

## 초등학교 영재학급에서 유추를 활용한 위도프 게임의 해법 탐구 지도 방법

배 신 영\* · 송 상 현\*\*

본 연구는 초등학교 5학년 영재학급 학생들이 유추적 사고를 활용하여 위도프 게임의 해법을 탐구하는 과정에서 보이는 사례 분석을 통하여 영재학급에서의 유용한 지도 방법을 고찰하는 데 목적이 있다. 이를 위해 I광역시에 거주하는 초등학교 영재학급 3개 반 36명의 학생들을 대상으로 수업 과정과 학습지를 분석하고 그들 중 소속 학급 내 성취 수준이 중상 이상인 6명의 학생들을 집중 관찰 및 면담하여 그들의 사고 과정을 상세히 분석하였다. 본 연구에서는 위도프 게임을 목표 문제로 삼고 이와 구조적 유사성을 지닌 퀴즈 무브 게임, 표면적 유사성을 지닌 2모둠 님 게임을 기저 문제로 하여 유사성의 유형이 해법 탐구에 미치는 영향을 확인하였다. 높은 수준의 사고를 하는 학생들은 두 문제 간의 표면적 유사성보다는 구조적 유사성에 더 주목함으로써 목표 문제의 해법을 발견해 낼 수 있음을 확인하였다. 또한 Sternberg가 제시한 유추의 7개 과정(부호화, 추론, 사상, 적용, 비교, 정당화, 반응) 중 핵심 요소인 4개 과정(부호화, 추론, 사상, 적용)을 중심으로 현장 적용 수업을 분석해 봄으로써 초등학교 영재학급에서 위도프 게임을 지도할 때 활용할 수 있는 유추의 주요 과정별 지도 방법을 제안하였다.

### 1. 서론

수학교육의 목표 중 하나는 수학적 문제해결 능력을 기르는 것이다. 수학적 문제해결능력은 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하는 능력, 학생의 경험과 요구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있는 능력, 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 이를 일반화하는 능력 등을 말한다. Polya는 수학 지도에서 정보뿐만 아니라 방법적 지식도 가르쳐야 한다고 주장하였는데,

여기서의 방법적 지식이란 문제를 풀고 증명하고 논증을 비판하며, 수학적 언어를 유창하게 구사하고, 구체적인 상황에서 수학적 개념을 인식하는 능력 등을 말하므로, 거의 문제해결력과 동일시 될 수 있다. 이와 같이 문제해결을 통해 지식의 단순 암기와 적용, 알고리즘의 반복 연습에서 탈피하고 수학을 하는 활동을 경험할 수 있게 되므로, 문제해결력의 신장은 오래 전부터 수학교육의 중요한 목표가 되어왔다(황혜정 외 5인, 2012, p. 192). 교사는 수학을 지도하면서 학생들이 주어진 문제를 잘 해결하기를 기대한다. 하지만 모든 학생들은 스스로 자신의 수학적 경험과 문제해결전략을 활용하여 문제를 해결하는

이 글은 배신영(2015)의 석사학위논문을 요약 및 수정한 것임.

\* 인천왕길초등학교, bsy1983@hanmail.net (제1 저자)

\*\* 경인교육대학교, song2343@hanmail.net (교신저자)

것이 아니기 때문에 교사는 효과적으로 지도함으로써 학생들의 문제해결능력을 신장시켜주어야 한다. 따라서 교사는 문제를 해결하는 학생의 입장에서 문제에 제시된 조건과 문제가 요구하는 것을 파악할 수 있도록 돕고 학생이 문제해결 경험을 기억하게 하여 문제를 해결할 수 있도록 도와야 한다.

송순정(2003, p. 1)은 낯설고 새로운 영역을 유사하고 친숙한 영역을 바탕으로 추론해서 이해하는 과정을 유추라고 하였으며, 유추적 사고는 수학적 사고의 하나로써 귀납적 추론과 함께 새로운 것의 발견에 중요한 역할을 하고 있다고 하였다. 우정호(2000, p. 343)는 유추는 상황 사이의 관계적 성질에 주목하는 것인바, 패턴이나 법칙을 다루는 수학 학습에 매우 필요한 강력한 사고 도구가 된다고 하였으며 구체물이나 그림을 이용하여 수학적 아이디어를 다양하게 표현하는 것은 그 학생들로 하여금 유추에 의하여 그 이면에 있는 추상적인 개념, 원리, 법칙을 파악하도록 하기 위한 것인바, 유추는 수학 학습·지도의 기본 바탕이 된다고 하였다. 그리고 수학은 구조를 연구하는 학문이라고 할 수 있으므로 유추는 수학적 사고에서 더없이 중요한 의미를 갖는다고 밝혔다.

본 연구는 초등학교 영재학급 학생이 유추를 활용하여 위도프 게임의 해법을 탐구하는 사고 과정을 분석함으로써 영재학급에서의 유용한 지도 방법을 고찰하는 것을 목적으로 한다. 위도프 게임의 해법 탐구의 원리가 기존에 잘 알려진 님 게임의 해법과 유사함에도 이 게임을 소재로 한 연구가 국내에서는 이루어진 사례가 없어 다음과 같은 연구 내용을 선정하였다.

첫째, 초등학교 영재학급 학생들이 유추를 활용하여 위도프 게임의 해법을 탐구하는 사고 과정을 분석한다.

둘째, 초등학교 영재학급 학생들이 유추를 활

용하여 위도프 게임의 해법을 찾는 데 도움을 줄 수 있는 유추의 주요 과정별 지도 방법을 고찰한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 유추

#### 가. 유추의 의미

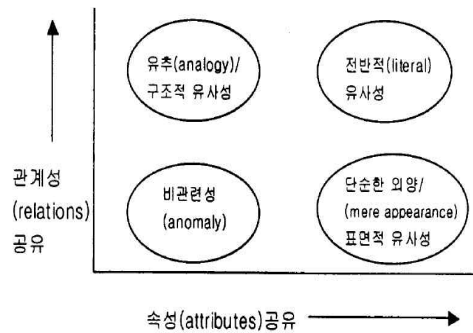
유비추론, 곧 유추(analogy)란 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 것이다. 어떤 종류의 대상이 다른 종류의 대상과 몇 가지 점에서 서로 유사하다는 사실이 확인될 때, 첫 번째 종류의 대상이 그 밖의 다른 특성을 갖고 있으면 두 번째 종류의 대상도 그 성질을 가지고 있을 것이라고 추리하는 것이 유추이다(우정호, 2000, p. 342). 양기열, 이의진(2011, p. 270)은 유추란 실세계에서 수학적 대상 및 관계들을 탐구하는 아주 오래된 강력한 인지 조작들 중 하나로써, 수학적 대상들 사이의 유사점들에 근거하여 새로운 결론을 유도하는 추론의 강력한 도구이며, 유추는 새로운 수학적 규칙성을 밝히는 과정에서 매우 중요한 역할을 한다고 밝혔다. 김미현, 이만영(2003, p. 368)은 새로운 문제를 해결하기 위해서 과거에 그와 유사한 문제를 해결할 때 사용했던 방법을 생각해내어 활용하는 것을 유추적 추론이라고 하였으며, 이러한 유추적 기법은 문제해결뿐만 아니라 새로운 현상을 이해하거나 다른 사람에게 새로운 개념을 알기 쉽게 설명하기 위한 도구로써 널리 사용된다고 하였다. 특히 유추는 기존의 지식을 조합하거나 재조직하여 새로운 개념을 만들어 내거나 새로운 이해를 가능하게 하기 때문에 창의성 발달에도 중

요한 사고 기제로 알려져 있다고 밝혔다. 물론 이경화(2009, p.357)는 단일한 의미로서의 유추보다 수학자들이 수학의 내용에 따라 어떻게 다양하게 사용하고 있는지를 논의하기도 한다.

