<응용기술논문> DOI http://dx.doi.org/10.3795/KSME-C.2015.3.2.107 ISSN 2288-3991(Online)

RecurDyn 솔버에 적용되어 있는 유연 다물체 동역학에 대한 해석기술

최 주 환*† · 최 진 환**
* 펑션베이(주), ** 경희대학교 기계공학과

Analysis Method for Multi-Flexible-Body Dynamics Solver in RecurDyn

Juhwan Choi *† and Jin Hwan Choi **
* Chief Product Officer, R&D Group, FunctionBay, Inc.,
** Department of Mechanical Engineering, KyungHee Univ.

(Received February 16, 2015 ; Revised March 31 2015 ; Accepted April 10, 2015)

Key Words: RecurDyn(리커다인), MFBD(Multi-Flexible-Body Dynamics, 유연 다물체 동역학), Incremental Finite Element Formulation (증분 유한요소 정식화), Corotational Procedure(동시회전 기법), Virtual Body (가상 바디), Flexible Body Joint (유연체 조인트)

초록: 유연 다물체 동역학은 실제 시스템을 가능한 유사하게 수치화하여 해석할 수 있기 때문에 일반 동역학 연구에 대한 차세대 주제로 각광을 받고 있다. 이러한 유연 다물체 동역학에 대한 해석 기술은 리커다인이라는 상용 소프트웨어에 효과적으로 적용되어 있는데, 특히 강체와 유연체를 통합하여 하나의 솔버에서 해석을 할 수 있는 특징을 가지고 있다. 본 논문에서는 이러한 리커다인의 유연 다물체 동역학 솔버의 기술들을 살펴보고자 한다. 기본적으로 리커다인의 유연 다물체 동역학 해법은 동시회전 기법을 사용하는 증분 유한요소 정식화를 기존의 순환공식을 이용한 동역학 정식화에 결합함으로써 구현되어 진다. 이 과정에서 강체와 유연체 사이의 조인트나 힘 요소 등의 효율적 처리를 위해 가상 바디와 유연체 조인트 개념이 사용된다.

Abstract: The analysis of multi-flexible-body dynamics (MFBD) has been an important issue in the area of the computational dynamics. This technique has been developed and improved in RecurDyn solver. This paper reviews the formulation which is applied in the RecurDyn solver. Basically, in order to solve the multi-flexible-body dynamics problem, an incremental finite element formulation using a corotational procedure is used. In particular, in order to solve the rigid and flexible bodies together, a constraint equation between a rigid body and a flexible body is applied, in which a virtual body and a flexible body joint are introduced.

1. 서 론

컴퓨터의 성능이 향상되고 효과적인 수치 알고리즘이 연구/개발되어짐에 따라 다양한 종류의 제품이나 설비에 대한 디자인 설계 및 해석에 컴퓨터를 이용한 해석기술의 사용이 확대되고 있다. 20 세기까지는 동역학 분야와 구조해석 분야가 개별적으로 성장하는 단계에 있었다. 70 년대에서 80 년대 중반까지는, 구조해석 분야의 주요 관심사가 단품(Part)에 대한 정적해석(Static Analysis)을 통한 응력해석이 주류를 이루었다면, 동역학 분야에서는 강체 동역학에 대한 연구가 주로 이루어졌다. 80 년대 중반 이후로는, 구조해석 분야에서는 구조 동역학이나 대변형, 비선형 유한요소에 대한 연구가 활발히 진행되었으며, 동역학 분야에서는 변형량이 크지 않은 유연체 동역학, 모달(modal) 해석기법, 상호해석(co-simulation) 기법에 대한 연구가 이루어져 왔다. 이러한 방식으로 진행되어 오던 연구가 21 세기에 들어와서는 개별적으로 연

