J. Soc. Korea Ind. Syst. Eng Vol. 38, No. 1 : 21-29, March 2015
http://dx.doi.org/10.11627/jkise.2014.38.1.21
ISSN : 2005-0461(print)
ISSN : 2287-7975(online)

A System Analysis of a Controllable Queueing Model Operating under the {T:Min(T,N)} Policy

Hahn-Kyou Rhee†

Hannam University

조정가능한 대기모형에 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되었을 때의 시스템분석

이 한 교†

한남대학교

A steady-state controllable M/G/1 queueing model operating under the {T:Min(T,N)} policy is considered where the {T:Min(T,N)} policy is defined as the next busy period will be initiated either after T time units elapsed from the end of the previous busy period if at least one customer arrives at the system during that time period, or after T time units elapsed without a customer' arrival, the time instant when Nth customer arrives at the system or T time units elapsed with at least one customer arrives at the system whichever comes first. After deriving the necessary system characteristics including the expected number of customers in the system, the expected length of busy period and so on, the total expected cost function per unit time for the system operation is constructed to determine the optimal operating policy. To do so, the cost elements associated with such system characteristics including the customers' waiting cost in the system and the server's removal and activating cost are defined. Then, procedures to determine the optimal values of the decision variables included in the operating policy are provided based on minimizing the total expected cost function per unit time to operate the queueing system under considerations.

Keywords : Controllable Queueing Model, Busy Period, Operating Policy, Removal and Activation Cost

1. 서 론

서비스를 기다리는 고객이 시스템 내부에 없더라도 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 server가 항상 대기상태에 있어야 하는 일반적 대기모형(ordinary queueing model)은 이러한 대기상태에 있는 server를 보다 효율적으로 활용할 수 있는 방안으로 Yadin과 Naor[15]가 제시한 새로운 형태의 조정 가능한 대기모형(controllable queueing model)과는 뚜렷하게 구별된다. 다시 말해 분류된 두 종류 대기모형들 사이의 가장 큰 차이점은 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 대기시스템에 없으면 서비스를 제공하는 server를 대기시스템으로부터 철수시켜 또 다른 부수적인 업무를 수행하도록 한 점과 부수적인 업무를 수행중인 관계로 server가 대기시스템에 없을 때 대기시스템에 도착하는 고객들은 즉시 서비스를 받을 수 없다는 점이다. 이렇듯 고객들의 불편한 점을 감수하고도 조정 가능한 대기모형이 중요하게 생각되는 이유는 대기시스템의 운영자의 관점에서 찾을 수 있다. 일반적 대기모형의 경우에는 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 server는 항상 서비스창구에

Received 7 January 2015; Finally Revised 26 January 2015; Accepted 26 January 2015
† Corresponding Author : hkrhee@hnu.kr

서 대기상태에 있기 때문에 고객의 입장에서는 즉시 서비스를 제공받을 수 있다는 장점이 있지만 대기시스템 운영자 입장에서는 서비스를 받으려는 고객이 없음에도 불구하고 서비스창구를 항상 운용해야 하기 때문에 server의 업무활용도가 낮아지게 되는 문제점을 간과할 수 없게 된다. 일반적 대기모형에서 나타나는 이러한 문제점, 즉 server의 업무활용도를 보다 더 향상시키기 위해 제안된 조정가능한 대기모형에서는 서비스를 받기 위해 대기시스템에서 기다리는 고객이 없으면 즉시 서비스 창구를 폐쇄하고 server를 부수업무에 활용할 수 있도록 함에 주된 목적이 있다. 이러한 조건이 적용됨으로써 server는 서비스창구에서의 업무와 서비스창구 폐쇄된 다음에 유휴시간이 없이 또 다른 부수업무를 수행해야 하기 때문에 server의 업무활용도가 향상됨을 알 수 있다. 그러나 일단 폐쇄된 창구는 미리 정해진 조건이 만족되어야만 server는 수행중인 부수업무의 수행을 중단하고 서비스를 기다리는 고객들을 위하여 서비스창구로 복귀하여 다시 서비스를 제공할 수 있기 때문에 고객들의 관점에서는 서비스창구 폐쇄 후 도착한 고객은 미리 정해진 조건을 만족할 때까지 서비스를 제공받을 수 없다. 이러한 형태의 대기모형을 운용하기 위해서는 폐쇄된 서비스창구의 운용을 다시 재개할 수 있도록 미리 정해진 조건을 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)라고 한다. 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있으며[14], 이러한 운용방침들은 시스템상태를 표현하는 입력변수의 개수에 따라 단순운용방침(simple operating policy), 이변수 운용방침(dyadic operating policy) 그리고 삼변수 운용방침(triadic operating policy)으로 분류할 수 있다.

가장 대표적인 단순 운용방침에는 Yadin과 Naor[15]가 제안한 것으로 대기시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 처음으로 $N(N \geq 1)$명이 되는 순간 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하여 기다리는 고객에게 서비스를 제공하는 N 운용방침(N-policy)이 있으며, Heyman[4] 등이 제안한 운용방침으로 서비스창구가 폐쇄된 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 서비스창구의 운용을 재개하여 서비스의 제공이 개시되는 T 운용방침(T-policy) 그리고 마지막으로 Balachandran과 Tijms[1]이 제안한 것으로 서비스창구가 폐쇄된 이후 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 기다리는 고객에게 서비스 제공을 재개하는 D 운용방침(D-policy)이 있다.