여러 학자들마다 유추의 의미에 대한 정의가 약간의 차이는 있지만 공통적인 생각은 유추란 주어진 문제를 해결하기 위해 이와 유사한 다른 문제가 필요하며 유사한 다른 문제의 해결을 통해 주어진 문제에 접근할 수 있다는 것이다. 본 연구에서는 유추의 의미를 ‘목표 문제를 해결할 수 없을 때 그와 유사한 구조와 성질을 지닌 기저 문제의 해결 방법을 활용하여 목표 문제를 해결하는 과정’으로 제한하고자 한다.

#### 나. 유사성과 유추전이

유추에 관련된 유사성은 크게 구조적 유사성, 표면적 유사성, 맥락적 유사성으로 분류된다(Reeves & Weisberg, 1994; 송순정, 2003, p. 4에서 재인용). 구조적 유사성은 문제를 해결하는 원리가 유사한 것을 말한다. 표면적 유사성은 문제의 내용이 유사한 것을 말한다. 따라서 문제가 속해 있는 영역과 문제에 등장하는 사물이나 문장 기술에 사용된 낱말 등이 얼마나 유사한지에 대한 척도이다. 맥락적 유사성은 문제가 주어지는 상황이 얼마나 비슷한지를 나타내는 것이다. 유사성의 종류를 표면 유사성과 구조적 유사성으로 구분한 Gentner는 기저 문제와 새로운 문제가 공유하는 해법 원리나 주요 구성 요소 간의 인과적인 관계를 파악하는 경우를 구조적 유사성을 인식한 경우로 보고 있다(Gentner, 1983; 박현정, 이종희, 2006, p.117에서 재인용). 이후 Gentner와 Markman은 관계성과 대상 속성의 공유된 정도에 따라 유사성 유형을 [그림 II-1]과 같이 분류하였다(Gentner & Markman, 1997; 김민화, 2000, p. 13에서 재인용).



[그림 II-1] 관계성과 대상 속성의 공유 정도에 따른 유사성 유형

유추/구조적 유사성은 관계적 구조의 유사성은 높은 수준으로 공유하고 있으나 대상의 속성의 공유 정도는 적은 것으로 정의된다. 전반적 유사성은 관계성과 대상의 속성을 모두 높은 수준으로 공유하는 것을 말하며, 단순한 외양 유사성 혹은 표면적 유사성은 단지 대상의 속성과 하위 관계만을 공유함을 말한다. 마지막으로 비관련성은 공통된 대상의 속성이나 관계성을 공유하지 않는 경우에 해당된다(김민화, 2000, pp. 13-14).

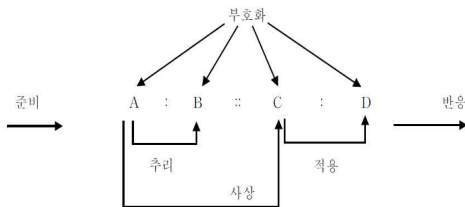
유사성과 유추전이에 관한 연구들에서 공통적인 결과는 표면적 유사성을 넘어서 구조적인 유사성을 고려하는 것이 성공적인 전이를 이끌 수 있다는 것이다. 10세 이하의 어린 아동은 유비추론을 할 때 표면적 유사성에 의존하는 반면, 그보다 나이든 아동에게서는 관계적 유사성과 체계화에 기반한 사상을 반영한 수행을 찾는 경향이 있다는 증거는 많다(English, 1997, p.176). 박미미, 이동환, 이경화, 고은성(2012)도 중학교 영재학생들을 대상으로 통계적 맥락이 포함된 기저 문제를 이용하여 유추에 의한 문제 제기가 이루어지기 위해서는 학생들이 기저 문제의 기본 구조를 파악하는 것뿐만 아니라 기저 문제의 통계적 맥락을 파악하는 것이 선행되어야 한다고 하였다.

## 2. Sternberg의 요소 이론

Sternberg는 유추 문제를 해결하는 데 <표 II-1>과 같이 부호화, 추론, 사상, 적용, 비교, 정당화, 반응의 7개 과정으로 나누어 정보처리적인 접근을 하였으며 이 중 부호화, 추론, 사상, 적용을 핵심 요소로 설명한다(송순정, 2003, p. 50; 이신자, 2009, p. 13). Sternberg가 제시한 과정을 도식화하면 [그림 II-2]로 나타낼 수 있다.

<표 II-1> Sternberg의 유추 문제를 해결하기 위한 7개 과정

과정	과정에 대한 설명
부호화 (encoding)	유추 문항의 각 항목을 지각하고 그 의미를 인식하는 과정
추론 (inferring)	유추 문항의 처음 두 항목 간의 관계를 추론하는 과정
사상 (mapping)	A : B = C : ?에서 추론된 관계를 적용하기에 앞서 주어진 첫째 항목(A)과 셋째 항목(C)간의 관계를 찾는 과정
적용 (application)	이상적인 답을 만들어 내기 위해서 추론과 사상 과정의 결과를 셋째 항목(C)에 적용하는 과정
비교 (comparison)	정답을 결정하기 위해서 피검사자가 내면적으로 만들어낸 이상적인 답과 해결 결과를 각각 비교하는 과정
정당화 (justification)	주어진 두 선택지 중 어느 것도 이상적인 답과 정확하게 일치하지 않을 때 이상적인 답과 맞는 결과를 골라 정당화 하는 과정
반응 (response)	외현적 행동을 통해 선택된 답에 반응하는 과정



[그림 II-2] Sternberg의 요소이론

본 연구에서는 Sternberg의 요소이론을 중심으로 'A : B = C : D'라는 문제 구조에서 유추를 활용하여 D를 찾기 위한 유용한 지도 방법을 탐구하기로 한다. A는 2모둠 님 게임 또는 퀴즈 무브 게임, B는 2모둠 님 게임의 해법 또는 퀴즈 무브 게임의 해법, C는 위도프 게임, D는 위도프 게임의 해법을 의미하며, D를 탐구하는 수업에서 Sternberg의 유추 과정의 7개 과정 중 핵심 요소인 4개 과정(부호화, 추론, 사상, 적용)을 집중 분석하고자 한다.

## III. 연구 방법 및 절차

### 1. 연구 과제

본 연구에서는 1960년 존스 홉킨스대학의 수학자 R. P. Issacs가 고안한 위도프 게임(Hirschfeld-Cotton, 2008)<sup>1)</sup>의 해법을 발견하기 위해 송상현, 정영욱, 임재훈, 신은주, 이향훈 (2007)이 사용한 2모둠 님 게임과 Gurvich(2010)가 위도프 게임의 해법을 위해 소개한 퀴즈 무브 게임을 각각 제시하는 순서를 달리하여 영재학급에 투입해 보고자 한다. 이를 바탕으로 위도프 게임의 해법을 발견하는 학생들의 사고 과정을 관찰하면서 학생들이 해법을 찾을 수 있도록 교사의 발문을 구조화하고 학생들의 사고 과정을 자극할 수 있는 지도 방법을 고찰하고자 한다.

위도프 게임은 서로 다른 두 모듬에 임의의 개수의 돌을 놓고 두 사람이 번갈아가며 한 모듬에서만 임의의 개수 또는 두 모듬에서 동수의 돌을 가져다가 마지막 돌을 가져가는 사람이 이기는 게임이다. 양쪽에서 동수의 돌을 가져갈 수도 있다는 것만 2모듬 님 게임과 다르다.

2모듬 님 게임은 서로 다른 모듬(방향)에 각각

1) 웹주소의 위도프 이름 철자는 y가 아닌 i임. <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/withoff.shtml>

임의 개수( $N, M$ )의 돌(큐브)을 놓고 시작하여 두 사람이 번갈아가며 한 모둠에서만 최소 1개 이상의 개수를 가져가다가 마지막 돌을 가져가는 사람이 이기는(또는 지는) 게임이다. 이 게임의 해법은 한 번에 가져갈 수 있는 최대 개수가 유한( $k$ ) 개일 때는 먼저 하는 사람이 각 모둠에 주어진 돌의 개수를  $k+1$ 로 나눈 나머지가 서로 같도록 상대방에게 넘겨주고 가져갈 수 있는 최대 개수가 무한 개일 때는 두 모둠의 개수가 같도록 넘겨주는 균형 이론의 원리에 따른다.

