )		555.1 r/s

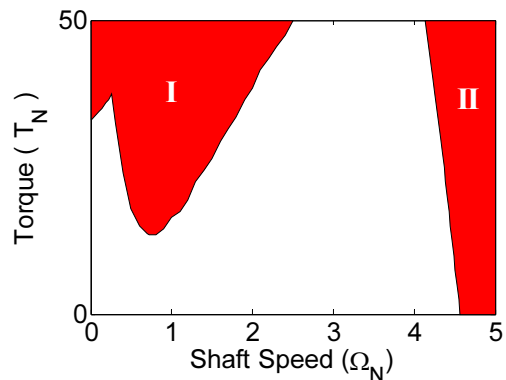


Fig. 2 Stability diagram: torque vs. shaft speed ( $\zeta_N = \zeta_R = 10^{-5}$ )

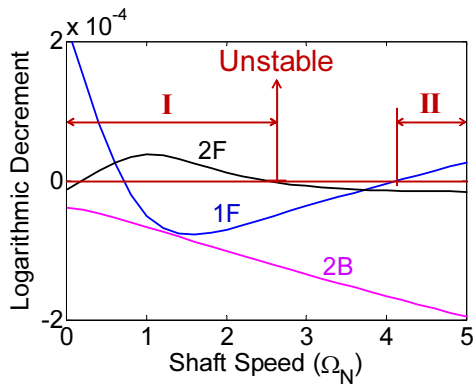


Fig. 3 Logarithmic decrement ( $T_N=50$ ,  $\zeta_N=\zeta_R=10^{-5}$ )

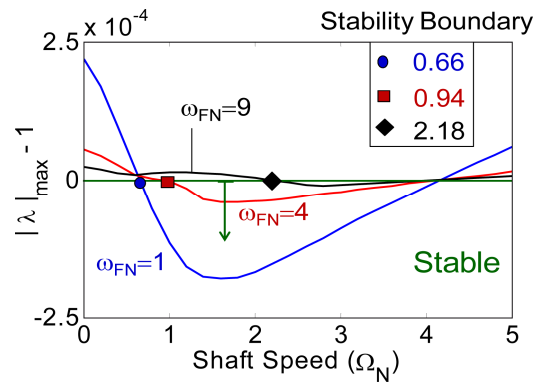


Fig. 5 Floquet multipliers ( $T_N=50$ ,  $\zeta_N=\zeta_R=10^{-5}$ )

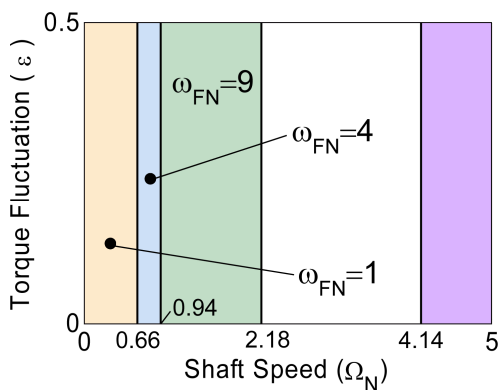
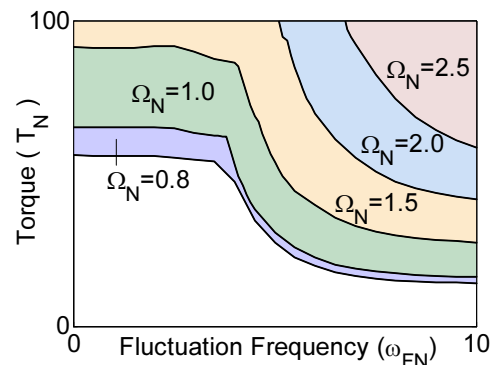


Fig. 4 Stability diagram: torque fluctuation vs. shaft speed ( $T_N=50$ ,  $\zeta_N=\zeta_R=10^{-5}$ )