기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하기 위해 단순 운용방침이 적용되는 조정 가능한 대기모형은 server를 일반적 대기모형 보다는 효율적으로 활용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 대기시스템의 상태를 나타내는 다양한 조건들 중에 단지 한 가지 대기시스템 상태에만 의존하여 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개되기 때문에 시스템 운영에 충분한 유연성이 부여되었다고 볼 수 없다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 하나의 단순 운용방침에 또 다른 하나의 단순 운용방침을 적절하게 결합한 새로운 형태의 운용방침, 즉 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 Gakis, Rhee and Sivazlian[3]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개될 수 있는 조건에 두 종류의 단순 운용방침을 활용함으로써 유연성이 증가된 이변수 운용방침은 포함된 두 종류의 단순 운용방침이 특이한 형태로 결합된 것으로 Min(N,T), Min(T,D), Min(N,D), Max(N,T), Max(T,D) 그리고 Max(N,D) 운용방침으로 표현된다. 이러한 이변수 운용방침은, 예를 들면, Min(N,D) 운용방침이 적용될 경우, 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 N 혹은 D 운용방침에 따르는 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되는 순간 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하여 즉시 서비스 제공이 개시되어야 하며, Max(N,D) 운용방침이 적용될 경우에는 N 운용방침과 D 운용방침에 따르는 두 조건 모두가 처음으로 만족될 때 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개되어 서비스 제공이 즉시 개시되어야 한다. 다른 이변수 운용방침도 유사한 의미로 정의된다[3,6,7]. 이미 언급된 것처럼, 이러한 이변수 운용방침은 단순 운용방침보다는 server에게 혹은 시스템 운용에 어느 정도의 유연성을 부여할 수 있다는 사실로 인해 최근에는 server에게 혹은 시스템운용에 보다 많은 유연성을 확보하기 위한 일환으로 세 가지 단순 운용방침 모두가 결합된 Min(N,T,D), Max(N,T,D) 그리고 Med(N,T,D) 운용방침과 같은 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee[9,10,11]에 의해 제안되었다. 삼변수 운용방침은 이변수 운용방침들과 유사하게 서비스를 기다리는 고객이 없어 창구가 폐쇄된 후 N 혹은 T 혹은 D 운용방침에 따르는 세 조건 중 어느 것이나 가장 먼저 하나의 조건이 만족되는 순간에 서비스가 시작되는 Min(N,T,D) 운용방침, 혹은 세 조건 모두가 만족되는 순간에 서비스가 시작되는 Max(N,T,D) 운용방침, 혹은 세 조건 중 어느 두 조건이 먼저 만족되는 시점에 따르는 Med(N,T,D) 운용방침에 따라 server는 수행중인 부수업무를 중단하고 폐쇄된 서비스창구에 복귀하여 서비스를 기다리는 고객들에게 서비스 제공을 개시하여야 함을 규정하고 있다[12].

실제상황에 적용할 수 있는 다양한 형태의 운용방침을 고려할 경우, 고객 혹은 운영자의 상호 상반된 장단점을 수용할 수 있도록 해야 하기 때문에 대기시스템의 많은 관련 정보가 입력변수의 형태로 복잡하게 결합된 상태로 포함될 수 밖에 없어 최적 운용방침의 결정과정에

커다란 어려움이 동반됨을 예상할 수 있다. 이러한 구조적인 문제를 피하고 보다 현실적인 운용방침을 개발하고 또한 최적의 운용방침에 따라 활용할 수 있는 환경의 조성이 또 하나의 필요한 전략일 수 있다.

본 논문은 제 2장에서 새로운 형태의 이변수 {T:Min(T,N)} 운용방침의 정의와 또한 적용되는 조정 가능한 M/G/1 대기모형에 대한 연구의 목적이 기술되고, 제 3장에서는 연구에 적용되는 대기시스템이 소개된다. 또한 제 4장에서 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되는 연구대상의 대기모형 분석을 통하여 필요한 시스템 특성치를 유도한 후, 제 5장에서는 시스템운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구축하고, 제 6장에서 운용방침에 포함된 입력변수들의 최적해를 유도할 수 있는 과정이 자세히 소개된다.

2. 연구 목적

조정가능한 대기모형을 실제 산업현장에서 직접 활용하기 위해서는 채택된 운용방침이 적용되었을 때 기대되는 비용과 효과를 고려하여 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 결정한 다음 그 결과에 따라 운용되어야 한다. 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 유도하기 위한 과정에는 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값, 고객에게 서비스를 제공하고 있는 server 수의 기대값, 대기모형이 운용될 때의 busy period의 기대값, 등이 필요할 수 있다. 여기에서 busy period는 서비스를 기다리고 있는 첫 고객에게 서비스를 제공하기 시작하는 순간부터 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스창구를 폐쇄할 때까지의 시간간격으로 정의된다[13].

최적의 운용방침을 결정하기 위해 필요한 시스템 특성치는 한 사람의 고객이 시스템 내부에서 단위시간을 기다리는데 필요한 비용, 한 사람의 server가 고객에게 단위시간의 서비스를 제공하는데 필요한 비용 그리고 서비스창구를 폐쇄하고 재개하는데 필요한 비용요소와 결합되어 시스템 운용에 필요한 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하게 된다. 그렇지만 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하기 위해 필요한 시스템 특성치는 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 수가 증가하면 증가할수록 유도과정에서 발생되는 어려움과 복잡한 정도가 매우 커지며 또한 최적 운용방침의 결정에 더욱 더 큰 어려움이 내재되어 있어 실제상황에서 적용하기 불가능해질 가능성이 존재하는 문제점이 있다.