퀸즈 무브 게임은 체스판과 같은 격자 모양의 판에 하나의 말(Queen)을 임의의 위치에 놓고 정해진 표시(♡) 또는 (0, 0)으로 먼저 이동시키는 사람이 이기는 게임이다. 단, 말은 3가지(왼쪽, 아래쪽, 왼쪽아래 대각선) 방향으로만 1칸 이상 움직여야 한다. 이 게임의 해법은 필패가 되는 위치를 먼저 지우고 남은 위치로 말을 옮겨야 하는데, (0, 0)으로 옮기려면 (1, 2) 또는 (2, 1)의 위치에 말을 옮겨야 한다. 이를 위해 거꾸로 생각해보면 그 이전에는 (3, 5) 또는 (5, 3), (4, 7) 또는 (7, 4), ...의 위치, 즉 두 좌표값의 차이가 1, 2, 3, ...인 곳으로 옮겨야 한다.

<표 III-1> 위도프 게임과 퀸즈 무브 게임의 구조적 유사성

위도프(Wythoff) 게임	퀸즈 무브(Queen's move) 게임
한 모둠의 바둑돌을 가져가는 것	어느 한 방향(왼쪽)으로 이동하는 것
다른 모둠의 바둑돌을 가져가는 것	또 다른 방향(아래쪽)으로 이동하는 것
양쪽에서 같은 수로 바둑돌을 가져가는 것	왼쪽아래 대각선방향으로 이동하는 것
(0, 0) - 가져갈 바둑돌이 없음	♡(0, 0) - 이동할 곳이 없음
가져갈 바둑돌을 없게 하면 승리	♡(이동이 불가능한 곳)으로 말을 이동하면 승리
게임 판의 좌표(두 모둠의 개수)가 (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), ...로 먼저 만드는 사람이 승리	

위도프 게임과 2모둠 넘 게임은 문제에 제시된 낱말(표현) 및 돌을 가져가는 행동에 유사한 점이 많아 표면적 유사성을 갖지만 실제로 위도프 게임은 오히려 <표 III-1>과 같이 퀸즈 무브 게임과 구조적 유사성을 지닌다.

## 2. 연구의 대상자

본 연구의 대상자는 광역시에 소재하면서 학교 환경이 비슷하고 연구 과제에 대한 사전 경험을 확인하여 수준이 비슷한 3개 초등학교 단위학교 영재학급 5학년 학생 각 12명씩 총 36명이다. 일반학급 학생들과 영재학급에서도 성취도가 낮은 학생들은 위도프게임의 해법을 찾아내는 것을 어려워하여 각 그룹별로 수준이 비슷한 상 및 중상 수준의 학생을 2명씩 총 6명의 학생을 선정하였다. 그들이 수업 중에 보여주는 사고 과정을 집중적으로 관찰하고 학습지에 나타난 반응에 의문이 있는 경우에는 수업 후에 개인별로 인터뷰를 실시하였다. 이 6명의 학생들에 대한 소속 영재학급 내 학업 성취 수준과 개인별 특성은 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 연구대상자 중 집중 관찰/분석 및 인터뷰할 학생

그룹	학생ID	소속 영재학급 내 학업 성취 수준과 개인별 특성
A	A-YH 상	과제 집착력이 매우 높으며 대수영역에서 높은 성취도를 보이고 사고의 결과를 간단명료하게 정리할 줄 안다.
	A-HS 중상	수학에 관심이 많으며 수학문제를 해결할 때 차분하게 집중함.
B	B-SW 상	문제의 해결보다 그 안에 담긴 수학의 원리 탐구에 관심이 많으며 문제해결능력도 우수함.
	B-NE 중상	자신감이 다소 부족하나 수학 문제 해결능력이 우수함.
C	C-JH 상	수학에 대한 흥미와 자신감이 높으며 기하영역에서 높은 성취도를 보임.
	C-MB 중상	수학 문제에 대한 이해력이 높으나 난이도가 있는 문제를 풀 때 집중력이 다소 부족함.

### 3. 연구의 방법

문헌 연구를 통하여 유추와 유사성의 유형에 대한 자료를 수집하고 문제해결과 유추에 대한 선행연구를 분석하였으며 연구에 투입되는 연구 과제의 해법 및 지도 방법, 해법의 발견에 도움을 줄 수 있는 주요 발문을 연구하고 학생용 활동 학습지를 작성한 후 두 차례의 예비 검사를 통해 자료를 수정, 보완하고 본 검사를 실시하였다. 수업에서 유추 과정별로 활용한 주요 발문은 <표 III-3>과 같다.

본 연구에서 유추를 활용하여 위도프 게임의 해법을 탐구할 때, Sternberg의 유추 과정의 핵심 요소인 4개 과정(부호화, 추론, 사상, 적용)에 집중하여 수업이 이루어지도록 계획하였으며, 각 과정별 교사의 지도 사례와 그 과정에서 나타나는 학생들의 주요 반응을 관찰하고 이를 바탕으로 참여 연구자의 인터뷰 내용을 분석하기로 한다.

<표 III-3> 유추 과정별 주요 발문

유추 과정	주요 발문
부호화 과정 (Encoding)	<ul style="list-style-type: none"> <li>· (바둑돌을 가져가는 방법) 2모둠 님 게임에서 바둑돌을 가져가는 방법은 무엇인가요?</li> <li>· (남은 바둑돌을 표현하는 방법) 2모둠 님 게임에서 남아있는 바둑돌의 개수를 어떻게 표현하면 좋을까요?</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>· (목적지의 의미) 퀴즈 무브 게임에서 ♡는 어떤 의미인가요?</li> <li>· (숫자의 의미) 퀴즈 무브 게임 판에서 왼쪽과 아래쪽에 있는 숫자는 어떤 의미를 가지고 있나요?</li> <li>· (숫자 0의 의미) 퀴즈 무브 게임 판에서 숫자 0이 의미하는 것은 무엇일까요?</li> <li>· (현재 위치를 표현하는 방법) 퀴즈 무브 게임에서 현재 말이 있는 위치를 쉽게 알 수 있도록 어떻게 표현하면 좋을까요?</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>· (바둑돌을 가져가는 방법) 위도프 게임에서 바둑돌을 가져가는 방법은 무엇인가요?</li> <li>· (남은 바둑돌을 표현하는 방법) 위도프 게임에서 남아있는 바둑돌의 개수를 어떻게 표현하면 좋을까요?</li> </ul>
추론 과정 (Infering)	<ul style="list-style-type: none"> <li>· (승리할 수 있는 경우) 2모둠 님 게임에서 내 차례에 바둑돌이 어떻게 남아 있으면 이길 수 있나요?</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>· (패배할 수 있는 경우) 2모둠 님 게임에서 내 차례에 바둑돌을 어떻게 남기면 지게 되나요?</li> <li>· (승리할 수 있는 경우) 퀴즈 무브 게임에서 내 차례에 말이 어느 위치에 있으면 이길 수 있나요?</li> <li>· (패배할 수 있는 경우) 퀴즈 무브 게임에서 내 차례에 말을 이동시켜서는 안 되는 위치는 어디인가요?</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>· (두 게임의 유사성) 2모둠 님 게임과 위도프 게임은 어떤 점이 비슷하나요?</li> <li>· (바둑돌 가져가는 방법의 유사성) 2모둠 님 게임과 위도프 게임은 바둑돌을 가져가는 방법에서 같은 점은 무엇일까요?</li> <li>· (바둑돌 가져가는 방법의 차이점) 2모둠 님 게임과 위도프 게임은 바둑돌을 가져가는 방법에서 다른 점은 무엇일까요?</li> </ul>
사상 과정 (Mapping)	<ul style="list-style-type: none"> <li>· (두 게임의 유사성) 위도프 게임과 퀴즈 무브 게임은 어떤 점이 비슷하나요?</li> <li>· (게임 방법의 유사성 1) 위도프 게임에서 한 가지 색 바둑돌을 가져가는 것은 퀴즈 무브 게임에서 어떤 점과 비슷하나요?</li> <li>· (게임 방법의 유사성 2) 위도프 게임에서 두 가지 색 바둑돌을 가져가는 것은 퀴즈 무브 게임에서 어떤 점과 비슷하나요?</li> <li>· (현재 상황을 표현하는 방법) 위도프 게임에서 남은 바둑돌의 수는 퀴즈 무브 게임에서 말이 있는 위치와 어떤 점과 비슷하나요?</li> </ul>
적용 과정 (Application)	<ul style="list-style-type: none"> <li>· (2모둠 님 게임의 해법 적용) 2모둠 님 게임의 해법으로 위도프 게임을 하면 어떻게 되나요?</li> <li>· (퀴즈 무브 게임의 해법 적용) 퀴즈 무브 게임의 해법으로 위도프 게임을 하면 어떻게 되나요?</li> </ul>