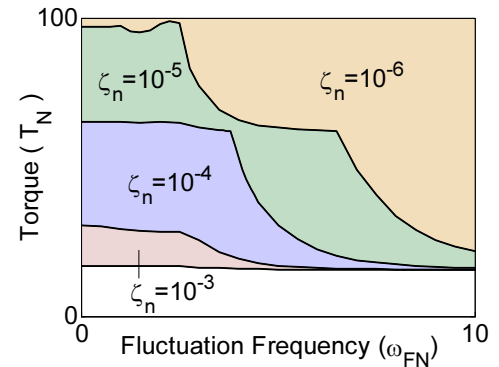
모드에 의해 불안정이 발생함을 보여준다.  $\Omega_N$ 의 변화에 따른 대수감소를 보면 영역 I의 초반에는 1F 모드가 불안정을 발생시키지만  $\Omega_N$ 이 증가하면서 2F 모드가 불안정을 발생시키며  $\Omega_N$ 이 더 증가하여 영역 II에 도달하면 다시 1F 모드가 불안정을 초래한다.

### 3.3 토크 변동이 있는 경우의 불안정 특성

Fig. 4는 토크 변동성분의 크기  $\epsilon$ 과 가진주파수  $\omega_{FN}$ 의 변화에 따른 불안정 영역을 회전속도  $\Omega_N$ 에 대해서 도시한 것이다. 그 결과를 보면 불안정 영역은  $\Omega_N$ 이 저속 또는 고속인 경우에 발생하는데 저속인 경우는  $\omega_{FN}$ 이 증가할수록 불안정 영역이 확장되지만 고속의 경우는  $\omega_{FN}$ 에 상관없이 일정하다.  $\omega_{FN}$ 이 변함에 따라 불안정 영역이 바뀌는 것은 Fig. 5의 Floquet상수  $\lambda$ 로 설명할 수 있다.  $|\lambda|_{max}$ 가 1보다 크면 계가 불안정해지는데 Fig. 5에 보이는 바와 같이  $\omega_{FN}$ 에 따라 차이가 있으며 Fig. 3에서 구한  $\epsilon=0$ 일 때의 대수감소와 관련이 있다. 즉 Fig. 5에서  $\omega_{FN}=1$ 일 때  $\Omega_N$ 의 변화에 대한 Floquet상수는 Fig. 3에서  $\Omega_N$ 의 변화에 대한 1F 모드의 대수감소와 거의 유사하다. 반면 Fig. 5에서  $\omega_{FN}=9$ 일 때 Floquet상수는 Fig. 3에서 1F 모드와 2F 모드의 대수감소 중에서 더 큰값을 갖는 대수감소와 유사하다. 결과적으로  $\omega_{FN}=1$ 일 때는 1F 모



(a)  $\zeta_N=\zeta_R=10^{-5}$



(b)  $\Omega_N=1$ ,  $\zeta_R=\zeta_N$

Fig. 6 Combined effects on stability

드에 의해 불안정 영역의 경계가 결정되고  $\omega_{FN}=9$ 일 때는 2F 모드에 의해 결정되기 때문에  $\omega_{FN}$ 에 따라 불안정 영역이 달라진다. 한편 Fig. 4에서  $\Omega_N$ 이 고속인 경우의 불안정 영역은  $\epsilon=0$ 일 때 불안정 영역II와 유사하게 토크의 영향은 거의 없다. 토크 변동이 있는 경우에 발생하는 불안정은 가진주파수  $\omega_{FN}$ 뿐 아니라 회전속도  $\Omega_N$ , 토크 하중  $T_N$ , 감쇠  $\zeta_N$  및  $\zeta_R$ 의 영향을 받는다.  $\omega_{FN}$ 과  $\Omega_N$ 이 계의 안정성에 미치는 복합적 영향을 분석한 Fig. 6(a)에 나타난 바와 같이  $\omega_{FN}$ 이 증가함에 따라  $\Omega_N$ 에 상관없이  $T_N$ 의 임계값은 감소하며 동시에  $\Omega_N$ 에 대해서도 불안정 영역이 매우 민감하