이러한 현실적인 어려움을 해결할 수 있으면서 또한 현장에서의 적용가능성을 높일 수 있는 새로운 형태의 (TN)운용방침, 즉 새로운 busy period는 T 단위시간 동안 최소 한 명의 고객이 시스템에 도착하면 T 운용방침에 따라 시작되지만, 만약 한 명의 고객도 시스템에 도착하지 않는 경우에는 N 운용방침에 따라 시작되는 것으로 Rhee [8]에 의해 제안되었지만 좀 더 서비스를 기다리는 고객들의 입장을 유연하게 반영할 수 있는 또 다른 형태의 {T:Min(T,N)} 운용방침을 아래와 같이 정의하며 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되었을 때의 단위시간당 기대되는 총비용을 최소화하는 조건으로 운용방침에 포함된 시스템 상태를 나타내는 입력변수의 최적해를 유도하는 과정의 구체화함을 본 연구의 목적으로 설정한다.

{T:Min(T,N)} 운용방침 : 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스창구가 폐쇄된 이후, T 단위시간이 경과하기 전에 최소한 한 사람의 고객이 대기시스템에 도착한 경우, T 운용방침에 따라 새로운 busy period가 시작된다. 그러나 T 단위시간이 경과할 때까지 한 사람의 고객도 도착하지 않았을 경우, Min(T,N) 운용방침, 즉 T 운용방침 혹은 N 운용방침 중 어느 것이나 먼저 만족되는 순간 새로운 busy period가 시작되며, 그 후 서비스를 기다리는 고객이 시스템 내부에 없으면 서비스창구는 또 다시 폐쇄되며 server는 부수적인 업무수행을 시작한다.

3. 대기모형의 정의

안정상태(steady-state)에 있는 M/G/1 대기모형에 관하여 다음과 같은 사항을 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 대기시스템에 도착하는 고객들은 단위시간당 평균 λ명인 포아송분포(Poisson distribution)에 따른다. 다시 말해, 연속된 두 고객의 평균 도착시간 간격은 $\frac{1}{\lambda}$이다. 즉 t단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 X(t)라고 하면, X(t)의 확률질량함수(probability mass function)는 다음과 같이 주어진다.

$$P[X(t)=x]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!},\ x=0,1,2,3,\cdots \tag{1}$$

(ii) 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수는 평균과 분산이 각각 $\frac{1}{\mu}$와 σ^2인 상호독립이며 동일한(identical) 임의의 확률분포라 가정한다.

(iii) X_0와 B_0 : 일반적 M/G/1 대기모형의 시스템 내부에 있는 고객 수와 busy period의 길이를 나타내는 확률변수로 정의한다. X_0와 B_0의 기대값을 각각 $E[X_0]$와 $E[B_0]$로 정의하면 이들은 다음과 같이 주어진다[2,5].

$$E[X_0]=\rho+\frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)} \quad (2)$$

$$E[B_0]=\frac{1}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} \quad (3)$$

(iv) 기타 언급되지 않은 사항들은 M/G/1 대기모형의 일반적인 가정에 따른다.

4. 시스템 특성치 유도

{T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되는 조정 가능한 M/G/1 대기모형의 busy period는 T 혹은 Min(T,N) 운용방침에 따라 시작된다. 다시 말해, T 운용방침에 따라 busy period가 시작되기 위해서는 이전의 busy period가 종료된 후 첫 T 단위시간 동안에 최소한 한 명 이상의 고객이 system에 도착한 경우이며 한 명도 도착하지 않은 경우 busy period는 Min(T,N) 운용방침에 따라 시작된다. 따라서 다음 busy period가 T 운용방침 혹은 Min(T,N) 운용방침에 따라 시작될 확률을 각각 P[T]와 P[Min(T,N)]으로 정의하면 식 (1)을 사용해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P[T]=P[X(T)\geq 1]=1-e^{-\lambda T} \quad (4)$$

$$P[\mathrm{Min}(T,N)]=P[X(T)=0]=e^{-\lambda T} \quad (5)$$

또한 새로운 busy period가 Min(T,N) 운용방침에 따라 시작될 경우, busy period는 또 다른 T 혹은 N 운용방침에 따라 시작된다. 따라서 새로운 busy period가 Min(T,N) 운용방침의 T 혹은 N 운용방침에 따라 시작될 확률을 각각 P[T/Min(T,N)]와 P[N/Min(T,N)]으로 정의하면 P[T/Min(T,N)]는 식 (4)에서 주어진 것과 동일하며 P[N/Min(T,N)] 또한 식 (5)에서 주어진 P[Min(T,N)]와 동일함을 알 수 있다, 즉

$$P[T/\mathrm{Min}(T,N)]=1-e^{-\lambda T} \quad (6)$$

$$P[N/\mathrm{Min}(T,N)]=P[\mathrm{Min}(T,N)]=e^{-\lambda T} \quad (7)$$

4.1 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값

조정가능한 M/G/1 대기모형에 단순 T, N, Min(N,T) 그리고 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되었을 때 시스템 내부에 있는 고객 수를 나타내는 확률변수를 X_N, X_T, $X_{(TN)}$ 그리고 $X_{(TTN)}$라고 정의하면, 다음과 같은 관계식이 성립하게 됨을 알 수 있다.

$$X_{(TTN)}=X_T\,P[T]+X_{(TN)}\,P[\mathrm{Min}(T,N)] \quad (8)$$
$$X_{(TN)}=X_T\,P[T/\mathrm{Min}(T,N)]+X_N\,P[N/\mathrm{Min}(T,N)] \quad (9)$$