## IV. 연구 결과 및 분석

### 1. 부호화 과정에서의 지도 사례

부호화는 각 게임들의 속성들을 탐구하면서 그것들을 간략한 부호로 표기해 보는 과정이다. 이 과정에서 각 게임에 대한 속성을 표기하는 방법이 다음 과정에서의 문제해결이나 다른 학생들과의 토론에도 자주 활용되는데 용어나 남은 바둑돌의 개수를 나타내는 방법이 모호할 때 토론과 해법 탐구에 많은 어려움을 겪으므로 반드시 정해진 부호화 과정이 필요함을 확인하였다.

#### 가. 2모둠 님 게임의 이해

2모둠 님 게임의 부호화 과정에서 지도해야 할 중요한 내용은 필승전략을 효율적으로 찾기 위해 남아있는 바둑돌의 개수 표기 방법을 약속하는 것이다. 바둑돌 색깔의 순서는 해법 탐구와 큰 관련은 없지만 남아있는 바둑돌의 개수를 흰색, 검정색 순서로 표현하기로 약속하여 간략한 순서쌍으로 표기하는 것은 해법 탐구에 영향을 미친다. 이는 이후에 이루어지는 유추의 사상 과정에서 목표 문제인 위도프 게임과의 관계를 쉽게 대응하는 데 도움을 줄 수 있다. 수업 중 주고받은 교사와 학생의 질문 및 반응을 살펴보면 다음과 같다.

T : 필승전략을 효율적으로 찾기 위해 남아있는 바둑돌의 수를 알아야 하는데, 남아있는 바둑돌의 개수를 어떻게 표현하면 좋을까요?  
 A-HS : 3개, 4개, 이렇게 흰색, 검정색 바둑돌의 수를 연속으로 표현해요.  
 T : 반드시 흰색, 검정색 순서로 표현해야 할까요?  
 A-HS : 색깔의 순서는 의미가 없는 것 같아요. 우리끼리 정하면 될 것 같아요.

#### 나. 퀴즈 무브 게임의 이해

퀴즈 무브 게임의 부호화 과정에서 지도해야 할 중요한 내용은 말이 움직일 수 있는 방향이 3가지(왼쪽, 아래쪽, 왼쪽아래 대각선)라는 것과 가로와 세로에 쓰인 숫자가 의미하는 바를 인식시키는 것이다. 그리고 목적지는 가로, 세로 모든 방향으로도 움직일 수 없는 위치이며 목적지의 위치가 가로와 세로가 모두 0이라는 점을 인식시키는 것이다. 또한 말의 위치를 쉽게 알 수 있도록 (가로, 세로)의 순서쌍으로 표기하도록 약속하는 것은 이후에 이루어지는 위도프 게임과의 관계를 쉽게 대응하는 데 도움을 줄 수 있다. 수업 중 주고받은 교사와 학생의 질문 및 반응을 살펴보면 다음과 같다.

T : 숫자는 어떤 의미를 가지고 있나요?  
 S1 : 목적지까지 남아있는 칸의 수인 것 같습니다.  
 <중략>  
 T : 그렇다면, 숫자 0이 의미하는 것은 무엇일까요?  
 A-YH : 가로에 0이면 가로로 움직일 칸이 없고, 세로에 0이면 세로로 움직일 칸이 없다는 의미예요.  
 <중략>  
 T : 현재 말이 있는 위치를 쉽게 알 수 있도록 어떻게 표현하면 좋을까요?  
 C : 말이 있는 (가로, 세로) 쌍으로 나타내면 좋겠습니다.

A-YH는 숫자의 의미를 목적지까지 움직일 수 있는 칸수로 이해하였고 교사의 발문을 통해 목적지의 의미가 단순히 게임의 종료가 아님을 발견하였으며 현재 말의 위치를 순서쌍으로 표기하도록 약속하였다. 이는 문제의 상황을 간결하게 정리함으로써 수학적 사고의 가능성을 촉진할 수 있는 출발점을 마련하는 것이다.

#### 다. 위도프 게임의 이해

위도프 게임의 부호화 과정에서도 남아있는 바둑돌의 개수를 순서쌍으로 표기하도록 하였는데, 앞에서 2모둠 님 게임과 퀴즈 무브 게임에서 이미 표기 방법을 약속한 경험이 있어서 별 어려움이 없었다.

## 2. 추론 과정에서의 지도 사례

### 가. 2모둠 님 게임의 해법 지도

2모둠 님 게임의 추론 과정에서는 문제를 거꾸로 풀어보며 승리하기 직전의 상황을 떠올려보는 것으로 필승전략을 찾도록 하였다. 게임자가 승리하기 위해서는 우선 자신이 질 수밖에

없는 상황을 피하는 것이 필요한데, 그러기 위해서는 상대 게임자가 질 수밖에 없는 상황을 만들어 제시해야 한다. 이를 위해서는 선수(先手, 먼저하는 사람)가 유리할지, 후수(後手, 나중에 하는 사람)가 유리할지를 고려해야 한다.

먼저할 경우 바둑들의 개수가 다르므로 바둑들을 같은 수로 만든다.  
나중에 할 경우 상대가 가져간 바둑의 수만큼 똑같이 가져간다.

[그림 IV-1] 2모듬 님 게임의 해법을 설명한 예(B-SW)

[그림 IV-1]로 응답한 B-SW와의 인터뷰를 통해 B-SW는 처음 시작하는 바둑들의 개수가 양쪽이 다른 경우에는 선수가 유리하고 시작하는 바둑들의 개수가 양쪽이 같은 경우에는 후수가 유리하다는 점을 발견하였다는 것을 확인하였다.

T : 2모듬 님 게임에서 승리하는 방법을 어떻게 썼는지 설명해 줄래?

B-SW : 시작할 때 양쪽에 바둑들의 개수가 다르고, 제가 먼저 하면 무조건 이길 수 있어요. 양쪽에 바둑들을 같은 수로 만들면 이길 수 있거든요.

T : 왜 그렇게 생각했어?

B-SW : 같은 수로 만들고 나면, 상대방이 가져간 바둑들 개수와 같은 수를 다른 쪽에서 가져가면 또 같은 수가 되잖아요. 결국 (1, 1)이 되고, 그러면 이겨요.

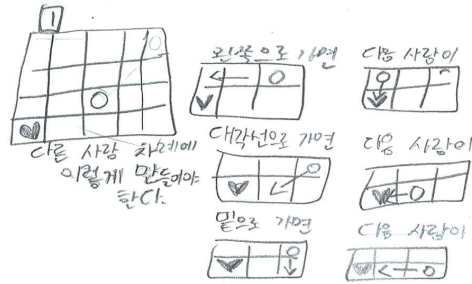
T : 네가 나중에 시작하면 어떻게 될까?

B-SW : 제가 나중에 시작하면 불리해요. 그럴 땐, 처음에 같은 수의 바둑들로 시작하는 게 좋아요. 그럼 제가 이길 수 있어요.