† Corresponding Author, juhwan@functionbay.co.kr

구되어져 오던 동역학 분야와 구조해석 분야를 통합하는 방향으로 발전하고 있는데, 이러한 해석 분야를 유연 다물체 동역학(multi-flexible-body dynamics or flexible multi-body dynamics)이라 한다. 이러한 통합해석 분야를 가장 먼저 효과적으로 제품화한 상용 소프트웨어가 리커다인이며 리커다인에서는 이를 MFBD(multi-flexible-body dynamics)라 한다.[1~3] 일반적으로 MFBD 시스템이라 함은 다양한 강체 바디들과 유연체 바디들 그리고 이러한 바디들 사이에 존재하는 조인트 요소나 힘 요소, 접촉 요소를 모두 포함할 수 있는 시스템 레벨의 모델이라 할 수 있다. 또한, 동역학의 기본 특성인 비선형, 대변위, 대변형, 대회전 등과 같은 요소들이 기본적으로 포함되어 해석되어야 하는 시스템이기도 하다.

이러한 대변형이나 대회전을 포함하는 비선형 동역학 문제를 해결하기 위해 리커다인에서는 동시회전 기법(co-rotational procedure)을 기반으로 한 증분 유한요소 기법(incremental finite element formulation)을 사용하고 있다. 많은 유한요소들이 유한요소 정식화에 있어 요소 기준좌표계(element reference frame)를 이용하는 동시회전 기법을 사용하고 있으며 이는 Wempner[4]와 Belytschko 등[5]에 의해 소개되었다. 또한, 증분 유한요소기법을 이용하면 대변형/대회전을 하는 비선형 문제를 효과적으로 처리할 수 있게 된다. 한편, 강체 동역학 정식화에 있어서는 순환공식을 이용한 운동방정식을 이용하여 보다 효과적인 해석이 수행될 수 있도록 하였고, 이들 강체와 유연체를 통합한 것이 리커다인 MFBD 솔버라 할 수 있다. 본 논문에서는 이러한 MFBD 솔버의 주요 요소를 소개하고자 한다.

본 논문의 주요 구성을 살펴보면, 2 장에서는 순환공식을 사용하여 정리되는 리커다인의 강체 동역학에 대해 소개하고, 3 장에서는 동시회전 기법을 기반으로 한 증분 유한요소 정식화의 기본 개념을 설명한다. 4 장에서는 이들 강체와 유연체를 통합하기 위한 개념 및 주요 요소가 설명되고 5 장에서는 이들 시스템이 통합된 MFBD 정식화에 대해 설명하며 6 장에서 마무리 된다.

2. 순환공식을 이용한 강체 동역학의 정식화

순환공식에 대한 효과적인 설명을 위해 Fig. 1 과 같이 2 개의 인접하고 있는 강체 바디가 3 차원 공간상에 존재한다고 가정한다. 2 개의 강체 바디들은 하나의 조인트로 연결되어 있고, 하나의 힘 요소가 강체 바디 j 에 작용하고 있다고 하자. 또한, 사용된 조인트는 순환공식의 스패닝트리(spanning tree)상에서 두개의 바디를 연결하는 조인트라 가정하자. 첨자 i 는 순환공식의 스패닝트리(spanning tree)상에서 정의되는 바디 j 의 인보드(inboard) 바디를 의미한다.[6] 그림에서 X-Y-Z 는 절대 기준좌표계(global inertial reference frame)를 나타내며 x′-y′-z′ 는 기준좌표계에서 정의되는 바디좌표계(body reference frame) 이다. 바디좌표계는 인보드바디와 연결되는 조인트 마커의 위치에 존재하도록 정의하며, 바디좌표계의 위치는 바디 중심마커(center marker)와 다를 수 있으나 자세(**A**)는 같은 값을 사용한다. 첨자 j 는 편의상 첨자 $(i+1)$ 과 같은 의미로 사용될 수 있다.