따라서 식 (8)과 식 (9)를 결합하면 다음과 같은 관계식이 완성된다.

$$\begin{aligned}X_{(TTN)}=&\ X_T\,P[T]\\&+X_T\,P[T/\mathrm{Min}(T,N)]\,P[\mathrm{Min}(T,N)]\\&+X_N\,P[N/\mathrm{Min}(T,N)]\,P[\mathrm{Min}(T,N)]\end{aligned} \quad (10)$$

식 (4), (5), (6)과 식 (7)에서 주어진 P[T], P[Min(T,N)], P[T/Min(T,N)]과 P[N/Min(T,N)]를 관계식 (10)에 대입하면 $X_{(TTN)}$은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}X_{(TTN)}=&\ X_T(1-e^{-\lambda T})+X_T(e^{-\lambda T})(1-e^{-\lambda T})\\&+X_N(e^{-\lambda T})(e^{-\lambda T})\\=&\ X_T(1-e^{-2\lambda T})+X_N(e^{-2\lambda T})\end{aligned} \quad (11)$$

또한 X_N, X_T 그리고 X_{TTN}의 기대값을 각각 $E[X_T]$ $E[X_N]$ 그리고 $E[X_{(TTN)}]$로 정의하고, 식 (11)의 좌우변에 기대값을 취하면 다음과 같은 관계식이 얻어진다.

$$E[X_{(TTN)}]=E[X_T](1-e^{-2\lambda T})+E[X_N](e^{-2\lambda T}) \quad (12)$$

Heyman[4]와 Yadin과 Naor[15]의 결과를 사용하면 $E[X_T]$와 $E[X_N]$는 다음과 같이 주어진다.

$$E[X_T]=\rho+\frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)}+\frac{\lambda T}{2} \quad (13)$$

$$E[X_N]=\rho+\frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)}+\frac{N-1}{2} \quad (14)$$

여기에서 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ 그리고 σ^2는 각 고객에게 제공되는 서비스시간을 나타내는 확률변수의 분산(variance)을 나타낸다. 식 (13)과 식 (14)에서 주어진 $E[X_T]$와 $E[X_N]$를 식 (12)에 대입하면 $E[X_{(TTN)}]$는 아래와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}E[X_{(TTN)}]=&\left\{\rho+\frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)}+\frac{\lambda T}{2}\right\}(1-e^{-\lambda T})\\&+\left\{\rho+\frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)}+\frac{N-1}{2}\right\}(e^{-\lambda T})\Big\}\\=&\ \rho+\frac{\lambda^2\sigma^2\rho^2}{2(1-\rho)}+(1-e^{-2\lambda T})\left(\frac{\lambda T}{2}\right)\\&+e^{-2\lambda T}\left(\frac{N-1}{2}\right)\end{aligned} \quad (15)$$

그런데 식 (2)에서 주어진 $\mathrm{E}[\mathrm{X}_0]$를 사용하면 식 (15)은 아래와 같이 표현된다.

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_{(\mathrm{TN})}]=\mathrm{E}[\mathrm{X}_0]+\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{N}-1}{2}\right)+(1-\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}})\left(\frac{\lambda\mathrm{T}}{2}\right) \quad (16)$$

4.2 Busy Period와 Idle Period의 기대값 유도

조정 가능한 M/G/1 대기모형에 단순 T와 N 운용방침 적용되었을 때 busy period의 기대값을 각각 $\mathrm{E}[\mathrm{B_T}]$와 $\mathrm{E}[\mathrm{B_N}]$ [3,6,7,9,10,11]으로 정의하면 이들은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathrm{E}[\mathrm{B_T}]=\frac{(\lambda\mathrm{T})\mathrm{E}[\mathrm{B}_0]}{1-\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}}} \quad (17)$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{B_N}]=\mathrm{NE}[\mathrm{B}_0] \quad (18)$$

여기에서 $\mathrm{E}[\mathrm{B}_0]$는 일반적인 M/G/1 대기모형에서 busy period의 기대값을 나타내며 식 (3)에 주어져 있다. 또한 {T:Min(T,N)} 운용방침이 조정 가능한 M/G/1 대기모형에 적용되었을 때, busy period의 기대값을 $\mathrm{E}[\mathrm{B}_{(\mathrm{TTN})}]$로 정의하면 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값을 유도하기 위해 설정되었던 식 (11)과 같은 형태로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathrm{E}[\mathrm{B}_{(\mathrm{TTN})}]=\mathrm{E}[\mathrm{B_T}](1-\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}})+\mathrm{E}[\mathrm{B_N}](\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}) \quad (19)$$

따라서 식 (17)와 식 (18)에서 주어진 $\mathrm{E}[\mathrm{B_T}]$과 $\mathrm{E}[\mathrm{B_N}]$를 식 (19)에 대입하면 다음과 같이 $\mathrm{E}[\mathrm{B}_{(\mathrm{TTN})}]$을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{B}_{(\mathrm{TTN})}]&=(1-\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}})\left\{\frac{(\lambda\mathrm{T})\mathrm{E}[\mathrm{B}_0]}{1-\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}}}\right\}+\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}(\mathrm{N\,E}[\mathrm{B}_0])\\&=\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}(\mathrm{N\,E}[\mathrm{B}_0])+(1+\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}})(\lambda\mathrm{T})\mathrm{E}[\mathrm{B}_0] \quad (20)\end{aligned}$$

busy period가 T 운용방침 혹은 Min(T,N) 운용방침으로 시작될 때의 idle period 기대값을 각각 $\mathrm{E}[\mathrm{I_T}]$와 $\mathrm{E}[\mathrm{I_{TN}}]$으로 정의하고 또한 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용될 때의 idle period를 $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{(\mathrm{TTN})}]$으로 정의하면 다음과 같은 관계식이 성립하게 된다. 여기에서 idle period는 서비스창구가 폐쇄되어 있는 시간간격을 나타내며 또한 busy period와 idle period의 합을 busy cycle이라고 정의한다.

