

구매종속성이 존재하는 상황에서 부분 부재고 EOQ 모형에 대한 고찰*

박 창 규[†]
울산대학교 경영학부

Deterministic EOQ Model with Partial Backordering when Purchase Dependence Exists

Changkyu Park[†]
College of Business, University of Ulsan

■ Abstract ■

Purchase dependence is a frequent phenomenon in retail shops and is characterized by the purchase of certain items together due to their unknown interior associations. Although this concept has been significantly examined in the marketing field (e.g. market basket analysis), it has largely remained unaddressed in operations management. Since purchase dependence is an important factor in designing inventory replenishment policies, this paper demonstrates the means of applying it to the partial backordering inventory model. Through computational analyses, this paper compares the performance of inventory models that either consider or ignore purchase dependence: the results demonstrate that inventory models that ignore purchase dependence incur more average cost per unit time than the model that considers purchase dependence, and the impact of purchase dependence can increase in significance as the item set becomes more closely correlated with regard to order demand.

Keywords : Inventory, EOQ, Partial Backordering, Correlated Demand, Purchase Dependence

논문접수일 : 2014년 10월 18일 논문게재확정일 : 2015년 01월 21일

* 이 논문은 2014년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(NRF-2014S1A5A2A01010612).

† 교신저자, ckparkuou@ulsan.ac.kr

1. 서 론

구매종속성(purchase dependence)은 어떤 품목들이 알려지지 않은 그들 내부의 연관관계 때문에 고객에 의해 함께 구매되는 것으로 소매점이나 슈퍼마켓에서 빈번하게 발생하는 현상이다. 구매종속성에 대한 개념은 마케팅 분야(예를 들어, 고객관계관리, customer relationship management)에서는 많이 활용되고 있지만, 재고관리 분야에서는 거의 활용되지 않고 있다.

구매종속성은 다음과 같이 묘사될 수 있다. 고객이 각 품목을 독립적으로 구매하는 경우도 있지만, 여러 품목들을 묶어서 동시에 구매하고자 하는 경우도 있다. 고객이 여러 품목들을 동시에 구매하고자 하는 경우, 공급자는 모든 품목에 대해 고객요구를 충족시켜야 한다. 그렇지 못할 경우, 고객은 모든 품목들에 대한 주문충족을 제공해 줄 수 있는 다른 공급자를 찾게 된다. 이러한 구매행태에서 다른 모든 품목이 재고로 존재하지만, 품목들 중 일부가 재고로 존재하지 않는다면 상황은 모든 품목이 재고부족인 경우와 동일하다. 이러한 유형의 종속성을 구매종속성이라 정의한다. Bala[4, 5]와 Bala et al.[6]은 소매판매에서 구매종속성을 확인하였고, 박창규, 서준용[1]은 선박 엔진 및 발전기 부품 유통업체의 재고 운영 실태를 분석하는 과정에서 구매종속성을 인식하였다.

비슷한 개념처럼 보일 수도 있지만, 구매종속성은 수요종속성(demand dependence)과는 다른 개념이다. 구매종속성은 고객의 구매행태와 관련된 개념인 반면, 수요종속성은 재고품목들에 대한 수요들간의 상관관계를 다룬 개념이다. 수요종속성은 이미 잘 알려진 개념으로 품목간의 종속성, 시간에 따른 종속성, 그리고 장소간의 종속성 등으로 다루어지고 있다.

또한, 구매종속성은 교차판매(cross-selling)효과와도 다음과 같은 차이가 있다. 교차판매효과는 한 품목의 구매가 다른 품목의 구매와 연관성이 있는 것으로 정의된다[25, 27, 28, 29]. 다시 말해서, 주요

품목(major item)의 판매는 관련 하위 품목들(minor items)의 추가적인 판매를 유발할 수 있다. 즉, 하위 품목들은 독립적으로 판매될 수도 있고, 또는 주요품목과 결들여서 추가적으로 판매될 수도 있다. 이것은 주요품목의 재고가 부족하여 판매가 이루어지지 못하면, 하위 품목의 판매도 감소한다는 것을 의미한다.

구매종속성은 주요품목과 하위 품목을 구분하지 않는다는 점에서 교차판매효과와는 다르다. 또한 구매종속성은 어떤 구매가 다른 구매에 의존하는 방향 종속성에 제한을 받지 않는다. 결과적으로 교차판매효과는 구매종속성의 특수한 경우라고 볼 수 있다. 이러한 내용에 대한 설명은 6장의 후반부에서 자세히 기술할 것이다.

본 논문은 구매종속성이 존재하는 경우에 부분 부재고가 허용되는 상황을 다루고자 한다. 이와 같은 상황이 일어날 수 있는 사례로는 전자상거래가 이루어지는 인터넷 쇼핑물이나 의약품업이 실시된 후의 동네약국 등을 들 수 있다. 인터넷 쇼핑물의 예를 살펴보면, 쇼핑물에서 고객들은 원하는 품목들을 찾아서 장바구니에 담는다. 원하는 품목들을 모두 장바구니에 담은 후 구매결정을 내리면, 인터넷 쇼핑물에서는 즉시 배송이 가능한 품목과 품질이어서 배송에 추가적인 시간이 필요한 품목들을 보여준다. 이때 인내심이 그다지 많지 않은 고객은 주문 자체를 취소하고 다른 경쟁 쇼핑물로 가게 되고, 일부 인내심이 있는 고객은 약간의 배송시간을 기다려 줄 것이다.

처음으로 Montgomery et al.[18]이 부분 부재고를 고려한 기본 EOQ 모형과 그 모형의 해법절차를 제시한 이후로, 그 후 40년간에 걸쳐 많은 연구자들이 부분 부재고를 고려한 기본 EOQ 모형에 대해 추가적으로 가정사항들을 완화하는 모형을 개발하였다. 완화한 가정사항에는 시간-종속 또는 부재고-종속 부재고 확률, 재고 가치하락, 시간-종속 또는 재고-종속 수요함수, 그리고 수량 할인과 같은 것들이 포함된다. Pentico and Drake[20]는 부분 부재고를 고려한 확정적 EOQ 모형에 대한 문헌고찰 연구를 출

통히 수행하였다.

비록 부분 부재고를 고려한 확정적 EOQ 모형에 대한 연구가 많이 존재하지만, 이러한 연구의 대부분은 단일 품목 재고문제에 관한 것이다. 대부분의 연구들이 판매에서 수요간에는 상관관계가 없는 것으로 가정하여 독립된 수요를 재고 모형에 적용하였다. 이 와중에 Zhang et al.[28]은 교차판매 때문에 하위 품목의 수요가 주요품목의 수요와 상관관계를 가지는 2-품목 재고시스템을 고려하였다. 추후 Zhang[27]은 여러 개의 하위 품목들을 다룰 수 있도록 Zhang et al.[29]의 모형을 확장시켰다.

구매종속성이 존재할 때, 즉시 만족되지 않은 수요주문의 일부는 상실되고 일부는 부재고 되는 상황을 다룬 EOQ 모형을 박창규[2]가 개발하였다. 그는 해법절차에서 라그랑지 승수이론(theory of Lagrange multiplier)을 이용하여 해를 제시하였으나, 그 해가 쿤터커 조건(Kuhn-Tucker condition)을 만족함을 증명하지 못하였다. 결국 박창규[2]가 제시한 해는 경우에 따라서 전체 최적해가 되지 못하고, 지역 최적해가 되는 경우가 발생하였다. 본 논문은 박창규[2]의 모형을 확장하여 각 품목별로 부재고율과 수요변화율을 고려할 수 있도록 새롭게 재고 모형을 가다듬고, 전체 최적해를 제시하는 해법절차를 수립하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 우선, 다음 장에서는 본 논문의 주제와 관련된 문헌에 대한 고찰을 제시한다. 제 3장은 본 논문의 재고 모형에서 사용한 기호들을 요약한다. 제 4장에서는 부분 부재고를 고려한 단일 품목 EOQ 모형을 간략히 살펴본다. 그리고 구매 종속성이 존재할 때, 부분 부재고를 고려한 2-품목 EOQ 모형을 제 5장에 제시한다. 이 때 두 품목의 주문주기가 동일하다고 가정한다. 제 6장은 2-품목 EOQ 모형을 다품목 부분 부재고 EOQ 모형으로 확장한다. 제 7장은 새로이 개발한 모형을 설명하고, 다양한 부재고율에 따라 최적 재고정책이 어떻게 반응하는지 검토하기 위한 수리적 분석을 보여준다. 마지막으로 제 8장에서는 본 논문의 결론을 제시한다.

2. 관련 문헌고찰

구매종속성과 관련된 문헌을 고찰하기 위해서 본 논문은 <표 1>과 같은 분류표를 이용하고자 한다. 재고보충정책은 각 품목에 대해서 개별적으로 이루어지는 경우와 공동으로 이루어지는 경우로 나누고, 품목에 대한 고객수요는 독립적인 것, 수요종속적인 것과 구매종속적인 것으로 나눈다.