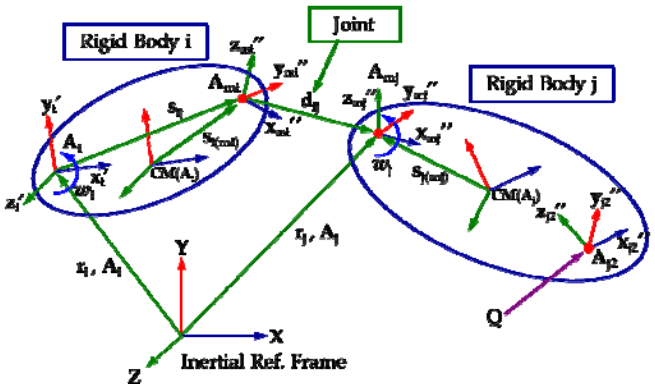

Fig. 1 Two contiguous rigid bodies

강체에 대한 운동방정식을 도출하기 위해, 기준좌표계 X-Y-Z 에서 바라 본 바디좌표계(body reference frame)의 원점(origin)에 대한 속도(velocity)와 가상변위(virtual displacement)는 식 (1)과 (2)로 정의될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{r} \\ \delta\boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} \tag{2}$$

이들 식을 바디좌표계 x′-y′-z′ 에서 바라 본 값으로 표현하면 식 (3)과 (4)로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}' \\ \boldsymbol{\omega}' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\delta\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}' \\ \delta\boldsymbol{\pi}' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{r} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} \tag{4}$$

여기서 $\mathbf{A}$ 는 바디좌표계 x′-y′-z′ 의 자세(orientation)를 기준좌표계를 기준으로 정의한 행렬이다. Fig. 1 에서 보여지는 바와 같이 2 개의 인접한 바디는 조인트로 연결되어 지는데, 이때 바디 i 와 바디 j 에 정의되는 마커(marker)의 위치와 자세는 각각 $x''_{i(mi)}$-$y''_{i(mi)}$-$''z_{i(mi)}$ 와 $x''_{j(mj)}$-$y''_{j(mj)}$-$z''_{j(mj)}$ 로 표현될 수 있다.

결과적으로, 바디 j 에 속한 조인트 마커 $x''_{j(mj)}$-$y''_{j(mj)}$-$z''_{j(mj)}$ 의 원점이자 바디 j 의 바디좌표계에 대한 원점은 식 (5)와 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_{ij} + \mathbf{d}_{ij} \tag{5}$$

또한, 바디 j 에 대한 바디좌표계의 각속도(angular velocity)는 식 (6)과 같이 표현될 수 있다.

$$\boldsymbol{\omega}'_j = \mathbf{A}_{ij}^T\boldsymbol{\omega}'_i + \mathbf{A}_j^T\boldsymbol{\omega}_{ij} \tag{6}$$

여기에서 $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j$ 이며, $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ 는 바디 i 에서 바라본 바디 j 의 상대 각속도로써 기준좌표계에서 정의되는 값이다.

식 (5)를 시간에 대해 미분하고 바디 j 의 바디좌표계를 기준으로 표현하면 $\dot{\mathbf{r}}'_j$ 를 얻을 수 있고 $\dot{\mathbf{r}}'_j$ 와 $\boldsymbol{\omega}'_j$ 를 바디 i 의 일반좌표계(generalized coordinates, $\mathbf{q}$)로 정리할 수 있게 된다. 결과적으로 식 (7)~(9)를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{B}_{ij}^1\mathbf{Y}_i + \mathbf{B}_{ij}^2\dot{\mathbf{q}}_{ij} \tag{7}$$

$$\mathbf{B}_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ij}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ij}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\left(\tilde{\mathbf{s}}'_{ij} + \tilde{\mathbf{d}}'_{ij}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{B}_{ij}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ij}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ij}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{d}'_{ij}\right)_{\mathbf{q}_{ij}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ij}\mathbf{H}'_j \end{bmatrix} \tag{9}$$

위 식에서 $\mathbf{H}'_j$ 는 바디 j 의 회전축의 자세를 정의하는 행렬로써 바디 j 를 기준으로 하여 정의되는 값이다. 또한 $\mathbf{q}$ 는 3 차원 문제에서 병진에 대한 자유도 3 개와 회전에 대한 자유도 3 개를 표현하는 일반좌표계이다. 식 (8)과 (9)에서 볼 수 있는 바와 같이 $\mathbf{B}_{ij}^1$ 과 $\mathbf{B}_{ij}^2$ 는 단지 $\mathbf{q}_{ij}$ 의 함수로 표현되고 있음을 알 수 있다. 유사하게 가상 변위에 대한 순환공식을 도출하게 되면 식 (7)과 유사한 식 (10)를 얻을 수