$$\mathrm{E}[\mathrm{I}_{(\mathrm{TTN})}]=(1-\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}})\mathrm{E}[\mathrm{I_T}]+(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}})\mathrm{E}[\mathrm{I_{TN}}] \quad (21)$$

여기에서

$$\mathrm{E}[\mathrm{I_T}]=\mathrm{T} \quad (22)$$

그런데 busy period가 Min(T,N) 운용방침에 따라 시작되었을 경우 T 운용방침 혹은 N 운용방침이 적용되느냐에 따라 $\mathrm{E}[\mathrm{I_{TN}}]$는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathrm{E}[\mathrm{I_{TN}}]=\begin{cases}\mathrm{T}+\mathrm{T},\ \mathrm{T}\ \text{운용방침이 적용될 때}\\ \mathrm{T}+\dfrac{\mathrm{N}}{\lambda},\ \mathrm{N}\ \text{운용방침이 적용될 때}\end{cases} \quad (23)$$

여기에서 $\frac{1}{\lambda}$은 연속된 두 고객들의 평균 도착시간 간격을 나타낸다. 따라서 식 (21), 식 (22) 그리고 식 (23)을 사용하여 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용될 때 idle period의 기대값 $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{(\mathrm{TTN})}]$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{I}_{(\mathrm{TTN})}]&=(1-\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}})\mathrm{T}+(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}})(1-\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{T}})2\mathrm{T}\\&\quad+(e^{-\lambda T})(e^{-\lambda T})\left(T+\frac{N}{\lambda}\right)\\&=T+Te^{-\lambda T}-Te^{-2\lambda T}+\frac{N}{\lambda}e^{-2\lambda T} \quad (24)\end{aligned}$$

{T:Min(T,N)} 운용방침이 적용될 때 idle period의 기대값, $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{(\mathrm{TTN})}]$과 busy period의 기대값, $\mathrm{E}[\mathrm{B}_{(\mathrm{TTN})}]$의 합, 즉 busy cycle의 기대값, $\mathrm{E}[\mathrm{BC}_{(\mathrm{TTN})}]$은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathrm{E}[\mathrm{BC}_{(\mathrm{TTN})}]=\mathrm{E}[\mathrm{I}_{(\mathrm{TTN})}]+\mathrm{E}[\mathrm{B}_{(\mathrm{TTN})}] \quad (25)$$

따라서 식 (20)과 식 (24)에서 주어진 $\mathrm{E}[\mathrm{B}_{(\mathrm{TTN})}]$와 $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{(\mathrm{TTN})}]$를 식 (25)에 대입하면 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{BC}_{(\mathrm{TTN})}]&=\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}(\mathrm{NE}[\mathrm{B}_0])+(1+\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}})(\lambda\mathrm{T})\mathrm{E}[\mathrm{B}_0]\\&\quad+T+Te^{-\lambda T}Te^{-2\lambda T}+\frac{N}{\lambda}e^{-2\lambda T} \quad (26)\end{aligned}$$

또한 식 (3)에서 주어진 $\mathrm{E}[\mathrm{B}_0]$를 식 (26)에 대입하면 $\mathrm{E}[\mathrm{BC}_{(\mathrm{TTN})}]$ 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}1.\quad \mathrm{E}[\mathrm{BC}_{(\mathrm{TTN})}]&=\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}\left[\mathrm{N}\left\{\frac{1}{\mu(1-\mathrm{p})}\right\}\right]\\&\quad+(1+e^{-\lambda T})(\lambda T)\left\{\frac{1}{\mu(1-p)}\right\}\\&\quad+\mathrm{T}+\mathrm{T}(\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}})-\mathrm{T}(\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}})+\frac{\mathrm{N}}{\lambda}(\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}) \quad (27)\end{aligned}$$

여기에서 $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$를 식 (27)에 대입한 후 간단히 하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{BC}_{(\mathrm{TTN})}]&=\mathrm{N}\left\{\frac{1}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\lambda}\right\}\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}\\&\quad+\mathrm{T}\left[(1+\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}})\lambda\left\{\frac{1}{\mu(1-\rho)}\right\}+1+\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{T}}-\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{T}}\right] \quad (28)\end{aligned}$$

관계식 (28)을 보다 간단히 하기 위해 아래의 **정리 1**과 **정리 2**를 제시한다.