<표 1>에 있는 연구분야 중에서 활발하게 진행되고 있는 분야는 I과 IV이다. 이들 분야에서 이루어진 선행연구에 대한 고찰은 본 논문의 주제에서 벗어나므로 생략하기로 하고, 다만 분야 IV에 대한 고찰이 Goyal and Satir[11], Aksoy and Erenguc[3], Khouja and Goyal[14]에 의해 이루어졌음을 언급한다.

<표 1> 연구분야 분류표

		재고보충정책	
		개별	공동
수요행태	독립	I	IV
	수요종속	II	V
	구매종속	III	VI

본 논문에서 다루는 구매종속성과 관련된 수요종속성은 3가지 형태로 나타난다. 즉, 품목간 종속성, 시간에 따른 종속성, 그리고 장소간 종속성. <표 2>는 분야 II와 V에서 이루어진 연구들을 보여준다. 품목간에 수요종속성이 있는 경우, Liu and Yuan[17]과 Larsen[15]은 최적의 재고보충정책을 찾는 모형을 개발하였다. 이들은 수요가 compound correlated Poisson process를 따를 때 공동보충을 하는 다품목 재고시스템(multi-item inventory system)을 고려하였다. 여기서 compound correlated Poisson process는 고객이 Poisson process를 따라 도착하고, 품목에 대한 수요는 특정 확률분포를 따르도록 한다. Liu and Yuan[17]과 Larsen[15]은 공동보충문제에 대해 can-order policy와 Q(s, S) policy를 각각 활용했다.

〈표 2〉 연구분야 II와 V에서 이루어진 연구들

수요 종속성 형태	연구	재고시스템	주문형식	재고보충정책	수요 프로세스
품목	Liu and Yuan[17] Larsen[15]	다품목 재고시스템	공동보충	Can-order policy Q(s,S) policy	Compound correlated Poisson process
시간	Lee and Chew[16] Veinott[24]	다품목 재고시스템	공동보충	Dynamic periodic review policy	Auto-regressive process Dependent demand over time
	Johnson and Thompson[13] Urban[22, 23]	단일품목 재고시스템	단일품목보충	Periodic review policy	Auto-regressive process
	Dong and Lee[8]	Serial multiechelon inventory system			Martingale model of forecast evolution
장소	Eppen[9] Corbett and Rajaram [7]	Single-item inventory system with a multi-location	단일기간보충	Multi-locatio n newsboy problem	Correlation coefficient
	Yan, Robb, and Silver[26]	Two-echelon supply chain(one distributor and multiple retailers)	Single-item replenishment (same period at all retailers)	Periodic review policy	Equicorrelated multivariate Poisson distribution
장소와 시간	Erkip, Hausman, and Nahmias[10]	Two-echelon supply chain(one distributor and multiple retailers)	Single-item replenishment (same period at all retailers)	Periodic review policy	Index variable process

Veinott[24], Johnson and Thompson[13], Urban [22, 23], Dong and Lee[8], 그리고 Lee and Chew [16]는 품목간에는 서로 독립이나 시간에 따라 수요종속성이 발생할 때 periodic review 모형을 개발하였다. 다품목 재고시스템에 대해서 Lee and Chew[16]는 제품수요가 서로 간에는 독립적이지만 auto-regressive process를 따른다고 가정하였고, Veinott[24]는 특정 기간의 수요분포가 과거 수요에 영향을 받는다고 가정하였다. 단일 품목에 auto-correlated demands를 구현하기 위해서 Johnson and Thompson[13]과 Urban[22, 23]은 auto-regressive process를 활용하였고, Dong and Lee[8]은 Martingale model of forecasting evolution을 이용하였다.

장소간의 수요종속성에 대해서 Eppen[9]과 Corbett and Rajaram[7]은 다양한 장소를 갖는 단일 품목, 단일기간보충(single-period replenishment) 재고시스템을 고려하였고(즉, multi-location newsboy pro-

blem), Yan et al.[26]와 Erkip et al.[10]은 단일 도매점과 다수 소매점으로 구성된 2-단계 공급사슬(two-echelon supply chain)을 고려하였다. Yan et al.[26]와 Erkip et al.[9]이 따른 재고보충은 periodic review policy이다. 추가로 Erkip et al.[10]은 품목 수요에 장소와 시간 모두에서 수요종속성이 발생하게 하였다.

다른 연구분야와는 대조적으로 분야 III과 VI에서 이루어진 연구는 아주 희소하다. Bala[5]는 특정한 수요형태를 따르도록 생성한 데이터를 이용하여 다양한 재고보충정책에 대한 모의실험을 실시하였다. 그는 적용 가능한 재고보충정책에 대해 비용-편익분석을 실시하여 최선의 재고보충정책을 선정하였다. 실질적으로, 구매종속성이 존재하는 상황에서 재고부족이 발생했을 때, 전체 주문이 취소되는 판매손실을 다룬 재고 모형을 제시한 첫 연구는 박창규, 서준용[2]에 의해 수행되었다. 이들은

Hadley and Whitin[12]가 제시한 정량 및 정기발주 모형의 평균 연간비용에 구매종속성이 존재할 때 발생하는 추가적인 판매손실비용을 반영시켜 모형을 확장하였다. 또한, 박창규, 서준용[1]은 정량 및 정기발주 모형에 대해 고객봉사수준을 이용한 방법도 제시하였다.

다음으로 박창규[2]는 구매종속성이 존재하는 상황에서 재고부족이 발생했을 때, 부재고와 판매손실이 결합된 경우인 부분 부재고를 다룬 재고 모형을 제시하였다. 그는 Pentico and Drake[19]가 제안한 단일 품목 부분 부재고 확정적 EOQ 모형을 이용하여 구매종속성을 고려한 다품목 부분 부재고 EOQ 모형으로 확장하였다.

3. 기호

본 논문에서 사용한 기호들을 다음과 같이 요약한다.

모수

- D_i : 품목 i 의 수요율
- C_{oi} : 품목 i 의 주문비용
- C_{hi} : 품목 i 의 재고유지비용
- C_{bi} : 품목 i 의 부재고비용
- C_{li} : 품목 i 의 판매손실비용
- β_i : 품목 i 의 부재고율

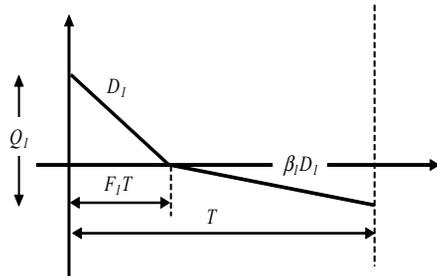
변수

- T : 주문주기
- F_i : 품목 i 의 충족율, 즉 재고로 채워지는 수요의 비율
- Q_i : 품목 i 의 주문량

4. 단일 품목 부분 부재고 EOQ 모형

이 장은 Pentico and Drake[19]가 개발한 단일 품목 부분 부재고 EOQ 모형을 간략히 설명한다. 본 논문에서 그들의 접근방법을 활용하는 이유는 그들의

방법이 사용하기 간단하고 이해하기 쉬운 형태의 식을 생성하기 때문이다. 부재고율이 0과 1사이의 상수($0 < \beta < 1$)라고 가정하면 단일 품목 부분 부재고 EOQ 모형의 재고수준은 <그림 1>과 같이 나타난다. 여기서 재고수준을 나타내는 선의 기울기는 특징기간 동안 해당 품목의 수요율을 나타낸다.



<그림 1> 부분 부재고 EOQ 모형의 재고수준

단위 시간당 평균비용은 주문비용, 재고유지비용, 부재고비용, 그리고 판매손실비용으로 구성된다. 주문비용은 주문을 발주한 회수만큼 더해서 계산되고, 재고유지비용과 부재고비용은 <그림 1>에서 시간축을 기준으로 위와 아래에 있는 삼각형 면적에 의해 계산된다. 판매손실비용은 부재고 되지 않은 수요의 수에 의해 계산된다. 따라서 단위 시간당 평균비용은 다음과 같이 표현된다.

$$T(T, F_1) = \frac{C_{o1}}{T} + \frac{C_{h1} D_1 T F_1^2}{2} + \frac{\beta C_{b1} D_1 T (1 - F_1)^2}{2} + C_{l1} D_1 (1 - \beta)(1 - F_1) \quad (1)$$

식 (1)을 T 와 F_1 으로 일차 편미분하여 0으로 놓으면 다음의 식을 얻는다.

$$F_1^* = \frac{(1 - \beta) C_{l1} + \beta C_{b1} T^*}{T^* (C_{h1} + \beta C_{b1})} \quad (2)$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_{o1}}{D_1 D_{h1}} \left[\frac{C_{h1} + \beta C_{b1}}{\beta C_{b1}} \right] - \frac{[(1 - \beta) C_{l1}]^2}{\beta C_{h1} C_{b1}}} \quad (3)$$

주문량은 다음의 식과 같이 결정된다.

$$Q_1 = D_1 F_1^* T^* + \beta D_1 (1 - F_1^*) T^* \quad (4)$$

식 (2)와 식 (3)이 최적해가 되기 위해서는 부재 고율은 다음의 식과 같이 임계값 β^* 보다 크거나 같아야 한다.

$$\beta \geq \beta^* = 1 - \sqrt{\frac{2C_{o1}C_{h1}}{D_1C_h^2}} \quad (5)$$

$\beta > \beta^*$ 이면 식 (2)와 식 (3)에 의해 계산된 T^* 와 F_1^* 는 식 (1)의 전체 최소값을 얻는다. 만약 $\beta \leq \beta^*$ 이면 최적 재고정책은 판매손실이 없게 하거나, 재고를 갖지 않고 모든 수요를 상실하는 것 중에 비용이 적게 드는 쪽이다.