있다.

$$\delta \mathbf{Z}_j = \mathbf{B}_{ij}^1 \delta \mathbf{Z}_i + \mathbf{B}_{ij}^2 \delta \mathbf{q}_{ij} \tag{10}$$

식 (10)이 스패닝트리를 따라 모든 조인트에 대해 재귀적으로 적용된다면 절대좌표계와 상대좌표계 사이의 관계식을 나타내는 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \tag{11}$$

$$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{Y}_0^{\mathrm{T}},\ \mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}},\ \mathbf{Y}_2^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \mathbf{Y}_n^{\mathrm{T}} \right]_{\mathrm{nc}\times 1}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \left[\mathbf{Y}_0^{\mathrm{T}},\ \dot{\mathbf{q}}_{01}^{\mathrm{T}},\ \dot{\mathbf{q}}_{12}^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \dot{\mathbf{q}}_{(n-1)n}^{\mathrm{T}} \right]_{\mathrm{nr}\times 1}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

식 (11)에서 $\mathbf{B}$ 는 $\dot{\mathbf{q}}_{ij}$ 에 대한 계수들의 모음행렬이 되는데, 이를 속도변환행렬(velocity transformation matrix)이라고 부른다. 또한 nc 는 절대좌표계에서 일반좌표의 수를 의미하며, nr 는 상대좌표계에서의 일반좌표 수를 의미한다. 따라서 $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{\mathrm{nc}}$ 이고 $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^{\mathrm{nr}}$ 이다. 이를 확장하면 일반적으로 정의될 수 있는 상대좌표공간에서의 물리량 $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\mathrm{nr}}$)는 절대좌표계의 물리량 $\mathbf{X}$ 로 식 (14)와 같이 표현되고 이를 순환공식으로 표현하면 식 (15)와 같이 표현된다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{x} \tag{14}$$

$$\mathbf{X}_j = \mathbf{B}_{ij}^1 \mathbf{X}_i + \mathbf{B}_{ij}^2 \mathbf{x}_{ij} \tag{15}$$

또한, 이를 역으로 생각해 보면 $\mathbf{R}^{\mathrm{nc}}$ 공간에 있는 벡터 $\mathbf{G}$ 는 $\mathbf{g} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}$ 를 이용하여 $\mathbf{R}^{\mathrm{nr}}$ 공간으로 변환할 수 있다. 이러한 변환은 절대좌표계에서 계산된 힘과 같은 물리량을 조인트 공간(joint space)에서 표현되는 일반화된 힘(generalized force)으로 변환할 때 매우 유용하다. 한편, 절대좌표계에서의 힘 $\mathbf{Q}$ 에 의해 행해진 가상일(virtual work)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta \mathbf{W} = \delta \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} \tag{16}$$

여기에서 $\delta \mathbf{Z}$ 는 시스템에 있는 모든 구속조건들에 대해 운동학적으로 허용가능 한 변분(variation)이어야 한다. $\delta \mathbf{Z} = \mathbf{B}\delta \mathbf{q}$ 를 식 (16)에 적용하면 식 (17)을 얻을 수 있다.

$$\delta \mathbf{W} = \delta \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} = \delta \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}^{*} \tag{17}$$

여기에서 $\mathbf{Q}^{*} \equiv \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$ 는 상대좌표계에서의 일반화된 힘을 나타낸다.

결과적으로, 일반적인 구속 시스템(constrained system)에 대한 조인트 공간에서의 운동방정식은 속도변환행렬을 이용하여 식 (18)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{M}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{Z}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q} \right) = \mathbf{0} \tag{18}$$

여기에서, $\mathbf{\Phi}$ 는 컷 조인트(cut joint, 스패닝트리를 정의할 때 closed-loop 시스템을 open-loop 시스템으로 만들기 위해 사용되는 구속조건)에 대한 구속조건식을 나타내며 $\boldsymbol{\lambda}$ 는 이에 대응하는 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)이다. $\mathbf{M}$ 은 질량행렬이며 $\mathbf{Q}$ 는 절대좌표계에서 표현되는 힘으로 일반적으로 외력(external force)등을 포함한다.