게 변하는데  $\Omega_N$ 이 증가할수록 불안정 영역은 줄어든다. 또한  $\omega_{FN}$ 과  $\zeta_N$  및  $\zeta_R$ 이 안정성에 미치는 영향을 분석한 Fig. 6(b)를 보면  $\zeta_N$  및  $\zeta_R$ 이 작을 경우  $\omega_{FN}$ 의 증가에 따라  $T_N$ 의 임계값이 매우 큰 폭으로 감소하지만  $\zeta_N$  및  $\zeta_R$ 이 커질수록  $\omega_{FN}$ 의 증가에 따른  $T_N$ 의 임계값의 변화는 줄어든다. 즉, 계의 감쇠가 커질수록 매개변수 가진주파수가 안정성에 미치는 영향은 줄어든다. 이는 Fig. 7의 결과에서도 확인할 수 있는데  $\zeta_N$  및  $\zeta_R$ 이  $10^{-5}$  수준인 Fig. 7(a), (b)의 경우 불안정 영역 I의 임계회전속도  $\Omega_N$ 은  $\omega_{FN}$ 에 따라 변하지만  $\zeta_N$  및  $\zeta_R$ 이  $10^{-3}$  수준인 Fig. 7(c), (d)의 경우  $\omega_{FN}$ 에 상관없이 영역 I의 임계회전속도  $\Omega_N$ 은 거의 일정하다.

한편 Fig. 7(a), (b)에서 영역 I의 불안정 경계가 매개변수 가진주기  $\Gamma=2\pi/\omega_{FN}$  또는  $2\Gamma$ 의 주기 함수와 어떤 관계인지를 분석하기 위하여 경계를 따라가면서 Floquet상수를 구하고 그 실수부  $\lambda_{real}$ 을 Fig. 8에 도시하였다. Fig. 8에서  $\lambda_{real}=1$ 이면 불안정 경계가  $1\Gamma$  주기함수로부터 파생됨을 의미하고  $\lambda_{real}=-1$ 이면  $2\Gamma$  주기함수로부터 파생됨을 의미한다. 본 연구의 회전계는 식 (1)로 주어지는 운동방정식이  $i\bar{G}$ ,  $i\bar{C}_R$ , 및  $i\bar{K}_T$ 을 포함하고 있기 때문에 불안정 경계가  $1\Gamma$  내지는  $2\Gamma$  주기함수의 어느 하나만으로 나타나는 것은 아니며 다만  $2\Gamma$  주기함수가 미치는 영향이 더 크다는 것을 확인할 수 있다.

### 3.4 수치적분에 의한 검증

Floquet방법에 근거한 선형 안정성 해석은 Floquet상수  $\lambda$ 가  $|\lambda| \approx 1$ 인 경우 수치적분을 통하여 결과를 검증할 필요가 있다 (12). Fig. 9에 나타난 바와 같이  $|\lambda|_{max}$ 는 토크 하중  $T_O$ 에 비해하

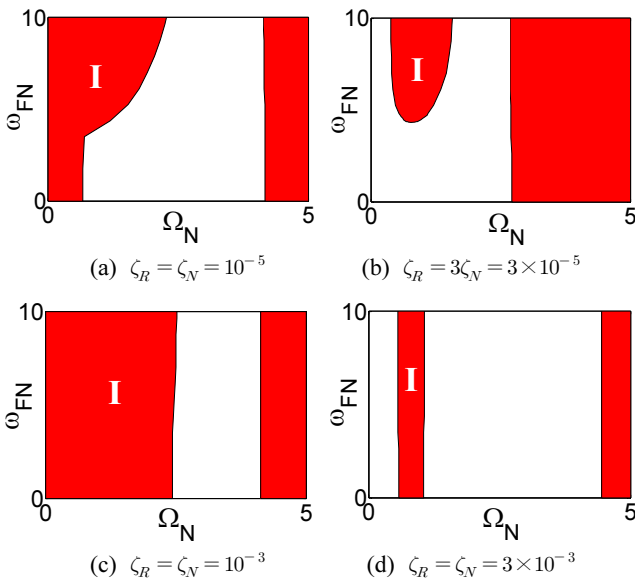


Fig. 7 Stability diagram with a variation of damping ( $T_N=50$ )

여 증가하는데  $\zeta_N=\zeta_R=10^{-5}$ 인 Fig. 5의 경우는  $|\lambda|_{max}$ 가 1과 비교하여  $10^{-4}$  정도의 차이밖에 나지 않는다. 여기서는 Fig. 7의 안정성 해석 결과를 수치 적분으로 얻은 응답과 비교 검증하고자 한다.