5. 구매종속성을 고려한 2-품목 부분 부재고 EOQ 모형

구매종속성이 존재할 때, 한 품목의 구매는 다른 품목의 가용성에 의존할 수 있다. 고객은 한 주문에 한 개 또는 두 개의 품목을 요구할 수 있다. 한 주문에서 요구된 모든 품목들은 한 번의 배송으로 모두 함께 빠른 시간 내에 전달되어야 한다. 고객은 모든 품목을 함께 구매하기를 원하기 때문에 한 품목이라도 재고로 보유하고 있지 않으면 비록 다른 품목이 재고로 있다고 하더라도 상황은 모든 품목이 재고 부족인 것과 같다.

만약 일부 고객들이 그들의 수요에 대해 부재고를 허용하여 다음 재고 보충 때까지 기꺼이 기다려 준다면 재고에 대한 의사결정은 부분 부재고 EOQ 모형에 의해 결정될 수 있다. 이러한 상황에서 재고로 존재하는 품목에 대한 수요는 재고부족인 다른 품목에 의해 영향을 받을 것이다. 따라서 효과적인 재고관리를 통하여 총 재고비용을 최소화하기 위해서는 두 품목에 대한 공동의 재고정책을 추구하여야 한다. 이 문제를 모형화하기 위해 본 논문은 다음과 같은 사항을 가정한다.

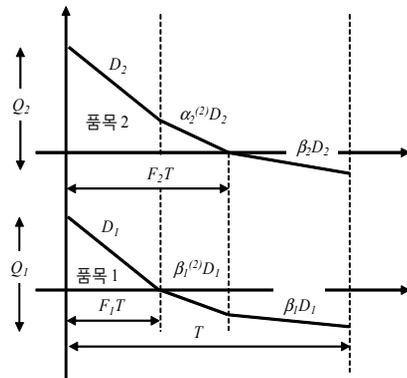
1. 모든 모수는 알려져 있고, 무한의 시간 축 상에서 상수이다.
2. 재고 보충은 조달기간이 0으로 즉시 이루어진다.
3. 주문비용은 주문의 크기와는 상관없이 항상 일정하다.
4. 부재고가 발생할 때, 재고로 존재하는 품목은 즉시 조달되고, 재고부족인 품목은 다음 보충에 의해 채워진다.
5. 정규적인 의사소통이나 일정계획 수립을 쉽게 하기 위해서 모든 품목에 동일한 주문주기를 사용한다.

주문주기 동안에 재고수준과 수요와의 관계는 <그림 2>와 같이 보여질 것이다. 여기서 품목들의 재고부족이 발생했을 때, 품목들의 재고와 부재고 수준은 서로 영향을 준다. 품목들의 주문량은 다음의 식에 의해 계산된다.

$$Q_1 = D_1 F_1 T + \beta_1^{(2)} D_1 (F_2 - F_1) T + \beta_1 D_1 (1 - F_2) T \quad (6)$$

$$Q_2 = D_2 F_1 T + \alpha_2^{(2)} D_2 (F_2 - F_1) T + \beta_2 D_2 (1 - F_2) T$$

여기서 $\beta_1^{(2)}$ 는 품목 2의 재고를 유지하고 있을 때, 품목 1의 부재고율이고, $\alpha_2^{(2)}$ 은 품목 2의 수요 변화율이다. <그림 2>에서 보면 품목은 $F_1 \leq F_2$ 이 되도록 배열되어 있음을 알 수 있다.



<그림 2> 2-품목 부분 부재고 EOQ 모형의 재고수준

5.1 부재고율과 수요변화율

<그림 2>에서 품목 1에 대한 재고가 부족할 때, 품목 2의 수요율은 품목 2가 재고로 존재하는 동안의 수요율에 $\alpha_2^{(2)}$ 를 곱한 것만큼 변경된다. 수요변화율 $\alpha_2^{(2)}$ 를 계산하기 위해서 품목 2의 수요를 자세히 살펴보면, 품목 2의 수요가 자체적인 독립수요와 품목 1과 결합된 수요로 구성되어 있음을 알 수 있다. 다시 말하면, 고객은 오직 품목 2만 주문하거나, 또는 품목 1과 2를 같이 주문할 수 있다. 품목 2만 주문한 독립수요는 품목 1의 재고수준에 영향을 받지 않는다.

<표 3>은 4가지의 재고상황과 3가지의 주문유형으로 조합된 12가지의 주문사례를 보여준다. 비율 p_i 는 전체 주문에서 주문사례 i 가 차지하는 부분을 나타내고, b_i 는 주문사례 i 의 부재고율이다. 여기서 일부 주문사례는 부재고가 발생하지 않는다(즉, b_1, b_2, b_3, b_4, b_8). 이 경우 본 논문은 $b_i=1$ 로 놓았다. 부재고율 $\beta_1, \beta_2, \beta_1^{(2)}$ 과 수요변화율 $\alpha_2^{(2)}$ 는 가중평균을 이용하여 다음과 같이 구한다.

<표 3> 주문사례

주문 사례	재고상황		주문상황		비율	부재고율
	품목 1	품목 2	품목 1	품목 2		
1	Y	Y	1	0	p_1	$b_1 = 1$
2	Y	Y	0	1	p_2	$b_2 = 1$
3	Y	Y	1	1	p_3	$b_3 = 1$
4	Y	N	1	0	p_4	$b_4 = 1$
5	Y	N	0	1	p_5	b_5
6	Y	N	1	1	p_6	b_6
7	N	Y	1	0	p_7	b_7
8	N	Y	0	1	p_8	$b_8 = 1$
9	N	Y	1	1	p_9	b_9
10	N	N	1	0	p_{10}	b_{10}
11	N	N	0	1	p_{11}	b_{11}
12	N	N	1	1	p_{12}	b_{12}

$F_1 \leq F_2$ 일 때,

$$\beta_1 = \frac{p_{10}b_{10} + p_{12}b_{12}}{p_{10} + p_{12}} \quad (7)$$

$$\beta_2 = \frac{p_{11}b_{11} + p_{12}b_{12}}{p_{11} + p_{12}}$$

$$\beta_1^{(2)} = \frac{p_7b_7 + p_9b_9}{p_7 + p_9}$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{p_8b_8 + p_9b_9}{p_8 + p_9} = \frac{p_8 + p_9b_9}{p_8 + p_9}$$

다른 경우에는 품목 1과 2를 교환하여

$$\beta_1 = \frac{p_{11}b_{11} + p_{12}b_{12}}{p_{11} + p_{12}}$$

$$\beta_2 = \frac{p_{10}b_{10} + p_{12}b_{12}}{p_{10} + p_{12}}$$

$$\beta_1^{(2)} = \frac{p_5b_5 + p_6b_6}{p_5 + p_6}$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{p_4b_4 + p_6b_6}{p_4 + p_6} = \frac{p_4 + p_6b_6}{p_4 + p_6}$$

5.2 부분 부재고 EOQ 모형 ($0 \leq F_1 \leq F_2 \leq 1$)

<그림 2>로부터 단위 시간당 평균비용은 다음이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T(T; F_1, F_2) = & \frac{C_{o1}}{T} + \frac{C_{h1}D_1TF_1^2}{2} \quad (9) \\
 & + \frac{\beta_1^{(2)}C_{b1}C_1T(F_2F_1)^2}{2} + \frac{\beta_1C_{b1}D_1T(1-F_2)^2}{2} \\
 & + b_1^{(2)}C_{b1}D_1T(F_2-F_1)(1-F_2) \\
 & + C_{h1}D_1[(1-F_1) - \beta_1^{(2)}(F_2-F_1) \\
 & - \beta_1(1-F_2)] + \frac{C_{o2}}{T} + \frac{C_{h2}D_2TF_1^2}{2} \\
 & + \alpha_2^{(2)}C_{h2}D_2T(F_2-F_1)F_1 \\
 & + \frac{\alpha_2^{(2)}C_{h2}D_2T(F_2-F_1)^2}{2} \\
 & + \frac{\beta_2C_{b2}D_2T(1-F_2)^2}{2} \\
 & + C_{h2}D_2[(1-F_1) - \alpha_2^{(2)}(F_2-F_1) \\
 & - \beta_2(1-F_2)]
 \end{aligned}$$

식 (9)의 단위 시간당 평균 비용을 단순화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Gamma(T, F_1, F_2) = & \frac{G_{01}}{T} + G_{11}TF_1^2 - 2G_{12}TF_1 - G_{13}F_1 \quad (10) \\ & + G_{21}TF_2^2 + 2G_{22}TF_2 - G_{23}F_2 \\ & + G_{02}T + G_{03} \end{aligned}$$