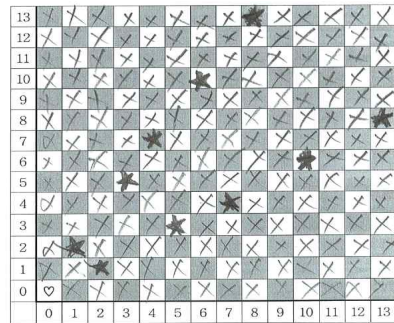
#### 나. 퀴즈 무브 게임의 해법 지도

퀴즈 무브 게임의 추론 과정에서는 과제해결 전략 중 거꾸로 풀기 전략을 중심으로 주요발문

을 활용하여 학생들이 게임의 필승전략을 발견할 수 있도록 지도하였다.



[그림 IV-2] 퀴즈 무브 게임의 첫 번째 필승 전략을 설명한 예



[그림 IV-3] 퀴즈 무브 게임의 해법을 찾은 예

[그림 IV-2]는 학생이 경험적으로 알게 된 첫 번째 필승전략을 경우의 수를 고려하여 자신이 발견한 위치가 필승전략임을 증명하려고 하였으며 [그림 IV-3]으로 반응한 학생은 퀴즈 무브 게임 판에 필승전략의 위치를 표시하며 해법에 접근하고자 하였고 이를 통해 13칸보다 작은 판에서의 퀴즈 무브 게임의 해법을 찾았다고 볼 수 있다.

퀴즈 무브 게임의 해법을 발견한 어떤 학생은 게임을 처음 해볼 때에는 어느 쪽으로 움직여야 할지를 고민했는데, 나중에는 어느 쪽으로 움직이지 말아야 할지를 생각하다가 필승전략을 찾을 수 있었다고 하였다. 또 다른 학생은 시작하



는 위치가 아닌 목적지에서부터 거꾸로 생각을 하니 필승전략을 더 쉽게 찾을 수 있었다고 하였다.

### 3. 사상 과정에서의 지도 사례

사상은  $A : B = C : ?$ 에서 추론된 관계를 적용하기에 앞서 주어진 A와 C 간의 관계를 찾는 과정이다.

#### 가. 2모둠 님 게임과 위도프 게임의 사상 과정

2모둠 님 게임과 위도프 게임의 사상 과정에서는 학생들이 두 게임의 표면적 유사성 및 비슷하지 않은 점을 발견할 수 있도록 지도하였다. 두 게임 간의 차이점에 대한 학생들의 반응은 3가지로 분류해 볼 수 있다.

[경우 1] 바둑돌을 가져가는 방법 면에서 위도프 게임은 2모둠 님 게임에서는 할 수 없는 양 쪽에서 가져가는 방법을 쓴 경우.

[경우 2] 2모둠 님 게임의 필승전략을 위도프 게임에 적용할 수 없다는 것을 쓴 경우(예, [그림 IV-4]).

[경우 3] 위도프 게임의 필승전략을 2모둠 님 게임에 적용할 수 없다는 것을 사용한 경우(예, [그림 IV-5]).

바둑돌 가져가기 게임은  
같은수를 내가 만들면 이기지 만  
위도프는 같은 수를 만들면  
진다

[그림 IV-4] 위도프 게임과 2모둠 님 게임의 차이점(C-JH)

위도프 게임에서 (1, 2)로 남기면 이기는데  
바둑돌 가져가기 게임은 (1, 2)로 남기면  
상대가 개있는 쪽에서 한개를 가져간다.  
그러면 내가 진다.

[그림 IV-5] 위도프 게임과 2모둠 님 게임의 차이점(C-MB)

이 과정에서는 부호화 과정을 통해 확인한 2모둠 님 게임과 위도프 게임의 속성을 대응해 봄으로써 공통점과 차이점을 인식하는 것이 중요하다. 왜냐하면 이후에 이루어지는 적용 과정에서 2모둠 님 게임의 해법을 위도프 게임에 적용할 때 유추전이가 이루어지지 않는 원인을 파악하는 데 도움을 주기 때문이다.

#### 나. 퀴즈 무브 게임과 위도프 게임의 사상 과정

퀴즈 무브 게임과 위도프 게임의 사상 과정에서는 학생들이 두 게임의 구조적 유사성을 발견할 수 있도록 지도하였다.

이 과정에서는 두 게임 간의 공통점을 파악하여 구조적 유사성 발견을 목적으로 하기 때문에 이를 학생들이 발견할 수 있도록 교사의 의도적인 발문이 중요하다. 두 게임 간의 공통점에 대한 학생들의 반응은 2가지로 분류해 볼 수 있다.

첫 번째는 [그림 IV-6]처럼 바둑돌을 가져가는 방법과 말을 움직이는 방법 사이의 관련성에 주목한 경우이며, 두 번째는 순서쌍으로 표기된 두 게임 간의 필승전략의 유사성에 주목한 경우이다. [그림 IV-7]처럼 B-SW는 승리했을 때의 상황이 순서쌍으로 (0, 0)이라는 점과 첫 번째 필승 전략이 같다는 점을 공통점으로 판단하였다. 그리고 [그림 IV-8]은 첫 번째 필승전략을 넘어서 두 게임의 해법이 같다는 것을 발견한 사례이다.

높은 시작 바둑 점수	왼쪽
검정색	아래쪽
둘 다	왼쪽 아래 대각선
바둑돌수가 줄어들	도착과 거리가 줄어들음

[그림 IV-6] 위도프 게임과  
퀵스 무브 게임의 공통점(C-JH)

순서쌍으로 (0,0)이 되어야지  
위도프 게임도 퀵스 무브 게임도 이긴다.  
(2,1), (1,2)가 되면 이길 수 있다.

[그림 IV-7] 위도프 게임과  
퀵스 무브 게임의 공통점 2(B-SW)

완전히 똑같다.

이 방법은 수가 같다.

순서쌍 숫자뿐만 보면 같은 방법이다.

[그림 IV-8] 위도프 게임과  
퀵스 무브 게임의 공통점 3(C-MB)

이 과정에서는 부호화 과정을 통해 확인한 퀵스 무브 게임과 위도프 게임의 속성을 대응해 봄으로써 두 게임 간의 구조적 유사성을 인식하는 것이 중요함을 확인하였다. 두 게임 모두 선택할 수 있는 방법이 3가지인 것과 각각의 방법이 다른 게임에서 어떤 점과 관련이 있는지 확인하는 것과 게임이 종료된 상황을 순서쌍으로 표기했을 때의 의미를 파악하는 것이 핵심이라 할 수 있다.

#### 4. 적용 과정에서의 지도 사례

적용 과정에서는 표면적 유사성을 지닌 2모듬 게임의 해법을 위도프 게임에 적용할 때 발생하는 문제를 깨닫고 원인을 발견하며 구조적 유사성을 지닌 퀵스 무브 게임의 해법을 위도프 게임에 적용하여 문제를 해결하는 것의 효율성을 발견하도록 지도하였다. 사상 과정을 통하여 위도프 게임과 퀵스 무브 게임의 구조적 유사성을 발견한 학생은 [그림 IV-9]와 같이 위도프 게임의 해법을 찾을 때, 퀵스 무브 게임의 해법을 적용하고자 하였다.

퀵스 무브 게임 승리 방법	
1,2	2,1
3,5	5,3
4,7	7,4
6,10	10,6

=> 위도프 게임과도 동일

[그림 IV-9] 구조적 유사성을 활용한 적용  
과정(C-MB)

이 과정은 유추를 활용하여 위도프 게임의 해법을 탐구하는 마지막 단계로, 학생들은 2모듬 게임의 해법을 위도프 게임에 적용하는 과정에서 유추전이가 이루어지지 않음을 알게 된다. 이러한 과정을 거치면서 표면적 유사성을 지닌 기저 문제로 목표 문제를 해결하는 것의 한계를 느끼게 된다. 하지만 표면적 유사성을 적용하여 과제를 해결하는 과정에서 발생하는 오류의 발견은 구조적 유사성에 주목해야 할 필요성을 갖게 한다. 그리고 목표 문제의 해결에 어려움이 있을 때 이와 구조적으로 유사한 기저 문제를 통하여 해결할 수 있음을 발견하는 것은 과제해결능력의 신장에 도움을 줄 수 있다.