정리 1 :

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda(1-\rho)} \tag{29}$$

증명 :

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda}{\mu(1-\rho)\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\frac{\rho}{(1-\rho)\lambda}+\frac{1}{\lambda}$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\rho}{(1-\rho)}+1\right\} \tag{30}$$

그런데

$$\frac{\rho}{(1-\rho)}=\frac{1}{(1-\rho)}-1 \tag{31}$$

식 (31)에서 주어진 결과를 식 (30)에 대입하면

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{(1-\rho)}-1+1\right\}$$
$$=\frac{1}{\lambda(1-\rho)}.\ \square$$

정리 2 :

$$T\left[(1+e^{-\lambda T})\lambda\left\{\frac{1}{\mu(1-\rho)}\right\}+1+e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T}\right]$$
$$=T\left[(1+e^{-\lambda T})\left\{\frac{1}{(1-\rho)}\right\}-e^{-2\lambda T}\right] \tag{32}$$

증명 :

$$T\left[(1+e^{-\lambda T})\lambda\left\{\frac{1}{\mu(1-\rho)}\right\}+1+e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T}\right]$$
$$=T\left[(1+e^{-\lambda T})\left\{\frac{\lambda}{\mu(1-\rho)}\right\}+1+e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T}\right]$$
$$=T\left[(1+e^{-\lambda T})\left\{\frac{\rho}{(1-\rho)}\right\}+1+e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T}\right] \tag{33}$$

식 (31)에서 주어진 결과를 식 (33)에 대입하면 아래와 같이 **정리 2**가 증명된다.

$$T\left[(1+e^{-\lambda T})\lambda\left\{\frac{1}{\mu(1-\rho)}\right\}+1+e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T}\right]$$
$$=T\left[(1+e^{-\lambda T})\left\{\frac{1}{(1-\rho)}-1\right\}+1+e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T}\right]$$
$$=T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)-e^{-2\lambda T}\right\}.\ \square$$

관계식 (29)와 식 (32)에서 주어진 **정리 1**과 **정리 2**에서 증명된 결과를 식 (28)에 대입하면 $E[BC_{(TTN)}]$를 다음과 같이 주어진다.

$$E[BC_{(TTN)}]=N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T}$$
$$+T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right)-e^{-2\lambda T}\right\} \tag{34}$$

5. 시스템운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수

시스템 운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구축하기 위해서는 서비스를 받으려는 고객이 시스템에서 기다리는데 발생되는 제반 비용 그리고 서비스창구의 폐쇄 및 재개에 필요한 비용을 고려하여야 한다. 이러한 비용요소를 좀 더 구체적으로 표현하기 위해 다음을 정의한다.

(i) h : 한 명의 고객이 한 단위시간 동안 시스템에 머무는데 소요되는 비용.
(ii) k : 서비스창구를 한 번 폐쇄하고 재개하는데 필요한 제반 비용으로 busy period가 시작될 때와 busy period가 종료될 때 발생되는 비용의 합을 의미한다.
(iii) 고정된 비용으로 고용된 한 명의 server가 항상 근무하는 상황을 가정하여 server가 서비스를 제공하는데 필요한 비용 항상 일정함으로 여기에는 고려하지 않기로 한다.

$f(T,N)$을 위에서 정의된 비용요소와 필요한 시스템 특성치가 결합된 시스템운용에 따른 단위시간당 기대되는 총비용함수라고 정의하면 $f(T,N)$는 다음과 같이 표현된다.

$$f(T,N)=hE[X_{(TTN)}]+k\left\{\frac{1}{E[BC_{(TTN)}]}\right\}$$
$$=h\left\{E[X_0]+e^{-2\lambda T}\left(\frac{N-1}{2}\right)+(1-e^{-2\lambda T})\left(\frac{\lambda T}{2}\right)\right\}$$
$$+\frac{k}{N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T}+T\left\{(1+e^{\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right)-e^{-2\lambda T}\right\}} \tag{35}$$

6. 최적 {T:Min(T,N)} 운용방침의 결정

조정 가능한 M/G/1 대기모형에 적용되는 {T:Min(T,N)}

운용방침에 포함되어 있는 입력변수 T와 N의 최적해, 즉 T*과 N*는 식 (35)에서 주어진 시스템 운용에 따른 단위시간당 기대되는 총 비용함수, f(T,N)를 가장 작게 하는 T와 N의 값으로 아래의 **정리 3**을 사용하면 구할 수 있다.

정리 3 : 식 (35)에서 주어진 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형의 단위시간당 기대되는 총 비용함수를 최소화하는 입력변수의 최적해 T*과 N*는 다음 관계식을 만족한다.

$$\text{(i)}\ \ N^* = e^{2\lambda T^*}\left\{\sqrt{\frac{2k\lambda(1-\rho)}{h}} - \lambda T^*(1+e^{-\lambda T^*})\right\} + \lambda T^*(1-\rho) \tag{36}$$

$$\text{(ii)}\ \ e^{\lambda T^*} + 2\rho = \frac{2+\rho}{1-\lambda T^*} \tag{37}$$

증명 : 식 (35)에서 주어진 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되는 조정 가능한 M/G/1 대기모형의 단위시간당 기대되는 총비용함수, 즉 f(T,N)를 최소화하는 입력변수 T와 N은 $\frac{\partial F(T,N)}{\partial N}=0$와 $\frac{\partial F(T,N)}{\partial T}=0$를 만족해야 한다.

$$\text{(i)}\ \ \frac{\partial F(T,N)}{\partial N}=0$$

식 (35)에서 주어진 f(T,N)을 입력변수 N에 관하여 편미분하면 다음과 같다, 즉

$$\frac{\partial F(T,N)}{\partial N} = he^{-2\lambda T}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{-k\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T}}{\left[N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T} + T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}\right\}\right]^2} \tag{38}$$