식 (10)에 사용된 치환변수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} G_{01} &= C_{o1} + C_{o2} \\ G_{11} &= \frac{C_{h1}D_1 + C_{h2}D_2 + \beta_1^{(2)}C_{b1}D_1 - \alpha_2^{(2)}C_{h2}D_2}{2} \\ G_{12} &= \frac{\beta_1^{(2)}C_{b1}D_1}{2} \\ G_{13} &= C_{h1}D_1(1 - \beta_1^{(2)}) + C_{h2}D_2(1 - \alpha_2^{(2)}) \\ G_{21} &= \frac{(\beta_1 - \beta_1^{(2)})C_{b1}D_1 + \beta_2C_{b2}D_2 + \alpha_2^{(2)}C_{h2}D_2}{2} \\ G_{22} &= \frac{(\beta_1 - \beta_1^{(2)})C_{b1}D_1 + \beta_2C_{b2}D_2}{2} \\ G_{23} &= C_{h1}D_1(\beta_1^{(2)} - \beta_1) + C_{h2}D_2(\alpha_2^{(2)} - \beta_2) \\ G_{02} &= \frac{\beta_1C_{b1}D_1 + \beta_2C_{b2}D_2}{2} \\ G_{03} &= C_{h1}D_1(1 - \beta_1) + C_{h2}D_2(1 - \beta_2) \end{aligned}$$

결국, 본 절에서 다루는 문제는 다음과 같이 묘사될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{P1} \quad & \text{minimize} \quad \Gamma(T, F_1, F_2) \\ & \text{subject to} \quad T > 0 \text{ and } 0 \leq F_1 \leq F_2 \leq 1 \end{aligned}$$

5.2.1 해법 절차

라그랑지 승수이론(theory of Lagrange multiplier)으로부터 다음의 함수를 얻을 수 있다(최소화 문제를 최대화 문제로 전환하였음).

$$\begin{aligned} L(T, F_1, F_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & -\frac{G_{01}}{T} - G_{11}TF_1^2 \quad (11) \\ & + 2G_{12}TF_1 + G_{13}F_1 - G_{21}TF_2^2 + 2G_{22}TF_2 \\ & + G_{23}F_2 - G_{02}T - G_{03} + \lambda_1(-F_1) \\ & + \lambda_2(F_2 - F_1) + \lambda_3(1 - F_2) \end{aligned}$$

여기서 λ_i 는 라그랑지 승수이다. 그러면 최적화 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{G_{01}}{T^2} - G_{11}F_1^2 + 2G_{12}F_1 - G_{21}F_2^2 + 2G_{22}F_2 - G_{02} &= 0 \quad (12) \\ -2G_{11}TF_1 + 2G_{12}T + G_{13} - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ -2G_{21}TF_2 + 2G_{22}T + G_{23} - \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1(-F_1) &= 0 \\ \lambda_1(F_2 - F_1) &= 0 \\ \lambda_3(1 - F_2) &= 0 \\ 0 \leq F_1 \leq F_2 \leq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

일반적으로 식 (12)을 풀기 위해서 우리는 complementarity에 주목한다. 즉, $\lambda_i = 0$ 이거나 대응하는 괄호 안의 식이 0이다. 여기서는 3개의 complementarity 조건이 있으므로, 우리가 살펴봐야 할 체크 포인트는 다음과 같이 8개이다.

체크 포인트 1 : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{A}{B}} \\ A &= G_{01} - \frac{G_{12}^2}{4G_{11}} - \frac{G_{23}^2}{4G_{21}}, \\ B &= G_{02} - \frac{G_{12}^2}{G_{11}} - \frac{G_{22}^2}{G_{21}} \\ F_1 &= \frac{2G_{12}T + G_{13}}{2G_{11}T}, \quad F_2 = \frac{2G_{22}T + G_{23}}{2G_{21}T} \end{aligned}$$

체크 포인트 2 : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, F_2 = 1$

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{A}{B}} \\ A &= G_{01} - \frac{G_{13}^2}{4G_{11}}, \quad B = G_{02} - \frac{G_{12}^2}{G_{11}} + G_{21} - 2G_{22} \\ F_1 &= \frac{2G_{12}T + G_{13}}{2G_{11}T}, \\ \lambda_3 &= -2G_{21}T + 2G_{22}T + G_{23} = 0 \end{aligned}$$

체크 포인트 3 : $\lambda_1 = 0, F_1 = F_2 = F, \lambda_3 = 0$

$$T = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$A = G_{01} - \frac{(G_{13} + G_{23})^2}{4(G_{11} + G_{21})},$$

$$B = G_{02} - \frac{(G_{12} + G_{22})^2}{G_{11} + G_{21}}$$

$$F = \frac{2(G_{12} + G_{22})T + (G_{13} + G_{23})}{2(G_{11} + G_{21})T}$$

$$\lambda_2 = -2G_{11}TF + 2G_{12}T + G_{13}$$

체크 포인트 4 : $\lambda_1 = 0, F_1 = F_2, F_2 = 1$

$$T = \sqrt{\frac{A}{B}}, A = G_{01},$$

$$B = G_{02} + (G_{11} + G_{21}) - 2(G_{12} + G_{22})$$

$$\lambda_2 = -2G_{11}TF + 2G_{12}T + G_{13},$$

$$\lambda_3 = -2G_{21}T + 2G_{22}T + G_{23} + \lambda_2$$

체크 포인트 5 : $F_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

$$T = \sqrt{\frac{A}{B}}, A = G_{01} - \frac{G_{23}^2}{4G_{21}}, B = G_{02} - \frac{G_{22}^2}{G_{21}}$$

$$F_2 = \frac{2G_{22}T + G_{23}}{2G_{21}T}, \lambda_1 = 2G_{12}T + G_{13}$$

체크 포인트 6 : $F_1 = 0, \lambda_2 = 0, F_2 = 1$

$$T = \sqrt{\frac{A}{B}}, A = G_{01}, B = G_{02} + G_{21} - 2G_{22}$$

$$\lambda_1 = 2G_{12}T + G_{13}, \lambda_3 = -2G_{21}T + 2G_{22}T + G_{23}$$

체크 포인트 7 : $F_1 = 0, F_1 = F_2, \lambda_3 = 0$

$$T = \sqrt{\frac{A}{B}}, A = G_{01}, B = G_{02}$$

$$\lambda_1 = 2G_{12}T + G_{13} - \lambda_2, \lambda_2 = -2G_{22}T - G_{23}$$

체크 포인트 8 : $F_1 = 0, F_1 = F_2, F_3 = 1$: 불가능해(infeasible).

8개의 체크 포인트에서 가능한 해를 생성하는 경우에 대하여 식 (10)의 단위 시간당 평균비용을 계산한다. 그 중 최소의 값을 최선의 해로 선택한다.

다음으로 품목의 순서를 바꿔서 위의 해법절차를 반복한다. 최종적으로 2개의 최선의 해를 비교하여 단위 시간당 평균비용을 최소화하는 것이 전체 최적해가 된다.

6. 구매종속성을 고려한 다품목 부분 부재고 EOQ 모형

이 장에서는 구매종속성이 존재할 때, 제 5장에서 다룬 2-품목 EOQ 모형을 다품목 부분 부재고 EOQ 모형으로 확장한다. 비록 <그림 2>가 2-품목에 대해서 주문주기 동안에 재고수준과 수요와의 관계를 보여주지만, k -품목에 대한 그림도 유사할 것이라는 것을 쉽게 상상할 수 있을 것이다. 여기서 $F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_i \leq \dots \leq F_k$ 라는 것을 주지하고, 품목 j 에 대한 주문량은 다음과 같이 계산된다.

$$Q_j = D_j F_1 T + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_j^{(k-i+1)} (F_{i+1} - F_i) D_j T$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-j} \beta_j^{(i+1)} (F_{k-i+1} - F_{k-i}) D_j T + \beta_j (1 - F_k) D_j T$$

품목의 충족율에 대한 가정 때문에 발생 가능한 품목의 순서는 $k!$ 가지이다. 전체 최적해를 찾기 위해서는 각 품목의 순서에 대해서 해법절차를 반복해야 한다. 만약 품목의 수가 많다면 모든 품목의 순서에 대해서 해법절차를 반복한다는 것이 현실적이지 못할 수 있다. 하지만, 실제 현장 경험에 의하면, 구매종속성의 특성을 갖는 품목들의 그룹의 수는 많이 있을 수 있지만, 대부분의 그룹은 3개나 4개 정도의 품목만을 포함하고 있었다. 가장 큰 것이 6개였다[1].

k -품목에 대한 단위 시간당 평균비용은 다음과 같이 확장될 수 있다.

$$\Gamma(T, F_1, F_2, \dots, F_k) = \frac{G_{01}}{T} + \sum_{i=1}^k (G_{11}TF_i^2 - 2G_{12}TF_i - G_{13}F_i) + G_{02}T + G_{03} \quad (13)$$

식 (13)에 사용된 치환변수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} G_{01} &= \sum_{i=1}^k C_{oi} \\ G_{11} &= \frac{1}{2} \left(C_{h1} D_1 + \sum_{i=2}^k (1 - \alpha_i^{(k)}) C_{hi} D_i + \beta_1^{(k)} C_{b1} D_1 \right) \\ G_{j1} &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{j-1} (\beta_i^{(k-j+1)} - \beta_i^{(k-j+2)}) C_{bi} D_i + \beta_j^{(k-j+1)} \\ C_{bj} D_j + \alpha_j^{(k-j+2)} C_{hj} D_j + \sum_{i=j+1}^k \\ (\alpha_i^{(k-j+2)} - \alpha_i^{(k-j+1)}) C_{hi} D_i \end{array} \right), \end{aligned}$$