3. 동시회전 기법을 기반으로 한 증분 유한요소법

동시회전 기법(corotational procedure)을 기반으로 한 증분법(incremental formulation)은 주로 비선형 대회전 구조해석 문제의 해결을 위해 유한요소 해석에서 많이 사용되어져 왔다. 이 방법의 주요 개념은 지속적으로 병진과 회전을 하고 있는 유한요소에 대해 유한요소와 함께 움직이는 국부 요소좌표계(local

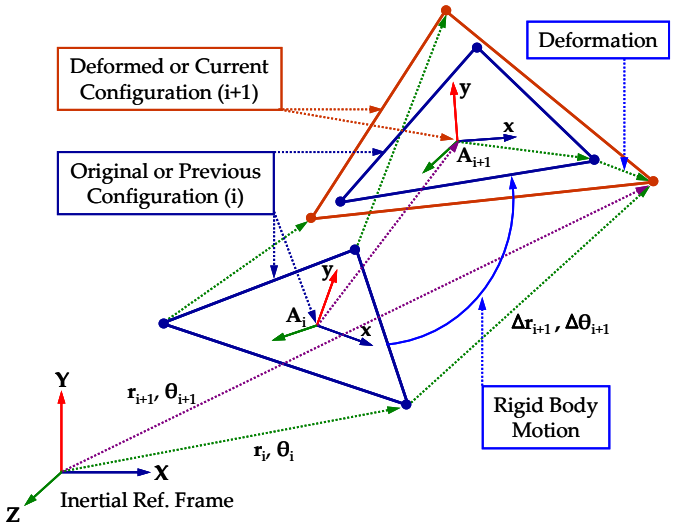

Fig. 2 The schematic diagram for the incremental formulation with co-rotational procedure

element reference frame)를 사용함으로써, 유한요소의 강체 운동(rigid body motion)과 순수 변형(pure deformation)을 분리하여 해석을 진행하는 것으로 유한요소 정식화와는 독립적으로 처리될 수 있다. 결과적으로, 유한요소의 병진/회전과 같은 강체 운동에 대한 부분은 국부 요소좌표계를 사용함으로써 전체 변위장(global displacement field)에서 제거될 수 있고, 이를 통해 응력/변형률에 직접적인 영향을 주는 순수 변형을 정의하여 유한요소 정식화 및 해석을 수행할 수 있다. 이때, 유한요소 방정식은 1 차적으로 요소좌표계에서 정의되고 이후에 전체 기준좌표계(global inertial reference frame)로 변환되어 처리된다. 이러한 방정식들은 이전 스텝과 현재 스텝 사이의 증분량을 이용하여 정의/해석되어지며, 유한요소의 이전 스텝에서의 값에 더해져서 현재의 위치와 자세 등을 표현하도록 처리된다. 이러한 동시회전기법을 기반으로 한 증분법은 여러 상용 구조해석 프로그램에도 사용되고 있다[3-5]. 리커다인 또한 이 방법을 이용하여 MFBD 솔버에서 유한요소 방정식을 효과적으로 정의/해석하고 있다. 일반적으로, 이러한 접근 방법은 동역학 문제와 같이 비선형 대변위 문제에 매우 효과적이며 요소의 순수 변형이 아주 크지 않은 범주의 문제에 적합하다. 특히 결과의 정밀도를 유지하기 위해서는 각 시간 스텝사이의 증분량이 너무 크지 않도록 시간 적분을 수행해야 한다.

리커다인은, 동시회전 기법을 기반으로한 증분법을 적용하기 위해, 유한요소에 대한 일반좌표계를 식 (19)와 같이 정의하였다.

$$\left\{\mathbf{q}_{i+1}^{e}\right\} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{r}_{i+1} \\ \Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1} \end{Bmatrix} \tag{19}$$

여기에서, $\Delta\mathbf{r}_{i+1}$ 는 Fig. 2 에 나타난 것과 같이 병진에 대한 증분항이며, $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}$ 는 회전에 대한 증분항으로 아래의 식 (20)~(23)과 같이 정의된다.