#### 5. 유추 과정 이외의 기타 사례

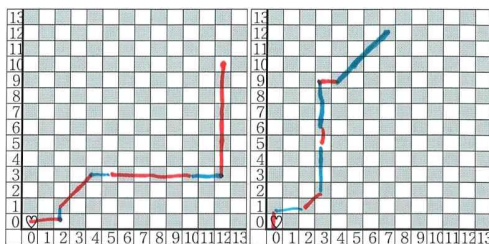
Sternberg의 유추 과정 이외에도 학생들이 직접 기존 게임들과 유사한 새로운 게임을 만들면서 발견한 몇 가지 사례들이 나타났다.

가. Rook's move game 발견

구조적 유사성으로 목표 문제인 위도프 게임의 해법을 쉽게 찾을 수 있다는 것에 신기함을 느낀 A-HS는 2모둠 님 게임은 양쪽에서 동시에 바둑돌을 가져갈 수 없기 때문에 퀸즈 무브 게임에서 대각선방향으로 이동하는 경우를 제한하면 위도프 게임과 퀸즈 무브 게임이 유사한 것 같이 2모둠 님 게임과 구조적으로 유사한 게임을 만들 수 있다고 하면서 그 게임을 Rook's move game이라고 이름 지었다. 이는 2모둠 님 게임의 속성을 분석하고 구조적 유사성을 지닌 새로운 게임을 만든 것으로 유추를 활용하여 해법을 탐구하는 수준을 뛰어넘어 구조적 유사성을 고려하여 새로운 게임을 만드는 수준까지 발전한 경우이다.

나. 필승전략 주변으로 유인하기

C-MB학생은 위도프 게임과 퀸즈 무브 게임을 하는 과정에서 자신이 알고 있는 필승전략 주변으로 상대 게임자를 유인하는 방법을 사용하였다.



[그림 IV-10] 퀸즈 무브 게임의 필승전략 주변으로 유인하기(C-MB)

1, 한쪽에는 3개를 만든다.  
2, 상대가 3개 남은 쪽에서 가져가면 (2,1) (1,2)로 만들어 이긴다.  
3, 상대가 다른 쪽에서 가져가면 내가 5개로 만들 ~~해야~~ 이긴다.  
면

[그림 IV-11] 위도프 게임의 필승전략 주변으로 유인하기(C-MB)

[그림 IV-10]은 C-MB가 자신의 순서에 가로 또는 세로의 숫자가 3인 곳으로 이동시키고 다음 자신의 순서에 알고 있는 필승전략으로 이동시켜 이기는 과정을 보여준다. [그림 IV-11]에서 C-MB는 필승전략인 (1, 2), (3, 5)를 알고 있었기 때문에 자신의 차례에 (3, n)을 만들고 상대 게임자가 3개 남은 쪽에서 1-3개를 가져가면 (0, 0) 또는 (1, 2)를 만들거나 n개가 남은 쪽에서 가져가서 (3, k) (단,  $k > 5$ ) 상황이 되면 (3, 5)를 만들어 승리하고자 하였다.

하지만 필승전략 주변으로 유인하는 방법으로 게임에서 승리하는 학생들은 자신이 알고 있는 필승전략을 상대 게임자가 모르고 있을 때에만 적용할 수 있다는 한계가 있었다.

다. 필승전략으로 접근하는 방법

위도프 게임이나 퀸즈 무브 게임을 할 때, 상대 게임자를 이기기 위해서는 남은 바둑돌의 수나 말의 위치를 파악하고 자신이 알고 있는 필승전략으로 만들어야 한다. 우연히 승리하는 경우를 제외하고 자신이 알고 있는 필승전략으로 만들기 위해 학생들은 2가지 방법을 사용하는 모습을 보였다. 첫 번째는 한 쪽에서 가져가는 방법(왼쪽 또는 아래쪽방향으로 이동하는 것)이고 두 번째는 양쪽에서 가져가는 방법(왼쪽아래

대각선방향으로 이동하는 것)이다. 단, 두 번째 방법은 자신이 알고 있는 필승전략 순서쌍의 숫자보다 남아있는 바둑돌의 개수가 적거나 말이 목적지에 가까울 때에는 사용하는 데 제한이 있다.

경우 1. 한 쪽에서만 가져가는 방법

한 쪽에서 가져가는 방법이란 자신이 알고 있는 필승전략으로 접근하는 마지막 행동이 순서쌍에서 한 개의 숫자만을 변화시키는 방법이다. 자신이 알고 있는 필승전략이 (1, 2), (3, 5), (4, 7)일 때, 위도프 게임의 경우, 한 쪽에 바둑돌이 1, 2, 3, 4, 5, 7개가 남아 있으면 다른 쪽의 바둑돌을 가져가서 필승전략으로 만드는 방법이다. 퀴즈 무브 게임의 경우, 현재 말의 위치를 나타내는 숫자 중 하나가 1, 2, 3, 4, 5, 7이라면 그 숫자는 고정시키고 왼쪽이나 아래쪽(왼쪽아래 대각선방향은 제외)으로 움직여서 필승전략 위치로 이동하는 방법이다.

경우 2. 양쪽에서 가져가는 방법

양쪽에서 가져가는 방법이란 자신이 알고 있는 필승전략으로 접근하는 마지막 행동이 순서쌍에서 두 개의 숫자를 모두 변화시키는 방법이다. 이러한 방법을 적용하는 학생들은 현재 남아있는 바둑돌의 개수 또는 말의 위치를 나타내는 순서쌍에서 두 수의 차를 계산하는 모습을 보였다. 두 수의 차가 (1, 2)는 1, (3, 5)는 2, (4, 7)은 3이라는 것을 파악하여 두 수의 차를 계산 후 바둑돌을 가져가거나 말을 움직였다. 이와 같이 필승전략에 접근하는 B-SW는 순서쌍에서 두 수의 차를 확인하는 것이 이기는 방법이라고 하였으며, 두 수의 차에 해당하는 필승전략이 1개만 있을 수밖에 없음을 “두 수의 차가 1이고 (1, 2)보다 더 큰 수의 필승전략이 있다면, 다음 순서에 상대방이 (1, 2)로 만들 수 있기 때문에 두 수의 차가 1인 필승 전략은 1개 밖에 없다”고 설명하였다.

6. 유사성을 파악하는 사고 과정 분석

본 연구에서 다루는 3가지 게임에 대해 학생들이 게임 간의 유사성을 파악해 가는 사고 과정을 분석한 결과는 다음과 같다.

가. 비슷한 게임 찾기

1차시와 5차시 수업에서 학생들이 비슷한 게임을 무엇이라 생각하는지 확인하였다. 2모둠 님 게임과 퀴즈 무브 게임 중 위도프 게임과 더 비슷한 게임을 선택하는 질문에 대한 학생들의 반응은 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 위도프 게임과 비슷한 게임 찾기

선택 그룹	2모둠 님 게임		퀴즈 무브 게임	
	1차시	5차시	1차시	5차시
A	10	0	2	12
B	11	0	1	12
C	11	0	1	12
계	32	0	4	36

5차시 수업 후 연구에 참여하였던 36명 학생 전원이 위도프 게임과 비슷한 게임을 퀴즈 무브 게임이라고 선택하였다. 1차시 수업에서 위도프 게임과 비슷한 게임을 2모둠 님 게임이라고 응답한 32명의 학생들에게 유추를 활용한 수업을 통해 생각의 변화가 생겼다는 것을 의미한다. 목표 문제를 해결하기 위해서 기저 문제를 회상할 때, 문제에 제시된 표현이 유사한 것과 문제에 등장하는 사물이나 문장 기술에 사용된 낱말이 유사한 것을 비슷한 문제라고 인식하는 사고에서 문제의 구조와 문제에서 발견할 수 있는 조건이 유사한 것을 비슷한 문제라고 인식하는 사고로 변화되었다는 것을 의미한다.