$2 \leq j < k$

$$\begin{aligned} G_{k1} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (\beta_1 - \beta_i^{(2)}) C_{bi} D_i + \beta_k C_{bk} D_k + \alpha_k^{(2)} C_{hk} D_k \right) \\ G_{12} &= \frac{1}{2} (\beta_1^{(k)} C_{b1} D_1) \\ G_{j2} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{j-1} (\beta_i^{(k-j+1)} - \beta_i^{(k-j+2)}) C_{bi} D_i + \beta_j^{(k-j+1)} C_{bj} D_j \right), \end{aligned}$$

$2 \leq j < k$

$$\begin{aligned} G_{k2} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (\beta_i - \beta_i^{(2)}) C_{bi} D_i + \beta_k C_{bk} D_k \right) \\ G_{13} &= (1 - \beta_1^{(k)}) C_{b1} D_1 + \sum_{i=2}^k (1 - \alpha_i^{(k)}) C_{bi} D_i \\ G_{j3} &= \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{j-1} (\beta_i^{(k-j+2)} - \beta_i^{(k-j+1)}) C_{bi} D_i \\ + (\alpha_j^{(k-j+2)} - \beta_j^{(k-j+1)}) C_{bj} D_j \\ + \sum_{i=j+1}^k (\alpha_i^{(k-j+2)} - \alpha_i^{(k-j+1)}) C_{hi} D_i \end{array} \right), \quad 2 \leq j < k \end{aligned}$$

$$G_{k3} = \sum_{i=1}^{k-1} (\beta_i^{(2)} - \beta_i) C_{bi} D_i + (\alpha_k^{(2)} - \beta_k) C_{bk} D_k$$

$$G_{02} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \beta_i C_{bi} D_i \right)$$

$$G_{03} = \sum_{i=1}^k C_{bi} D_i (1 - \beta_i)$$

따라서 k -품목에 대한 문제는 다음과 같이 요약될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{P2 minimize} \quad & \Gamma(T, F_1, F_2, \dots, F_k) \\ \text{subject to} \quad & T > 0 \text{ and } 0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_k \leq 1 \end{aligned}$$

P1과 유사하게, 라그랑지 함수를 다음과 같이 얻을

수 있다(최소화 문제를 최대화 문제로 전환하였음).

$$\begin{aligned} L(T, F_1, F_2, \dots, F_k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}) \quad (14) \\ = -\frac{G_{01}}{T} - \sum_{i=1}^k (G_{i1} T F_i^2 - 2G_{i2} T F_i - G_{i3} F_i) \\ - G_{02} T - G_{03} + \lambda_1 (-F_1) + \sum_{i=2}^k \lambda_i (F_i - F_{i-1}) \\ + \lambda_{k+1} (1 - F_k) \end{aligned}$$

여기서 λ_i 는 라그랑지 승수이다. 그러면 최적화 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{G_{01}}{T^2} - \sum_{i=1}^k (G_{i1} F_i^2 - 2G_{i2} F_i) - G_{02} &= 0 \quad (15) \\ -2G_{11} T F_1 + 2G_{12} T + G_{13} - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ -2G_{i1} T F_i + 2G_{i2} T + G_{i3} + \lambda_i - \lambda_{i+1} &= 0, \quad i=2, \dots, k \\ \lambda_1 (-F_1) &= 0 \\ \lambda_i (F_i - F_{i-1}) &= 0, \quad i=2, \dots, k \\ \lambda_{k+1} (1 - F_k) &= 0 \\ 0 \leq F_1 \leq \dots \leq F_k \leq 1 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

식 (15)에는 $k+1$ 개의 complementarity 조건이 있다. 따라서 우리는 2^{k+1} 개의 체크 포인트들을 검토하여야 한다. 각 체크 포인트에 대하여 F_i 와 λ_i 는 쉽게 구할 수 있다. 그러나 주문주기 T 를 구하기 위해서는 복잡한 대수학적 연산을 수행하여야 한다. 주문주기 T 는 다음과 같이 구할 수 있다.

J_j 를 같은 F_i 의 값을 갖는 j 번째 그룹이라고 하자. 예를 들어, 3가지의 품목을 다루는 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, F_2 = F_3, \lambda_4 = 0$ 경우에는 2개의 그룹이 있다: $J_1 = \{F_1\}$ 과 $J_2 = \{F_2, F_3\}$. 각 그룹 J_j 에 대해서

$$G'_{il} = \sum_{j \in J_j} G_{jl}, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad l=1, 2, 3$$

$$\text{그러면 } T = \sqrt{\frac{A}{B}},$$

$$A = G_{01} - \sum_{j=1}^J \frac{(G'_{j3})^2}{4G'_{j1}} I_j$$

$$B = G_{02} - \sum_{i=1}^J \frac{(G'_{j2})^2}{G'_{j1}} I_j + \sum_{j=1}^J (G'_{j1} - 2G'_{j2}) \delta_j$$

$$I_j = \begin{cases} 0 & \text{if the value of } J_j = 0 \text{ or } 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 0 & \text{if the value of } J_j = 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

3가지의 품목을 다루는 문제에 대해서 몇 가지 체크 포인트의 예를 <표 4>에서 보여준다.

요약하면, k 품목을 다루는 문제에서 가능한 품목의 순서는 모두 k!이다. 각 품목의 순서에 대해서 검토하여 할 체크 포인트의 수는 2^{k+1}이다. 우선 각 품목의 순서에 대해서 최선의 해를 구한다. 그리고 최선의 해 중에서 가장 좋은 것을 선택하면 그것이 전체 최적해이다.

본 논문은 제 1장에서 교차판매효과는 구매종속성의 특수한 경우라고 언급하였다. 교차판매효과를 고려한 부분 부재고 문제의 평균비용은 F₂ = F₃ = ...

= F_k = 1로 설정된 식 (13)으로 표현될 수 있다. 이것은 교차판매효과를 고려한 부분 부재고 문제를 F₂ = F₃ = ... = F_k = 1라 설정한 구매종속성을 고려한 부분 부재고 문제로 해결할 수 있다는 것을 의미한다. 그러나 본 논문의 모형을 Zhang et al.[28]과 Zhang [27]이 제시한 모형과 직접적으로 비교할 수는 없다. 그 이유는 서로 다른 가정을 사용하여 모형을 설계하였기 때문이다. 즉, 본 논문에서는 부재고가 발생할 때 재고로 존재하는 품목은 즉시 조달되며 재고 부족인 품목은 다음 보충에 의해 채워진다고 가정한다. 그러나 Zhang et al.[28]과 Zhang[29]은 미충족 되었던 주요품목의 수요가 재고 보충 시점에 만족될 때, 교차판매효과에 의해 발생한 하위 품목의 판매수량이 순간적으로 팔린다고 가정한다.

한 가지 더 주목할 점은 β_i^(·) = β_i와 α_i^(·) = 1과 같이 설정하면, 구매종속성을 고려한 부분 부재고

<표 4> 체크 포인트의 예

체크 포인트	해(Solution)
λ ₁ = 0, λ ₂ = 0, λ ₃ = 0, λ ₄ = 0	$F_1 = \frac{2G_{12}T + G_{13}}{2G_{11}T}, \quad F_2 = \frac{2G_{22}T + G_{23}}{2G_{21}T}, \quad F_3 = \frac{2G_{32}T + G_{33}}{2G_{31}T}$ $T = \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad A = G_{01} - \frac{G_{13}^2}{4G_{11}} - \frac{G_{23}^2}{4G_{21}} - \frac{G_{33}^2}{4G_{31}}, \quad B = G_{02} - \frac{G_{12}^2}{G_{11}} - \frac{G_{22}^2}{G_{21}} - \frac{G_{32}^2}{G_{31}}$
λ ₁ = 0, λ ₂ = 0, F ₂ = F ₃ = F, λ ₄ = 0	$F_1 = \frac{2G_{12}T + G_{13}}{2G_{11}T}, \quad F = \frac{2(G_{22} + G_{32})T + (G_{23} + G_{33})}{2(G_{21} + G_{31})T}, \quad \lambda_3 = -2G_{21}TF + 2G_{22}T + G_{23}$ $T = \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad A = G_{01} - \frac{G_{13}^2}{4G_{11}} - \frac{(G_{23} + G_{33})^2}{4(G_{21} + G_{31})}, \quad B = G_{02} - \frac{G_{12}^2}{G_{11}} - \frac{(G_{22} + G_{32})^2}{(G_{21} + G_{31})}$
λ ₁ = 0, λ ₂ = 0, F ₂ = 1, F ₃ = 1	$F_1 = \frac{2G_{12}T + G_{13}}{2G_{11}T}, \quad \lambda_3 = -2G_{21}T + 2G_{22}T + G_{23}, \quad \lambda_4 = -2G_{31}T + 2G_{32}T + G_{33} + \lambda_3$ $T = \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad A = G_{01} - \frac{G_{13}^2}{4G_{11}}, \quad B = G_{02} - \frac{G_{12}^2}{G_{11}} + (G_{21} + G_{31}) - 2(G_{22} + G_{32})$
λ ₁ = 0, F ₁ = F ₂ = F, λ ₃ = 0, F ₃ = 1	$F = \frac{2(G_{12} + G_{22})T + (G_{13} + G_{23})}{2(G_{11} + G_{21})T}, \quad \lambda_2 = -2G_{11}TF + 2G_{12}T + G_{13},$ $\lambda_4 = -2G_{31}T + 2G_{32}T + G_{33}$ $T = \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad A = G_{01} - \frac{(G_{13} + G_{23})^2}{4(G_{11} + G_{21})}, \quad B = G_{02} - \frac{(G_{12} + G_{22})^2}{G_{11} + G_{21}} + G_{31} - 2G_{32}$
F ₁ = 0, λ ₂ = 0, F ₂ = F ₃ = F, λ ₄ = 0	$F = \frac{2(G_{22} + G_{32})T + (G_{23} + G_{33})}{2(G_{21} + G_{31})T}, \quad \lambda_1 = 2G_{12}T + G_{13}, \quad \lambda_3 = -2G_{21}TF + 2G_{22}T + G_{23}$ $T = \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad A = G_{01} - \frac{(G_{23} + G_{33})^2}{4(G_{21} + G_{31})}, \quad B = G_{02} - \frac{(G_{22} + G_{32})^2}{G_{21} + G_{31}}$