$$\mathbf{A}_{i+1} \equiv \mathbf{A}_i \Delta\mathbf{A}_{i+1} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{A}_{i+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\theta_x & -\sin\Delta\theta_x \\ 0 & \sin\Delta\theta_x & \cos\Delta\theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta_y & 0 & \sin\Delta\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Delta\theta_y & 0 & \cos\Delta\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta_z & -\sin\Delta\theta_z & 0 \\ \sin\Delta\theta_z & \cos\Delta\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta_y\cos\Delta\theta_z & -\cos\Delta\theta_y\sin\Delta\theta_z & \sin\Delta\theta_y \\ \sin\Delta\theta_x\sin\Delta\theta_y\cos\Delta\theta_z + \cos\Delta\theta_x\sin\Delta\theta_z & -\sin\Delta\theta_x\sin\Delta\theta_y\sin\Delta\theta_z + \cos\Delta\theta_x\cos\Delta\theta_z & -\sin\Delta\theta_x\cos\Delta\theta_y \\ -\cos\Delta\theta_x\sin\Delta\theta_y\cos\Delta\theta_z + \sin\Delta\theta_x\sin\Delta\theta_z & \cos\Delta\theta_x\sin\Delta\theta_y\sin\Delta\theta_z + \sin\Delta\theta_x\cos\Delta\theta_z & \cos\Delta\theta_x\cos\Delta\theta_y \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{21}$$

위 식에서 $\Delta\theta_x$, $\Delta\theta_y$, $\Delta\theta_z$ 는 증분량이므로 값이 1 보다 매우 작다고 가정할 수 있으므로 식 (21)은 다음과 같이 단순화될 수 있다.

$$\Delta\mathbf{A}_{i+1} \equiv \mathbf{A}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{i+1} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -\sin\Delta\theta_z & \sin\Delta\theta_y \\ \sin\Delta\theta_z & 1 & -\sin\Delta\theta_x \\ -\sin\Delta\theta_y & \sin\Delta\theta_x & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 1 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

결과적으로, $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1}$는 식 (22)로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{i+1} \equiv \begin{Bmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{Bmatrix} \tag{23}$$

4. 강체와 유연체의 연결을 위한 요소

4.1 가상 강체 바디

가상 강체 바디는 리커다인에서 MFBD 솔버를 효과적으로 처리하게 하는 주요 개념 중 하나이다. 이를 설명하기 위해 다음과 같은 강체-유연체 상황을 고려해 보도록 한다.

3 차원 공간상에 존재하는 2 개의 인접한 강체와 유연체의 어떤 노드(node)에 대한 좌표계를 Fig. 3 에 나타내었다. 이때 유의할 점은 유연체에 존재하는 많은 수의 노드들 중 조인트에 의해서 연결되는 노드는 하나이며, 리커다인에서는 그 노드를 바디처럼 인식한다는 점이다. 이러한 상황에서, 2 개의 바디(하나는 강체이며 다른 하나는 유연체에 존재하는 노달 바디임)가 조인트에 의해 연결되어져 있으며 외력 **Q** 가 유연체의 노드에 작용하고 있는 상황이라 가정하자. 2 장에서 설명된 Fig. 1 과 마찬가지로, Fig. 3 에서도 X-Y-Z 는 절대 기준좌표계(global inertial reference frame)이고, x′-y′-z′ 는 기준좌표계에서 정의되는 바디좌표계(body reference frame)이다. 첨자 i 는 강체바디를 의미하며, 첨자 j 는 유연체에 속해 있는 노달(nodal) 바디를 나타낸다.