Fig. 10은 Floquet상수가 1로부터  $10^{-4}$  범위를 벗어나지 않는 Fig. 7(a)에서  $\Omega_N$ 이 1.7과 4.0,  $\omega_{FN}$ 이 1.0과 9.0의 값에 각각 해당할 때 횡방향 변위  $x$ 와 궤적의 시간응답을 정적변위에 대해 무차원화하여 나타낸 것으로 모두 안정한 준주기 함수 형태로 주어진다. Fig. 10(a), (c) 및 (d)는 Fig. 7(a)의 안정 영역에 해당되어 두 결과가 일치하지만 Fig. 10(b)는 Fig. 7(a)에서는 불안정 영역에 해당되어 일치하지 않으며 이 경우 Floquet의 해석에서 예측된 불안정 현상은 발생하지 않는다. 반면 Floquet상수가 1로부터  $10^{-2}$  범위 내에 있는 Fig. 7(c) 및 (d)에서  $\Omega_N$ 과  $\omega_{FN}$ 을 변화시키면서 시간응답을 구한 것이 Fig. 11과 Fig. 12인데 Floquet의 안정 해석 결과와 잘 일치한다.

또한 Fig. 11에 나타난 바와 같이 응답의 안정 여부와 상관없이  $\omega_{FN}$ 이 증가할수록 빠르게 수렴 또는 발산한다. 즉  $\omega_{FN}=9$ 인 Fig. 11(a)의 불안정 응답이 발산하는 정도와 Fig. 11(b)의 안정 응답이 수렴하는 정도는  $\omega_{FN}=1$ 인 Fig. 11(c), (d)의 발산이나 수렴 정도에 비해 더 빠르다.

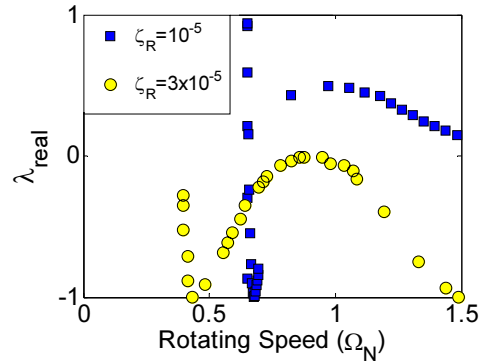


Fig. 8 Real parts of Floquet multipliers around transition ( $T_N=50$ ,  $\zeta_N=10^{-5}$ )

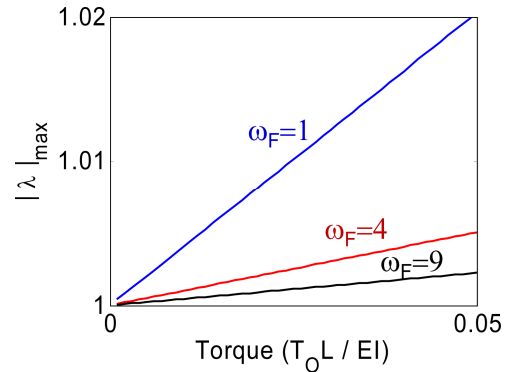


Fig. 9 Floquet multipliers vs. torque ( $T_N=50$ ,  $\zeta_N=\zeta_R$ )