모형이 독립적인 부분 부재고 모형과 같아진다는 것이다. 앞의 설정은 다른 품목들의 재고상황이 수요에 미치는 영향을 제거하는 효과를 가져온다.

7. 수리적 분석

7.1 수리적 예제

구매중속성이 존재할 때 부분 부재고 EOQ 모형이 어떻게 적용되는지를 보여주기 위해서 본 논문은 2-품목으로 구성된 예제를 이용한다. 수리적 예제에 사용된 모수는 <표 5>에서 보여준다(품목 1과 2를 사용). 부재고율과 수요변화율에 대해 다음과 같이 가정한다: $F_1 \leq F_2$ 인 경우, $\beta_1 = 0.75$, $\beta_2 = 0.80$ 과 $\beta_1^{(2)} = 0.85$, $\alpha_2^{(2)} = 0.90$. 다른 경우에는 $\alpha_1^{(2)} = 0.90$, $\beta_2^{(2)} = 0.85$.

<표 5> 예제에 사용한 모수

모수	품목		
	1	2	3
D_i	2000	300	1000
C_{oi}	650	1000	600
C_{hi}	42	350	35
C_{bi}	12	100	10
C_{li}	12	105	15

<표 6>은 2가지 품목의 순서에서 각 체크 포인트에 대한 결과를 요약해 보여 주고 있다. 최선의 해는 체크 포인트 3($F_1 \leq F_2$ 일 때)과 체크 포인트 1($F_1 \geq F_2$ 일 때)이다. 이 중에 체크 포인트 1이 단위 시간당 평균비용을 최소로 발생하므로 전체 최적해이다. 주문량은 식 (6)에 의해 $Q_1 = 468.27$, $Q_2 = 72.76$ 이다.

7.2 부재고율에 따른 최적정책에 관한 분석

부재고율이 달라짐에 따라 최적정책이 어떻게 영향을 받는지 검토하기 위해서 본 논문은 부재고율을 변화시켜가며 3-품목 EOQ 모형의 결과를 살펴본다(<표 5> 사용). <그림 3>은 β_1 과 β_2 의 조합($\beta_3 = 0.7$ 로 고정)에 따라 단위 시간당 평균비용, 주문기간, 그리고 총족율들의 최적 값의 등고선을 보여준다. 여기서 본 논문은 각 단계별로 부재고율과 수요변화율이 0.05씩 증가하는 것으로 가정한다. 부재고율에 대한 등고선들의 일반적인 형태를 알아보기 위해서 본 논문은 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ 와 같이 설정하고 <그림 4>에 부재고율에 따라서 단위 시간당 최적 평균비용, 최적 총족율, 그리고 최적 주문주기의 변화곡선을 그린다.

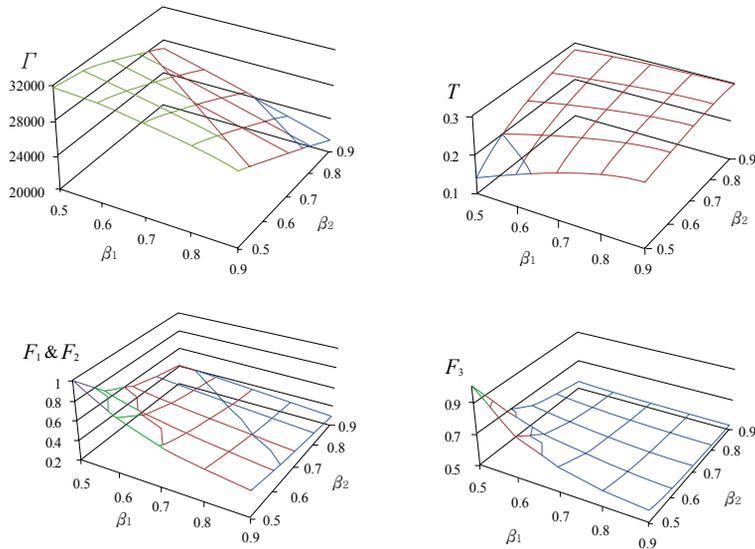
<표 6> 2-품목에 대한 해법절차

		체크 포인트						
		1	2	3	4	5	6	7
$F_1 \leq F_2$	T	0.28	0.16	0.28	0.13	0.28	0.17	0.28
	F_1	0.39	0.54	0.37	1.00	0.00	0.00	0.00
	F_2	0.36	1.00	0.37	1.00	0.36	1.00	0.00
	λ_1	0.00	0.00	0.00	0.00	12516.36	10207.22	24072.85
	λ_2	0.00	0.00	495.75	-5736.99	0.00	0.00	-11604.61
	λ_3	0.00	-9714.58	0.00	-12673.99	0.00	-10465.07	0.00
	Γ	Infeasible	Infeasible	19597.47	Infeasible	22003.44	Infeasible	Infeasible
$F_1 \geq F_2$	T	0.28	0.17	0.28	0.13	0.28	0.18	0.28
	F_1	0.38	1.00	0.37	1.00	0.38	1.00	0.00
	F_2	0.37	0.48	0.37	1.00	0.00	0.00	0.00
	λ_1	0.00	0.00	0.00	0.00	14204.30	11732.04	24072.85
	λ_2	0.00	0.00	-202.88	-7859.39	0.00	0.00	-9800.05
	λ_3	0.00	-8013.94	0.00	-12673.99	0.00	-8483.51	0.00
	Γ	19596.13	Infeasible	Infeasible	Infeasible	22212.26	Infeasible	Infeasible

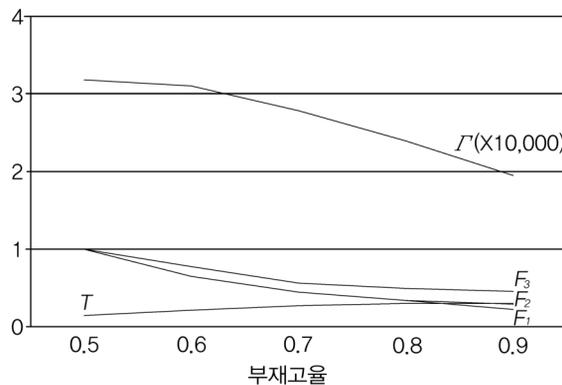
<그림 3>과 <그림 4>로부터 단위 시간당 최적 평균비용은 부재고율이 증가함에 따라 단조롭게 감소하는 것을 관찰할 수 있다. 이것은 더 많은 고객이 기꺼이 기다려주어 그들의 수요에 대해 부재고를 허용하면 할수록, 더 많은 이익이 실현될 수 있다는 것을 의미한다. 또한 <그림 4>는 부재고율이 적다면 최적정책은 부재고를 허용하지 않고 수요를 만족시키는 것 (즉, $F^* = 1$)임을 보여준다. 반면에 부재고율이 임계값 보다 더 크다면 최적정책은 부분 부재고를 고려하여 수요를 만족시키는 것이다.