나. 게임 간의 유사점 찾기

1차시 수업 중 위도프 게임과 2모듬 님 게임, 위도프 게임과 퀴즈 무브 게임의 비슷한 점을 찾아 보도록 하여 학생들이 게임 간의 표면적 유사성과 구조적 유사성을 어느 정도 인식하고 있는지 확인하고자 하였으며 그 결과는 <표 IV-2>와 같다.

<표 IV-2> 위도프 게임과 비슷한 점 찾기  
(1차시 수업 후)

유사성 인식 그룹	2모듬 님 게임			퀴즈 무브 게임		
	유사성 미파악	표면적 유사성	구조적 유사성	유사성 미파악	표면적 유사성	구조적 유사성
A	0	12		1	7	4
B	0	12		1	8	3
C	0	12		0	7	5
계	0	36		2	22	12

<표 IV-2>에서 유사성에 대한 언급이 전혀 없거나 관련 없는 내용이면 ‘유사성 미파악’, 문제에 제시된 게임 방법이나 문장 기술에 사용된 낱말이 유사한 점을 찾으면 ‘표면적 유사성’, 필승전략이나 게임의 조건을 찾으면 ‘구조적 유사성’으로 분류하였다.

학생 36명 모두 위도프 게임과 2모듬 님 게임의 표면적 유사성에 주목하였으며 대부분의 학생들은 두 게임 간의 비슷한 점을 ① 바둑돌을 사용하는 게임이다, ② 양쪽에 흰색과 검은색 바둑돌을 한 줍씩 놓고 시작한다, ③ 번갈아가면서 하는 게임이다, ④ 1개 이상 최대 무제한으로 가져갈 수 있다 등으로 응답하였다.

위도프 게임과 퀴즈 무브 게임의 비슷한 점을 찾는 학생들의 반응에서 22명은 표면적 유사성에 주목하였다. 표면적 유사성에 주목한 학생들은 대부분 바둑돌을 이용하고 순서를 정하여 2명이 하는 게임이라는 반응을 보였으며 12명은 구조적 유사성에 주목하였지만 전체적인 구조의 유사성은 인식하지 못하였다.

위도프 게임과 퀴즈 무브 게임의 구조적 유사성을 인식한 12명 중 4명(<표 IV-1>참고)만이 위도

프 게임과 비슷한 게임을 퀴즈 무브 게임으로 응답하였고, 8명은 2모듬 님 게임이 더 비슷하다고 응답하였다. 위도프 게임과 퀴즈 무브 게임의 구조적 유사성을 인식하였지만 2모듬 님 게임이 위도프 게임과 더 비슷하다고 응답한 학생 중 C-MB는 “위도프 게임은 퀴즈 무브 게임과도 비슷하지만, 2모듬 님 게임이 더 비슷하다고 생각해요. 왜냐하면 바둑돌을 가져가는 방법과 이기는 방법이 비슷하다”라고 하며 표면적 유사성이 더 중요하다고 판단하였다. 즉, 위도프 게임과 퀴즈 무브 게임이 필승전략은 같지만 게임 설명에 제시된 표현이 유사한 2모듬 님 게임이 퀴즈 무브 게임보다 위도프 게임과 더 비슷하다고 판단한 것이다.

위도프 게임과 비슷한 게임을 퀴즈 무브 게임이라 응답하고 위도프 게임과 퀴즈 무브 게임의 구조적 유사성에 주목한 학생들의 두 게임 간의 표면적 유사성에 대한 생각을 확인하기 위해서 A-HS와 인터뷰를 하였다. A-HS는 “바둑돌을 사용하는 것이나 번갈아가면서 하는 것도 비슷한 점이지만 필승전략을 찾을 때 중요한 부분은 아니에요”라고 하였다. 즉, 표면적 유사성이 과제 해결, 필승전략 찾기에 결정적인 영향을 미치지 못함을 인식하였기 때문에 구조적 유사성에 집중했던 것으로 분석된다.

#### 다. 유사성 파악과 과제해결능력

학생들이 유사성을 파악하는 사고 과정과 과제해결능력 사이에 관련성이 있는지 확인하기 위해 위도프 게임 2차 투입 결과를 비교해 보았다. 1차시 수업 후 A그룹에는 어떤 게임도 투입되지 않았으며, B그룹은 2모듬 님 게임, C그룹은 퀴즈 무브 게임 지도가 이루어졌으며, 지도 이후 위도프 게임과 퀴즈 무브 게임의 비슷한 점에 대한 질문을 하였다. 위도프 게임과 퀴즈 무브 게임의 유사성 파악과 과제해결능력(위도프 게

입 2차 투입 결과)과의 관련성을 정리하면 <표 IV-3>과 같다.

<표 IV-3>을 살펴보면, 전체 36명의 학생 중 27명은 첫 번째 필승전략, 6명은 두 번째 필승전략, 3명은 세 번째 필승전략 이상을 발견하였다. 두 번째 필승전략 이상을 발견한 9명은 모두 구조적 유사성에 주목하였으나 첫 번째 필승전략만을 발견한 27명 중 20명은 표면적 유사성에 주목하였다. 이는 구조적 유사성에 주목한 학생들이 더 높은 수준의 필승전략을 찾았다고 볼 수 있다. 또한, 구조적 유사성을 지닌 퀴즈 무브 게임을 학습한 C그룹에서 높은 수준의 필승전략을 발견하였다는 것은 구조적 유사성의 발견이 과제해결능력에 영향을 미친다는 것을 의미한다.

<표 IV-3> 유사성 파악과 과제해결능력

그룹	반응	첫 번째 필승전략을 발견	두 번째 필승전략을 발견	세 번째 필승전략 이상을 발견
A	유사성 미파악	.	.	.
	표면적 유사성	8	.	.
	구조적 유사성	4	.	.
B	유사성 미파악	.	.	.
	표면적 유사성	10	.	.
	구조적 유사성	1	1	.
C	유사성 미파악	.	.	.
	표면적 유사성	2	.	.
	구조적 유사성	2	5	3
계	유사성 미파악	.	.	.
	표면적 유사성	20	.	.
	구조적 유사성	7	6	3

위도프 게임 2차 투입 후, B그룹과 C그룹의 4차시 수업에서는 2차시 수업의 내용과 반대로 B그룹에는 퀴즈 무브 게임을 투입하였고 C그룹에는 2모둠 님 게임을 투입하였다. 수업 이후, 발

견한 해법을 토대로 5차시 수업(위도프 게임 3차 투입)에서 위도프 게임의 필승전략을 찾아보도록 하였으며 결과는 <표 IV-4>와 같다.

<표 IV-4> 위도프 게임 3차 투입 시 반응

그룹	반응	필승 전략이 아님	필패의 수를 설명함	첫 번째 필승 전략 (1,2)을 발견	두 번째 필승 전략 (3,5)을 발견	세 번째 필승 전략 (4, 7) 이상을 발견
B	1차 투입	3	4	5	0	0
	2차 투입	0	0	11	1	0
	3차 투입	0	0	4	6	2
C	1차 투입	3	4	5	0	0
	2차 투입	0	0	4	5	3
	3차 투입	0	0	2	7	3

2모둠 님 게임→ 퀴즈 무브 게임의 순서로 학습한 B그룹은 2모둠 님 게임 학습 후보다 퀴즈 무브 게임을 학습한 후에 과제해결능력이 발전한 반면, 퀴즈 무브 게임→ 2모둠 님 게임의 순서로 학습한 C그룹은 2모둠 님 게임 학습 후 큰 변화가 없었다. 이를 통해 구조적 유사성을 지닌 퀴즈 무브 게임의 학습이 위도프 게임의 과제해결에 도움을 주지만 표면적 유사성을 지닌 2모둠 님 게임의 학습은 위도프 게임의 과제해결에는 결정적인 도움을 주지 못한다는 것을 확인할 수 있었다.

결론적으로 위도프 게임 3차 투입 후 학생들의 과제해결능력을 살펴보면 위도프 게임의 과제해결능력의 신장에 영향을 주는 것은 2모둠 님 게임보다는 퀴즈 무브 게임이었다. 목표 문제의 해결을 위해 기저 문제와의 구조적 유사성을 발견하고 이를 목표 문제의 해법 탐구에 적용하는 과정을 거치도록 수업을 구성해야 함을 확인할 수 있었다.