따라서 식 (38)을 사용하여 $\frac{\partial F(T,N)}{\partial N}=0$를 풀면

$$\frac{he^{-2\lambda T}}{2} = \frac{k\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T}}{\left[N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T} + T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}\right\}\right]^2}$$

$$\left[N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T} + T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}\right\}\right]^2 = \frac{2k}{h\lambda(1-\rho)} \tag{39}$$

$$N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T} + T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}\right\} = \sqrt{\frac{2k}{h\lambda(1-\rho)}}$$

$$N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T} = \sqrt{\frac{2k}{h\lambda(1-\rho)}} - T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2k\lambda(1-\rho)}{h}}\,e^{2\lambda T} - \lambda T(1+e^{-\lambda T})e^{2\lambda T} + \lambda T(1-\rho)$$

$$= e^{2\lambda T}\left\{\sqrt{\frac{2k\lambda(1-\rho)}{h}} - \lambda T(1+e^{-\lambda T})\right\} + \lambda T(1-\rho)\Big\}$$

$$\text{(ii)}\ \ \frac{\partial F(T,N)}{\partial T}=0$$

식 (35)에서 주어진 f(T,N)을 입력변수 T에 관하여 편미분한 후 0으로 놓으면 다음과 같다, 즉

$$\frac{\partial f(T,N)}{\partial T} = he^{-2\lambda T}(-2\lambda)\left(\frac{N-1}{2}\right) + h(-e^{-2\lambda T})(-2\lambda)\left(\frac{\lambda T}{2}\right) + h(1-e^{-2\lambda T})\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{-kA}{\left[N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T} + T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}\right\}\right]^2} = 0 \tag{40}$$

여기에서 A는 다음과 같다.

$$A = N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T}(-2\lambda) + \left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}\right\} + T\left\{e^{-\lambda T}(-\lambda)\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}(-2\lambda)\right\} \tag{41}$$

또한 계산과정의 편리함을 위해 B를 아래와 같이 정의한다.

$$B = he^{-2\lambda T}(-2\lambda)\left(\frac{N-1}{2}\right) + h(1-e^{-2\lambda T})\left(\frac{\lambda}{2}\right) + h(-e^{-2\lambda T})(-2\lambda)\left(\frac{\lambda T}{2}\right) \tag{42}$$

관계식 (40)은 다음과 같이 표현된다.

$$B = \frac{kA}{\left[N\left\{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}\right\}e^{-2\lambda T} + T\left\{(1+e^{-\lambda T})\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - e^{-2\lambda T}\right\}\right]^2} \tag{43}$$

또한 관계식 (39)의 결과를 관계식 (40)에 대입한 후 간단히 하면 식 (44)와 같이 표현된다. 즉

$$B = \frac{\frac{kA}{2k}}{h\lambda(1-\rho)}$$

$$\frac{2k}{h\lambda(1-\rho)}B = kA$$

$$\frac{2}{h\lambda}B = A(1-\rho) \tag{44}$$

식 (42)에서 주어진 B를 아래와 같이 간단히 한 후

$$\begin{aligned} B &= \frac{h\lambda}{2}(-2Ne^{-2\lambda T}+2e^{-2\lambda T}+2\lambda Te^{-2\lambda T}+1-e^{-2\lambda T}) \\ &= \frac{h\lambda}{2}(-2Ne^{-2\lambda T}+e^{-2\lambda T}+2\lambda Te^{-2\lambda T}+1) \end{aligned} \tag{45}$$

식 (45)에서 주어진 B를 사용하여 $\frac{2}{h\lambda}B$를 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{h\lambda}B = -2Ne^{-2\lambda T}+e^{-2\lambda T}+2\lambda Te^{-2\lambda T}+1 \tag{46}$$

또한 식 (41)에서 주어진 A를 사용하여 $A(1-\rho)$를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A(1-\rho) &= -2Ne^{-2\lambda T}+1+e^{-\lambda T}-(1-\rho)e^{-2\lambda T} \\ &\quad -\lambda Te^{-\lambda T}+2\lambda T(1-\rho)e^{-2\lambda T} \\ &= -2Ne^{-2\lambda T}+1+e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T} \\ &\quad +\rho e^{-2\lambda T}-\lambda Te^{-\lambda T}+2\lambda Te^{-2\lambda T} \\ &\quad -2\lambda T\rho e^{-2\lambda T} \end{aligned} \tag{47}$$

식 (46)과 식 (47)에서 주어진 $\frac{2}{h\lambda}B$와 $A(1-\rho)$의 결과를 관계식 (44)에 아래와 같이 대입한 후

$$\begin{aligned} &-2Ne^{-2\lambda T}+e^{-2\lambda T}+2\lambda Te^{-2\lambda T}+1 \\ &=-2Ne^{-2\lambda T}+1+e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T} \\ &+\rho e^{-2\lambda T}-\lambda Te^{-\lambda T}+2\lambda Te^{-2\lambda T}-2\lambda T\rho e^{-2\lambda T} \end{aligned}$$

간단히 하면 다음과 같다.

$$2e^{-2\lambda T} = e^{-\lambda T}+\rho e^{-2\lambda T}-\lambda Te^{-\lambda T}-2\lambda T\rho e^{-2\lambda T} \tag{48}$$

또한 식 (48)의 좌우변에 $e^{2\lambda T}$를 곱하면

$$2 = e^{\lambda T}+\rho-\lambda Te^{\lambda T}-2\lambda T\rho \tag{49}$$

식 (49)을 사용하여

$$(1-\lambda T)e^{\lambda T} = 2-\rho+2\lambda T\rho$$

따라서

$$e^{\lambda T} = \frac{2-\rho+2\lambda T\rho}{1-\lambda T} = -2\rho+\frac{2+\rho}{1-\lambda T}$$