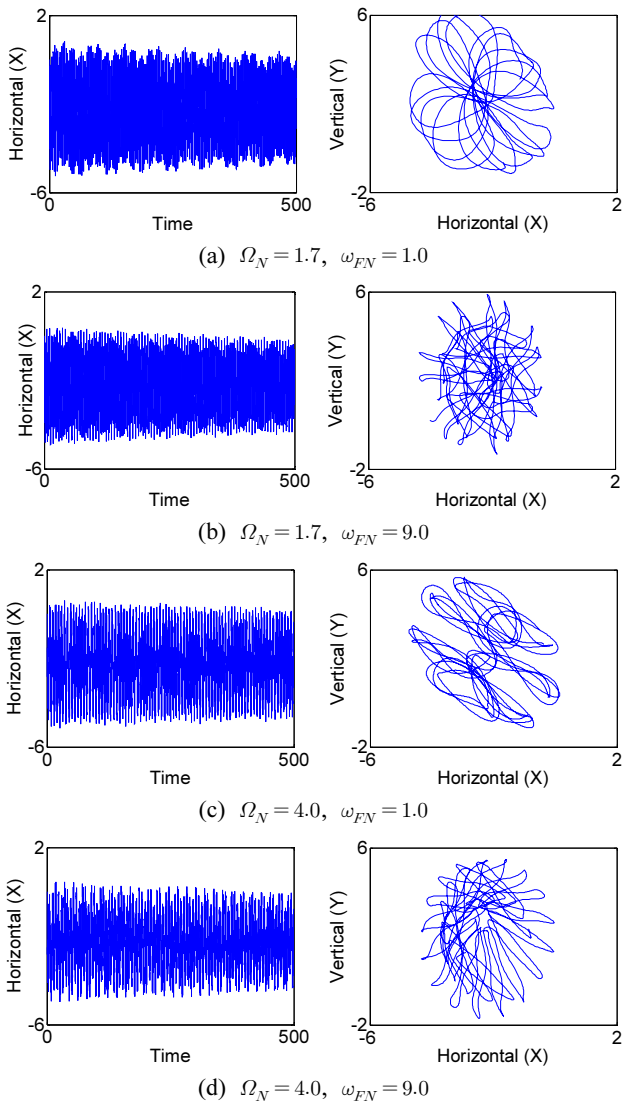


Fig. 10 Quasi-periodic responses around transition ( $T_N=50$ ,  $\zeta_N=\zeta_R=10^{-5}$ )

### 5. 결론

본 연구에서는 회전축과 원판으로 구성된 회전계에 주기적으로 변하는 토크 하중에 의한 매개변수가진 이 작용할 때 선화 안정성을 분석하였다. 집중질량법을 적용하여 원판에 대한 운동방정식을 유도하고 토크 변동 특성, 내부 및 외부 감쇠, 회전속도의 변화에 따른 불안정 영역을 Floquet방법에 근거하여 구하고 그 결과를 수치적분을 통하여 검증하였다.

토크 변동은 회전속도가 공진 대역 부근에서 발생하는 불안정 현상에는 큰 영향을 미치지만 초임계역에서 발생하는 불안정 현상에는 거의 영향이 없다. 또한 토크 변동에 의한 가진주파수에 따라 불안정 영역이 민감하게 변하는데 가진주파수가 높아질수록 임계 토크하중이 낮아지며 안정응답의 수렴 속도 및 불안정응답의 발산

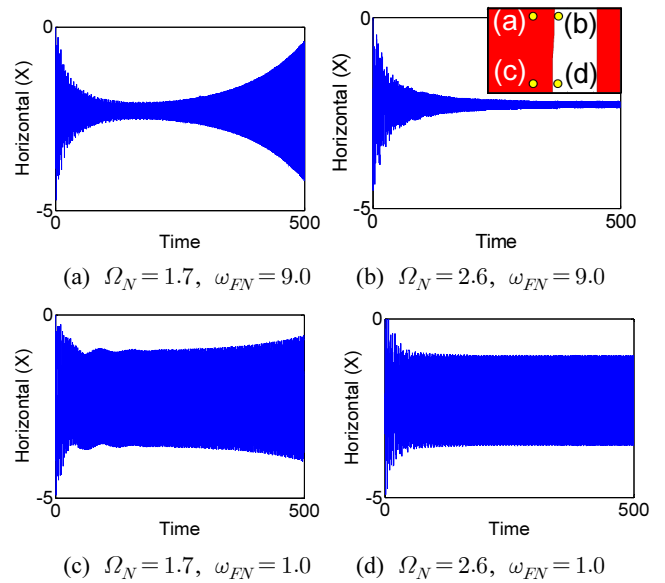


Fig. 11 Responses with a variation of  $\Omega_N$  and  $\omega_{FN}$  ( $T_N=50$ ,  $\zeta_N=\zeta_R=10^{-3}$ )