이러한 상황은 강체-강체 사이에서 정의된 조인트 요소와 힘 요소를 이용해서는 처리하기가 어려울 수 있다. 즉, MFBD 와 같이, 유한요소를 동역학 기반에서 효과적으로 모델링/해석할 수 있도록 하기 위해서는 강체 모델링에 사용되는 조인트 요소 및 힘 요소의 처리를 유연체까지 확대할 필요가 있다. 일반적으로 다양한 조인트들에 대한 정식화는 강체 동역학 분야에서 주로 정의/개발되었으며 힘 요소들도 마찬가지이다. 이는 개발된 대부분의 조인트 모듈과 힘 모듈이 강체를 근간으로 개발되었음을 의미한다. 하지만 Fig. 3 과 같이 강체와 유연체가 어떤 조인트에 의해 연결되어지고 유연체에 힘이 작용한다고 하는 상황에서는 강체 동역학에서 사용된 조인트 요소와 힘 요소를 그대로 사용할 수 없다. 이는 강체와 유연체에 대한 좌표계의 처리나 정의 등이 다를 수 있기 때문이다. 이러한 상황에서 MFBD 를 구현하려면 강체-강체 사이에서 정의된 조인트와 힘 모듈들을 강체-유연체, 유연체-강체, 유연체-유연체 등과 같은 상황에서 모두 다시 새롭게 정의/개발해야 한다는 것을 의미한다. 이러한 개발은 많은 시간을 필요로 할 뿐만 아니라 유지보수에도 많은 어려움을 가중시킬 수 있는 요인이 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 리커다인은 가상 강체 바디를 도입하였다.

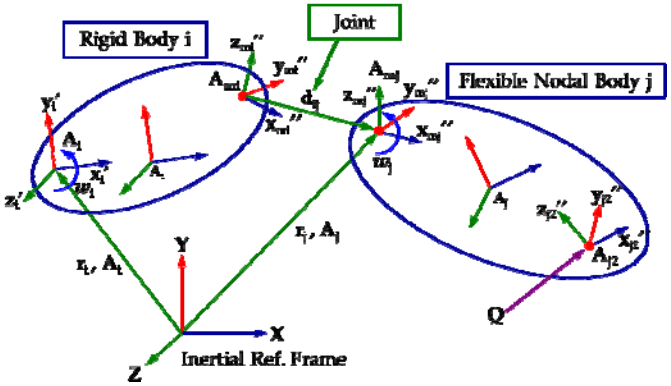

Fig. 3 The coordinate systems for two adjacent rigid and flexible nodal bodies

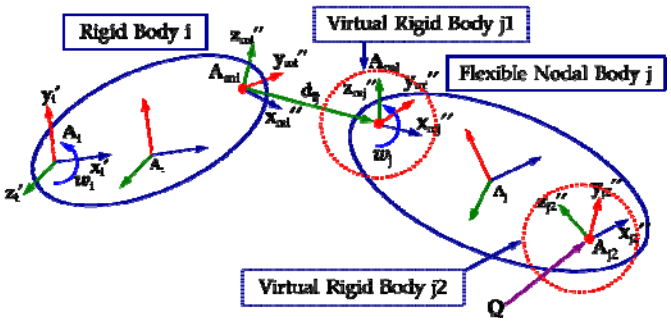

Fig. 4 The concept of virtual body

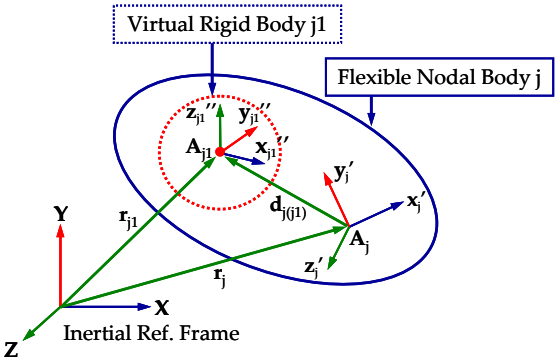

Fig. 5 Flexible body joint

즉, 질량과 관성모멘트가 0 인 가상 강체 바디들을 모든 조인트와 힘 요소가 적용된 지점에 도입하고, 강체-유연체 사이에 정의된 조인트와 힘 요소를 강체와 가상 강체 바디 사이에 정의되도록 하는 것이다. 또한, 가상 강체 바디와 실제 유연체에 속해 있는 노달 바디 사이를 고정시키는 구속조건을 도입하면 모델링 하고자 하던 조인트와 힘 요소를 대체할 수 있게 되는 것이다. 이러한 가상 강체 바디를 도입한 경우의 개략도를 Fig. 4 에 나타내었다.