## V. 결론

본 연구의 목적은 학생들이 유추적 사고를 활용할 수 있도록 하기 위해 위도프 게임과 표면적 유사성을 지닌 2모둠 님 게임과 구조적 유사성을 지닌 퀴즈 무브 게임을 투입하여 지도하는 수업 사례를 통해 초등학교 영재학급 학생들의 사고 과정을 분석해 봄으로써 앞으로 영재학급에서 이 주제를 활용하고자 할 때 사용할 수 있는 유용한 지도 방법을 고찰하는 것이다. 이를 위해 Sternberg의 요소이론을 중심으로 'A : B = C : D'라는 문제 구조에서 유추를 활용하여 D를 찾기 위한 유용한 지도 방법을 탐구하였다.

영재학급 학생들은 두 문제 간의 유사성을 판단할 때 고려하는 기준이 수업 전후로 변화를 보였는데, 수업 전에는 문제의 표면적 내용이 유사한 것 또는 문제에 등장하는 사물이나 문장 기술에 사용된 낱말이 유사한 것을 기준으로 판단하지만 결국은 문제에서 제시된 수치나 방법, 해법 등의 구조적 유사성에 주목한 학생들이 목표 문제인 위도프 게임의 필승전략을 찾아내는 데 성공하였다. 이는 박미미, 이동환, 이경화, 고은성(2012)에서도 구조적 유사성의 인식이 과제 해결능력에 영향을 미친다는 것을 뒷받침하는 다른 학교급과 다른 영역에서의 한 가지 의미 있는 사례를 추가해 준다.

영재학급 학생들이 유추를 활용하여 위도프 게임의 해법을 찾도록 하는 데 도움을 줄 수 있는 유추적 사고의 각 과정별로 유용한 지도 방법은 다음과 같다.

첫째, 부호화 과정은 여러 가지 게임에 대한 이해가 이루어지는 과정으로 남아있는 바둑돌의 개수와 말의 위치를 순서쌍으로 표기하도록 사전에 명확히 약속하는 것은 추론 과정에서 기저 문제의 해법을 발견하는 데 도움을 줄 뿐 아니라 사상 과정에서 목표 문제와의 관계를 대응하

는 데 도움을 줄 수 있다.

둘째, 추론 과정에서 게임에서 승리한 경우를 가정하여 문제를 거꾸로 풀어보는 방법으로 필승전략을 찾는 활동은 기저 문제의 해법을 발견하는 데 도움을 줄 수 있다.

셋째, 사상 과정은 두 게임 간의 공통점을 파악하여 표면적 유사성과 구조적 유사성을 발견하는 과정으로 부호화 과정에서 이미 약속한 표기법을 바탕으로 사상 과정이 이루어져야 두 게임 간의 구조적인 관계를 인식하는 데 도움을 줄 수 있다.

넷째, 적용 과정은 결국 최종적으로 위도프 게임의 해법을 발견하는 과정으로 표면적 유사성을 버리고 구조적 유사성에 주목하도록 해야 한다.

한편, 문제해결 이후에도 학생들이 직접 유사한 문제(게임)를 만들어 보는 것은 유추적 사고를 활용할 수 있는 한 가지 방법이 될 수 있다. 학생들이 만든 게임에서의 핵심과 본질이 무엇이며 기존 게임과 어떤 면에서 유사한지를 질문해 줌으로써 표면적으로만 유사한 게임이 아니라 구조적으로 유사한 게임을 만들도록 유도할 수 있다.

## 참고 문헌

- 김미현 (2001). **바탕문제 학습 조건이 자발적 유추전에 미치는 효과**. 박사학위논문. 고려대학교.
- 김미현, 이만영 (2003). 바탕문제들 간의 표면 유사성과 바탕문제 학습 방법이 자발적 유추전에 미치는 효과. **한국심리학회지**, 15(3), 367-392.
- 김민화 (2000). **유사성과 유추적 상기가 아동의 유추 전이 발달에 미치는 영향**. 박사학위논문. 성균관대학교.

- 박미미, 이동환, 이경화, 고은성 (2012). 유추에 의한 문제제기 활동을 통해 본 통계적 개념 이해. **수학교육학연구**, 22(1), 101-115.
- 박현정, 이종희 (2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석. **수학교육학연구**, 16(2), 115-138.
- 배신영 (2015). **영재학급 학생들을 대상으로 유추를 활용한 ‘위도프 게임의 해법 탐구’ 지도 사례**. 석사학위논문. 경인교육대학교 교육전문대학원.
- 송상현, 정영옥, 임재훈, 신은주, 이향훈 (2007). 수학영재들이 NIM 게임 과제에서 만든 문제 만들기 사례 분석. **수학교육학연구**, 17(1), 51-66.
- 송순정 (2003). **유추를 활용한 문제해결 지도에 관한 연구**. 석사학위논문. 인천교육대학교.
- 양기열, 이의진 (2011). 수학영재학생들의 유추를 통한 이차곡면의 탐구활동 분석. **영재교육연구**, 21(2), 269-286.
- 우정호 (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교출판부.
- 이경화 (2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. **수학교육학연구**, 19(3), 355-369.
- 이신자 (2009). **초등학교 4학년 학생의 수학 문제해결에서 나타나는 유추적 사고 과정 분석**. 석사학위논문. 경인교육대학교.
- 황혜정 외 5명 (2012). **수학교육학신론**. 문음사.
- Abel, Z. (2012). Three-Cornered Things(Putting the Why in Wythoff, The “Fibonacci”est String). Weekly wanderings through higher math-from no so high vantage point. 검색일 2014년 11월 19일, 웹주소 <http://blog.zacharyabel.com/tag/wythoffs-game>.
- English, L. (ed.) (1997), *MATHEMATICAL REASONING: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. (권석일 · 김성준 · 나귀수 · 남진영 · 박문환 · 박영희 · 변희현 · 서동엽 · 이경화 · 최병철 · 한대희 · 홍진곤 역(2010). 수학적 추론과 유추, 은유, 이미지. 경문사.
- Gurvich, V. (2010). *Further generalizations of Wythoff's game and minimum excludant function*. Rutgers research report. Rutgers University.
- Hirschfeld-Cotton, K. (2008). *Wythoff's Game*. Oshkosh, Nebraska.



# A Case Study on Teaching Solutions Exploration of Wythoff's Game through Using the Analogy for the Elementary Gifted Class

Bae, Sin Young (Wang-gil Elementary School)

Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education)

The purpose of this study is to analyze cases on teaching solutions exploration of Wythoff's game through using the analogy for the gifted elementary students, to suggest useful teaching methods.

Students recognized structural similarity among problems on the basis of relevance of conditions of problems. The discovery of structural similarity improves the ability to solve problems. Although 2 groups-NIM game with surface similarity is not helpful in solving Wythoff's game, Queen's move game with structural similarity makes it easier for students to solve Wythoff's game.

Useful teaching methods to find solutions of Wythoff's game through using the analogy are as follow. Encoding process helps students make sense of the game.

It is significant to help students realize how

many stones are remained and how the location of Queen can be expressed by the ordered pair. Inferring process helps students find a solution of 2 groups-NIM game and Queen's move game. It is necessary to find a winning strategy through reversely solving method. Mapping process helps students discover surface similarity and structural similarity through identifying commonalities between the two games. It is crucial to recognize the relationship among the two games based on the teaching in the Encoding process. Application process encourages students to find a solution of Wythoff's game.

It is more important to find a solution by using the structural similarity of the Queen's move game rather than reversely solving method.

\* Key Words : elementary gifted class(초등영재학급), Wythoff's game(위도프 게임), Nim game(нім 게임), Queen's move game(퀸즈 무브 게임), analogy(추론), base problem(기저 문제), target problem(목표 문제), structural similarity(구조적 유사성)

논문접수 : 2015. 1. 16

논문수정 : 2015. 2. 9

심사완료 : 2015. 2. 10