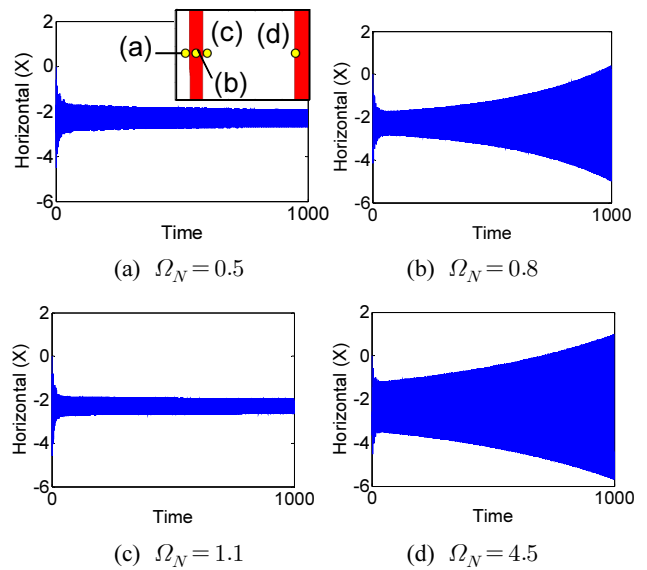


Fig. 12 Responses with a variation of  $\Omega_N$  ( $T_N=50$ ,  $\omega_{FN}=5.0$ ,  $\zeta_N=\zeta_R=3 \times 10^{-3}$ )

속도가 빨라진다.

내부 및 외부 감쇠가 계의 안정성에 미치는 영향은 매우 커서 감쇠의 변화에 따라 임계 토크하중이 민감하게 바뀔 뿐 아니라 감쇠가 커질수록 매개변수 가진주파수가 계의 안정성에 미치는 영향은 현저하게 줄어든다. Floquet방법에 근거한 안정성 해석의 결과는 수치적분에 의한 결과와 대체적으로 잘 일치하였으나 Floquet상수의 절대값이 1에 매우 근접한 경우의 불안정 응답은 준주기 함수 형태로 주어지는 안정 응답임이 수치적분으로부터 확인되었다.

## 후 기

본 논문은 2013년도 충북대학교 학술연구 지원사업의 연구비 지원에 의해 연구되었음.

## References

- [1] Yang, B. S., 2002, Vibrations of the rotating machinery, Inter-vision, Republic of Korea, 319-342.
- [2] Lee, K. N., Shin, E. S., Kim, O. K., 2005, Experimental Verification for Transverse Vibration Behavior of a Spinning Disk with Torque Variation, Trans. of Korean. Soc. Mach. Tool Eng., 14:4 89-95.
- [3] Kim, K. B., Ryu, B. J., 2011, Effects of Load Torque on The Stability of Overhung Rotors, J. of Mech. Sci. Tech. 25:3 589-595.
- [4] Rao, J. S., Shiau, T. N., Chang, J. R., 1998, Theoretical Analysis of Lateral Response due to Torsional Excitation of Gear Rotors, Mech. Mach. Theory, 33:6 761-783.
- [5] Lee, C. W., Yun, J. S., 1996, Dynamic Analysis of Flexible Robots Subjected to Torque and Force, J. of Sound and Vib., 192:2 439-452.
- [6] Unger, A., Brull, M. A. 1981, Parametric Instability of a Rotating Shaft Due to Pulsating Torque, ASME J. of Applied Mech., 48 948-958.
- [7] Sinha, S. K., 2005, Non-linear Dynamic Response of A Rotating Radial Timoshenko Beam with Periodic Pulse Loading at the Free-end, Int. J. of Non-linear Mech., 40:1 113-149.
- [8] Pei, Y. C., Chatwin, C., 2012, Elastic Connection Disk Subjected to Periodically Fluctuating Transmitted Torque and Rotational Speed, J. of Sound and Vib., 331:13 3048-3095.
- [9] Sheu, H. C., and Chen, L. W., 2000, A lumped mass model for parametric instability analysis of cantilver shaft-disk systems, J. of Sound and Vib., 234:2 331-348.
- [10] Chen, P. Y., 2009, Stability Boundaries of a Spinning Rotor with Parametrically Excited Gyroscopic System, European J. of Mech. A/Solids, 28:4 891-896.
- [11] Genta, G., 2005, Dynamics of Rotating Systems, Springer, New York, USA.
- [12] Nayfeh, A., 1996, Applied Nonlinear Dynamics, John Wiley & Sons, Germany.