7.3 부재고율을 구하는 방법에 대한 고찰

주문사례 i 의 부재고율 b_i 을 결정하는 방법에는 여러 가지가 있을 수 있겠지만, 본 논문에서는 다음의 3가지 방법을 고려한다. 방법 1은 재고상황과 주문 유형의 조합으로 발생 가능한 모든 주문사례를 고려한다. 그리고 주문사례 i 의 부재고율 b_i 을 판매실적 자료로부터 구한다. <표 3>은 2-품목에 대한 예제를 보여준다. 방법 2는 판매실적 자료로부터 각 주문 유형에 대한 평균 부재고율을 계산한다. 그러면 <표



<그림 3> 최적의 평균비용, 주문기간, 그리고 충족율의 등고선



<그림 4> 부재고율에 따른 최적결정

〈표 7〉 세 가지 방법에 대한 비교

방법	비유사도 = 0.3					비유사도 = 0.5					비유사도 = 0.8				
	T	F ₁	F ₂	F ₃	Γ	T	F ₁	F ₂	F ₃	Γ	T	F ₁	F ₂	F ₃	Γ
1	0.26	0.50	0.50	0.50	29103.74	0.26	0.49	0.49	0.49	28935.54	0.27	0.48	0.48	0.48	28570.57
2	0.27	0.45	0.45	0.45	29145.78	0.28	0.45	0.45	0.45	28967.43	0.28	0.45	0.45	0.45	28585.99
3	0.28	0.45	0.45	0.45	29151.24	0.28	0.45	0.45	0.45	28974.92	0.28	0.44	0.44	0.44	28593.24

3>에서 $b_7 = b_{10}$, $b_5 = b_{11}$, $b_6 = b_9 = b_{12}$ 된다. 방법 3은 판매실적 자료로부터 모든 주문사례에 대한 전체 평균 부재고율 \bar{b} 을 계산한다.

세 가지 방법을 비교하기 위해서 본 논문은 각 방법을 사용했을 때 3-품목 EOQ 모형의 성과가 어떻게 나타나는지를 검토한다(<표 5> 사용). $8 (= 2^3)$ 가지의 재고상황과 $7 (= {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3)$ 가지의 주문유형이 있으므로 주문사례는 56가지가 가능하다. 주문사례 i 의 부재고율 b_i 에는 0.65와 0.75 사이의 값을 할당하며, 전체 평균 부재고율은 0.7이 된다. 주문사례 i 의 비율 p_i 는 비유사도에 따라서 할당한다(이 부분에 대해서는 제 7.4절에서 자세히 설명한다).

<표 7>은 각 방법에 대한 최적 재고정책을 보여준다. 또한, 방법 1이 모든 가능한 주문사례를 직접적으로 고려하므로 가장 정확한 부재고율 b_i 을 구한다고 가정하고, <표 7>은 다른 방법에 의한 증가된 단위 시간당 평균비용을 보여준다. 여기서 증가된 비용은 간소화된 정보를 사용함에 따른 대가라고 생각할 수 있다. 증가된 비용이 그다지 많지 않다고 사료되어 다음 제 7.4절에서는 방법 3을 이용한다.

7.4 구매종속성의 영향

본 절은 재고운영비용에 미치는 구매종속성의 영향을 보여줌으로써 구매종속성을 고려하는 것이 재고관리에 얼마나 중요한가를 입증하고자 한다. 구매종속성의 영향은 구매종속성을 무시한 재고 모형의 결과와 구매종속성을 고려한 재고 모형의 결과를 비교함으로써 보여줄 수 있을 것이다. 다시 <표 5>에 있는 3-품목 EOQ 모형을 이용한다. 고객 주문은 <표 8>에서 보여주는 바와 같이 7가지의 주문유형으로 구성되었다고 가정한다. 여기서 본 논문은 모든

재고상황에서 각 주문유형에 대한 발생 비율이 같은 값을 유지한다고 가정한다.

〈표 8〉 3-품목에 대한 주문유형

주문유형	품목			비율
	1	2	3	
1	1			q_1
2		1		q_2
3			1	q_3
4	1	1		q_4
5	1		1	q_5
6		1	1	q_6
7	1	1	1	q_7

다양한 구매종속성의 정도에 대해서 전체 평균 부재고율을 0.6에서 0.1씩 0.9까지 증가시켜가면서 구매종속성을 고려한 재고 모형과 구매종속성을 무시한 재고 모형에 의해 결정된 최적 재고정책을 비교한다.

구매종속성을 무시한 다품목 부분 부재고 재고 모형은 여러 개의 단일 품목 부분 부재고 EOQ 모형을 독립적으로 더하여 유도할 수 있다. 단위 시간당 평균 비용은 다음과 같이 표현된다.

$$\Gamma(T, F_1, F_2, \dots, F_k) = \sum_{i=1}^k \left[\frac{C_{oi}}{t} + \frac{C_{hi}D_i T F_i^2}{2} + \frac{\beta_i C_{bi} D_i T (1-F_i)^2}{2} + C_{li} D_i (1-\beta_i)(1-F_i) \right] \quad (16)$$

식 (16)을 F_i 에 대해 일차 편미분하여 0으로 놓으면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$F_i^* = \frac{(1-\beta_i)C_{li} + \beta_i C_{bi} T^*}{T^* (C_{hi} + \beta_i C_{bi})}, \quad i=1, 2, \dots, k \quad (17)$$

주문주기 T 는 식 (16)을 T 에 대해 일차 편미분 하고, 식 (17)을 대입하여 0으로 놓으면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^k C_{oi} - \sum_{i=1}^k \frac{D_i(1-\beta_i)^2 C_{hi}^2}{C_{hi} + \beta_i C_{bi}}}{\sum_{i=1}^k \frac{D_i \beta_i C_{hi} C_{bi}}{C_{hi} + \beta_i C_{bi}}}} \quad (18)$$

구매종속성의 정도에 따른 구매종속성의 영향을 살펴보기 위해서 본 논문에서는 구매종속성의 정도를 측정하는 척도로서 Tsai et al.[21]이 제안한 비유사도(dissimilarity) 개념을 이용한다. 연관성 군집 알고리즘을 개발하면서 Tsai et al.[21]은 비유사도를 (1-지지도)로 정의 하였다. 지지도는 데이터 마이닝 기법의 한 유형인 연관성 규칙에 의해 정의된다. 품목그룹 X 의 지지도는 주문 데이터베이스에서 품목그룹 X 를 포함하고 있는 주문의 비율로 정의된다. 즉, 품목그룹 X 의 지지도는 |품목그룹 X | / |주문 데이터베이스|와 같다, 여기서 |품목그룹 X |는 품목그룹 X 에 있는 원소의 수이고, |주문 데이터베이스|는 품목그룹 X 을 포함하는 주문 데이터베이스에 있는 원소의 수이다. 지지도의 값이 0과 1사이이기 때문에 비유사도의 값도 0과 1의 범위에 있다. 0의 값에 가까운 비유사도는 품목그룹이 주문수요의 관점에서 긴밀히 연관되어 있음을 나타낸다. 반면 1의 값에 가까운 비유사도는 품목그룹이 매우 낮은 수요관계를 가진다는 것을 나타낸다.

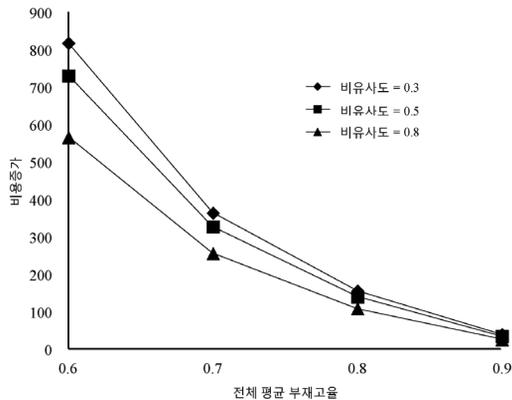
본 절은 3가지 비유사도를 고려한다. 각각의 비유사도에 대해, 본 절은 <표 8>에 있는 q_7 에 (1-비유사도)의 값을 할당하고, 편의를 피하기 위하여 나머지 값은 각 q_i 에 균등하게 할당한다. <표 8>에서 보여주듯이 주문유형은 7가지이고 각 주문유형의 발생 비율이 각 재고상황에서 동일하다고 가정하면, 부재고율과 수요변화율은 다음과 같이 계산된다(모든 주문사례에 대해 방법 3에 의해 계산된 전체 평균 부재고율 \bar{b} 을 사용).

$$\begin{aligned} \beta_1^{(3)} &= \beta_1^{(2)} = \beta_1 = \bar{b} \\ \beta_2^{(2)} &= \beta_2 = \bar{b} \\ \alpha_2^{(3)} &= \frac{q_2 + q_4 \bar{b} + q_6 + q_7 \bar{b}}{q_2 + q_4 + q_6 + q_7} \\ \beta_3 &= \bar{b} \\ \alpha_3^{(2)} &= \frac{q_3 + q_5 \bar{b} + q_6 \bar{b} + q_7 \bar{b}}{q_3 + q_5 + q_6 + q_7} \\ \alpha_3^{(3)} &= \frac{q_3 + q_5 \bar{b} + q_6 + q_7 \bar{b}}{q_3 + q_5 + q_6 + q_7} \end{aligned}$$

<표 9>는 구매종속성을 고려한 재고 모형과 구매종속성을 무시한 재고 모형에 의해 결정된 최적 재고 정책을 보여준다. 또한, 구매종속성이 존재한다는 가정하에 <표 9>는 구매종속성을 무시한 재고 모형의 증가된 단위 시간당 평균비용을 보여준다. <그림 5>는 세 가지 비유사도에 대해 구매종속성을 무시한 재고 모형의 증가된 단위 시간당 평균비용을 전체 평균 부재고율에 따라서 그린 그래프를 보여준다.