끝으로

$$e^{\lambda T}+2\rho = \frac{2+\rho}{1-\lambda T}. \ \square$$

{T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되는 조정 가능한 M/G/1 대기모형의 단위시간당 기대되는 총비용함수를 최소화하는 입력변수의 최적해 T*과 N*는 **정리 3**에 포함된 식 (36)과 식 (37)을 사용하여 구할 수 있다. 일반적인 절차는 식 (37)을 사용하여 최적 T*를 구한 후 그 결과를 식 (36)에 대입하여 N*를 구하면 된다. 그러나 식 (37)을 사용하여 T*를 해석적으로 구할 수 없기 때문에 두 곡선 $(e^{\lambda T}+2\rho)$과 $\left(\frac{2+\rho}{1-\lambda T}\right)$의 교점인 T*를 시행착오(trial and error)의 과정을 통하여 구해야만 하는 어려움이 있다. 또한 최적해 N*와 T*는 항상 정수의 값으로 주어지지 않는다. T*의 경우 정수가 아니더라도 문제가 없지만 고객수를 나타내는 N*의 경우 정수가 아닌 경우 문제가 될 수 있다. 따라서 이러한 상황이 발생될 경우에는 N*의 값은 다음과 같은 절차에 따라 결정할 수 있다. 즉, N*의 정수부분을 $\tilde{N}^*$라고 한 다음, 만약 $f(T^*,\tilde{N}^*) \geq f(T^*,\tilde{N}^*+1)$일 때는 $N^*=\tilde{N}^*+1$, 또한 $f(T^*,\tilde{N}^*) \leq f(T^*,\tilde{N}^*+1)$일 때는 $N^*=\tilde{N}^*$로 설정하면 된다.

7. 결 론

조정 가능한 M/G/1 대기모형에 적용될 수 있는 다양한 형태의 운용방침이 개발되어 소개되고 있지만 대부분의 경우 각각의 운용방침의 적용에 따른 시스템 특성치가 매우 복잡한 형태로 주어지기 때문에 시스템 운용에 따른 비용요소를 고려한 단위시간당 기대되는 총비용함수를 활용한 입력변수들의 최적해 유도에 많은 어려움이 따른다. 따라서 다양한 형태의 새로운 운용방침의 개발도

중요하지만 그러한 운용방침에 포함된 입력변수들의 최적해의 유도의 가능성 또한 고려되어야 한다. 이러한 문제를 고려하여 제안된 {T:Min(T,N)} 운용방침이 적용되는 조정 가능한 M/G/1 대기모형의 최적운용방침의 성공적 유도는 또 다른 형태의 운용방침의 개발, 즉 예를 들면 {T:Min(N,D)} 혹은 {T:Max(T,N)} 운용방침 등과 같은 복잡한 형태의 운용방침에 따른 시스템의 분석과 최적 운용방침을 결정할 수 있는 가능성을 제시하였다고 볼 수 있다.

Acknowledgement

This study has been partially supported by the 2014 Internal Research Fund of the Hannam University, Daejon, Korea.

References

[1] Balachandran, K.R. and Tijms, H., On the D-policy for the M/G/1 Queue. *Management Science*, 1975, Vol. 9, pp. 1073-1076.

[2] Conolly, B., *Lecture Notes on Queueing Systems*, Halsted, New York, 1975.

[3] Gakis, K.G., Rhee, H.K., and Sivazlian, B.D., Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies. *Stochastic Analysis and Applications*, 1995, Vol. 13, No. 1, pp. 47-81.

[4] Heyman, D., The T-policy for the M/G/1 Queue. *Management Science*, 1977, Vol. 23, No. 7, pp. 775-778.

[5] Kleinrock, L., *Queueing Systems, Vol. 1 : Theory*, John Wiley and Sons, New York, NY, 1975.

[6] Rhee, H.K., Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies : Concepts and Application to the Dyadic Policies. *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 1997, Vol. 23, No. 4, pp. 729-739.

[7] Rhee, H.K. and Oh, H.S., Derivation of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Periods for Min (N,D) and Max(N,D) Operating Policies in a Controllable M/G/1 Queueing Model. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2009, Vol. 32, No. 3, pp. 71-77.

[8] Rhee, H.K., Analysis of a Controllable M/G/1 Queueing Model Operating under the(TN) Policy. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2014, Vol. 37, No. 1, pp. 96-103.

[9] Rhee, H.K., Construction of a Relation Between the Triadic Min(N, T, D) and Max(N, T, D) Operating Policies Based on their Corresponding Expected Busy Period. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2010, Vol. 33, No. 3, pp. 63-70.

[10] Rhee, H.K., Derivation of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Period for a Controllable M/G/1 Queueing Model Operating under the Triadic Max(N, T, D), *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2011, Vol. 34, No. 1, pp. 67-73.

[11] Rhee, H.K., Decomposition of the Most Generalized Triadic Operating policy Using its Corresponding Expected Busy. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2011, Vol. 34, No. 4, pp. 162-168.

[12] Rhee, H.K. and Oh, H.S., Development of the Most Generalized Form of the Triadic Operating Policy and Derivation of its Corresponding Expected Busy Period. *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2009, Vol. 32, No. 4, pp. 161-168.

[13] Rhee, H.K. and Sivazlian, B.D., Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic(0, K, N, M) Policy. *Journal of Applied Probability*, 1990, Vol. 27, pp. 425-432.

[14] Teghem, J., Control of the Service Process in a Queueing System. *European Journal of Operational Research*, 1986, Vol. 23, pp. 141-158.

[15] Yadin, M. and Naor, P., Queueing System with Removable Service Station. *Operational Research Quarterly*, 1963, Vol. 14, pp. 393-405.

ORCID

Hahn-Kyou Rhee | http://orcid.org/0000-0002-7629-3116