<표 9> 최적 재고정책의 비교

구매종속성	전체 평균 부재고율	비유사도 = 0.3					비유사도 = 0.5					비유사도 = 0.8				
		T	F ₁	F ₂	F ₃	Γ	T	F ₁	F ₂	F ₃	Γ	T	F ₁	F ₂	F ₃	Γ
고려	0.6	0.21	0.65	0.65	0.65	30997.59	0.21	0.64	0.64	0.64	30941.21	0.22	0.63	0.63	0.63	30854.38
	0.7	0.28	0.45	0.45	0.45	27890.41	0.28	0.45	0.45	0.45	27805.59	0.28	0.44	0.44	0.44	27677.64
	0.8	0.30	0.36	0.36	0.36	23996.19	0.30	0.35	0.35	0.35	23898.76	0.30	0.35	0.35	0.35	23752.17
	0.9	0.31	0.29	0.29	0.29	19652.35	0.31	0.28	0.28	0.28	19545.72	0.31	0.28	0.28	0.28	19385.39
무시	0.6	0.21	0.62	0.64	0.85	31817.88	0.21	0.61	0.63	0.84	31674.44	0.21	0.60	0.62	0.82	31422.60
	0.7	0.27	0.43	0.44	0.56	28255.91	0.27	0.42	0.44	0.55	28134.27	0.28	0.42	0.43	0.55	27934.89
	0.8	0.30	0.34	0.35	0.42	24153.13	0.30	0.34	0.35	0.41	24039.29	0.30	0.34	0.34	0.41	23861.60
	0.9	0.31	0.28	0.28	0.31	19692.94	0.31	0.28	0.28	0.31	19581.28	0.31	0.27	0.28	0.31	19412.18



〈그림 5〉 증가된 단위 시간당 평균비용의 비교

〈그림 5〉로부터 비유사도가 감소함에 따라 비용 증가가 단조롭게 이루어지는 것을 알 수 있다. 이러한 사실로부터 다음의 해석을 이끌어 낼 수 있다. 즉, 비유사도의 감소는 품목그룹이 주문수요의 관점에서 더욱 긴밀히 연관됨을 의미하고, 이것은 구매종속성의 정도가 더 높아진다는 것을 암시한다. 유사하게, 품목그룹이 주문수요의 관점에서 더욱 긴밀히 연관될수록 재고운영비용에 미치는 구매종속성의 영향은 더 뚜렷해 질 수 있다. 결국, 앞의 결과로부터 재고관리에서 구매종속성을 고려하는 것이 중요하다는 것을 유추할 수 있다.

8. 결 론

재고보충정책을 설계하는데 어떤 품목의 구매가 동일 주문에서 요구한 다른 품목들의 가용성에 의존할 때 발생할 수 있는 구매종속성은 아주 중요한 요소임에도 불구하고, 아직 구매종속성에 대한 연구는 드물다. 최근에 박창규, 서준용[1]은 즉시 만족되지 않는 수요주문은 모두 상실되는 상황에서 구매종속성을 고려한 근사적인 연속 및 정기 검토 모형을 제시하였다.

그 후, 박창규[2]는 구매종속성이 존재할 때, 즉시 만족되지 않는 수요주문의 일부는 상실되고 일부는 부재고 되는 상황을 다룬 EOQ 모형을 개발하였다.

그는 해법절차에서 라그랑지 승수이론(theory of Lagrange multiplier)을 이용하여 해를 제시하였으나, 그 해가 쿤터커 조건(Kuhn-Tucker condition)을 만족함을 증명하지 못하였다. 결국 박창규[2]가 제시한 해는 경우에 따라서 전체 최적해가 되지 못하고, 지역 최적해가 되는 경우가 발생하였다. 본 논문은 박창규[2]의 모형을 확장하여 각 품목별로 부재고율과 수요변화율을 고려할 수 있도록 새롭게 재고 모형을 가다듬고, 전체 최적해를 제시하는 해법절차를 제시하였다.

참 고 문 헌

- [1] 박창규, 서준용, "구매종속성이 재고관리에 미치는 영향", 『경영과학』, 제30권, 제3호(2013), pp.17-31.
- [2] 박창규, "구매종속성을 고려한 부분 부재고 재고 모형", 『한국경영과학회지』, 제39권, 제1호(2014), pp.83-100.
- [3] Aksoy, Y. and S.S. Erenguc, "Multi-item inventory models with coordinated replenishments : A survey," *International Journal of Operations and Production Management*, Vol.8 (1988), pp.63-73.
- [4] Bala, P.K., "Identification of purchase dependencies in retail sale," *International Journal of Strategic Management*, Vol.8, No.2(2008), pp.75-83.
- [5] Bala, P.K., "An inventory replenishment model under purchase dependency in retail sale," *International Journal of Computer Applications*, Vol.37, No.10(2012), pp.43-48.
- [6] Bala, P.K., S. Sural, and R.N. Banerjee, "Association rule for purchase dependence in multi-item inventory," *Production Planning and Control*, Vol.21, No.3(2010), pp.274-285.
- [7] Corbett, C.J. and K. Rajaram, "A generalization of the inventory pooling effect to nonnormal

- dependent demand," *Manufacturing and Service Operations Management*, Vol.8(2006), pp.351-358.
- [8] Dong, L. and H.L. Lee, "Optimal policies and approximations for a serial multiechelon inventory system with time-correlated demand," *Operations Research*, Vol.51(2003), pp.969-980.
- [9] Eppen, G.D., "Effects of centralization on expected costs in a multi-location newsboy problem," *Management Science*, Vol.25(1979), pp.498-501.
- [10] Erkip, N., W.H. Hausman, and S. Nahmias, "Optimal centralized ordering policies in multi-echelon inventory systems with correlated demands," *Management Science*, Vol.36(1990), pp.381-392.
- [11] Goyal, S.K. and A.T. Satir, "Joint replenishment inventory control : Deterministic and stochastic models," *European Journal of Operational Research*, Vol.38(1989), pp.2-13.
- [12] Hadley, G. and T.M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1963.
- [13] Johnson, G.D. and H.E. Thompson, "Optimality of myopic inventory policies for certain dependent demand processes," *Management Science*, Vol.21(1975), pp.1303-1307.
- [14] Khouja, M. and S.K. Goyal, "A review of the joint replenishment problem literature : 1989-2005," *European Journal of Operational Research*, Vol.186(2008), pp.1-16.
- [15] Larsen, C., "The Q(s,S) control policy for the joint replenishment problem extended to the case of correlation among item-demands," *International Journal of Production Economics*, Vol.118(2009), pp.292-297.
- [16] Lee, L.H. and E.P. Chew, "A dynamic joint replenishment policy with auto-correlated demand," *European Journal of Operational Research*, Vol.165(2005), pp.729-747.
- [17] Liu, L. and X.M. Yuan, "Coordinated replenishments in inventory systems with correlated demands," *European Journal of Operational Research*, Vol.123(2000), pp.490-503.
- [18] Montgomery, D.C., M.S. Bazaraa, and A.K. Keswani, "Inventory models with a mixture of backorders and lost sales," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.20, No.2(1973), pp.255-263.
- [19] Pentico, D.W. and M.J. Drake, "The deterministic EOQ with partial backordering : A new approach," *European Journal of Operational Research*, Vol.194, No.1(2009), pp.102-113.
- [20] Pentico, D.W. and M.J. Drake, "A survey of deterministic models for the EOQ and EPQ with partial backordering," *European Journal of Operational Research*, Vol.214, No.1(2011), pp.179-198.
- [21] Tsai, C.Y., C.Y. Tsai, and P.W. Huang, "An association clustering algorithm for can-order policies in the joint replenishment problem," *International Journal of Production Economics*, Vol.117, No.1(2009), pp.30-41.
- [22] Urban, T.L., "Reorder level determination with serially correlated demand," *Journal of the Operational Research Society*, Vol.51(2000), pp.762-768.
- [23] Urban, T.L., "A periodic-review model with serially-correlated, inventory-level-dependent demand," *International Journal of Production Economics*, Vol.95(2005), pp.287-295.
- [24] Veinott, A.F., "Optimal policy for a multi-product, dynamic, non-stationary inventory problem," *Management Science*, Vol.12(1965), pp.206-222.
- [25] Wong, R.C., A.W. Fu, and K. Wang, "Data mining for inventory item selection with cross-sell-

- ing considerations," *Data Mining and Knowledge Discovery*, Vol.11, No.1(2005), pp.81-112.
- [26] Yan, X.S., D.J. Robb, and E.A. Silver, "Inventory performance under pack size constraints and spatially-correlated demand," *International Journal of Production Economics*, Vol.117 (2009), pp.330-337.
- [27] Zhang, R., "An extension of partial backordering EOQ with correlated demand caused by cross-selling considering multiple minor items," *European Journal of Operational Research*, Vol.220(2012), pp.876-881.
- [28] Zhang, R., I. Kaku, and Y. Xiao, "Deterministic EOQ with partial backordering and correlated demand caused by cross-selling," *European Journal of Operational Research*, Vol.210(2011), pp.537-551.
- [29] Zhang, R., I. Kaku, and Y. Xiao, "Model and heuristic algorithm of the joint replenishment problem with complete backordering and correlated demand," *International Journal of Production Economics*, Vol.139, No.1(2012), pp.33-41.