4.2 강체 사이의 조인트 구속조건

일반적으로 조인트는 두개의 인접한 강체내에 정의된 벡터들에 대한 평행 조건과 수직 조건을 부여함으로써 표현된다. 강체에 대한 구속조건에 대한 모듈들은 이미 정형화되어 있으며 다양한 종류의 조인트를 개발할 때 기초가 되고 있다[7-8]. 이러한 조건들은 강체 내부에 조인트 마커들을 정의함으로써 쉽게 표현될 수 있다. 한편, 일반적으로 조인트 마커의 위치와 자세는 바디좌표계와 동일하지 않지만, 리커다인에 도입된 가상 강체 바디의 경우에는 편의상 바디좌표계와 조인트 마커의 위치/자세를 동일하게 처리한다. 다시 말해, 가상 강체 바디는 실질적으로 부피가 없는 가상의 바디이기 때문에, 실질적으로 존재하는 조인트 마커의 위치와 자세를 이용하여 가상 강체 바디의 위치와 자세를 결정한다.

4.3 유연체 바디와 가상 바디 사이의 유연체 조인트

4.1 절과 4.2 절에서도 언급되었듯이, 가상 강체 바디를 도입하여 유연체에 연결된 구속조건이나 힘 요소를 가상 강체 바디에 대체하였기 때문에, 추가적으로 가상 강체 바디와 유연체의 노드 사이에 적절한 구속조건을 추가해 주어야 한다. 이러한 추가적인 구속조건을 유연체 조인트(flexible body joint)라 부르며 개념도를 Fig. 5 에 나타내었다. Fig. 5 에 표현된 바와 같이, 유연체의 노달 바디에 대한 바디좌표계는 $\mathbf{r}_j$ 와 $\mathbf{A}_j$ 로 표현하며, 유사하게 가상 강체 바디에 대한 위치와 자세는 $\mathbf{r}_{j1}$ 과 $\mathbf{A}_{j1}$ 으로 표현한다.

결과적으로, 유연체 조인트는 유연체 노달 바디와 가상 강체 바디를 고정(fixed)시키는 역할을 해야 하므로, 식 (24)와 같이 병진과 회전에 대한 자유도를 모두 구속하는 요소로 정의된다.

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{j(j1)} \\ \boldsymbol{\theta}(d\mathbf{A}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j1} \\ \boldsymbol{\theta}\left(\left(\mathbf{A}_j\mathbf{C}_j\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{j1} - \mathbf{I}\right) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{24}$$

여기에서 $\mathbf{C}_j$ 는 초기상황(original configuration)에서 $\mathbf{A}_j$ 에 대한 $\mathbf{A}_{j1}$ 의 상대 자세행렬로 일정한 값으로 정의되며, $d\mathbf{A}$ 는 회전에 의해 유발된 상대 회전행렬이다. $\boldsymbol{\theta}(d\mathbf{A})$ 는 $d\mathbf{A}$ 의해 나타나는 각을 벡터 형태로 표현한 것이다.

5. 유연 다물체 동역학에 대한 통합 운동방정식

강체와 유연체를 통합하는 MFBD 시스템에 대한 운동방정식은 서로를 고려한 강체에 대한 운동방정식과 유연체에 대한 운동방정식을 통합하여 정식화된다. 결과적으로 유연체를 고려한 강체에 대한 운동방정식은 식 (18)을 확장하여 얻어지는데 이때 유연체 조인트에 의해 추가되는 구속조건이 함께 고려가 되어 최종적으로는 식 (25)와 같이 표현된다.

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{M}^r\dot{\mathbf{Y}}^r + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{z}}^{rr\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{rr} + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{z}}^{er\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{er} - \mathbf{Q}^r\right) = \mathbf{0} \tag{25}$$

여기에서 첨자 r 은 강체에 대한 식을 나타내며, 첨자 rr 은 강체-강체 사이의 식, 첨자 er 은 유연체와 강체 사이의 식을 나타낸다. 또한, 강체 사이의 구속조건식은 다음과 같이 강체의 일반좌표계 $\mathbf{q}^r$ 로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{\Phi}^{rr}\left(\mathbf{q}^r\right) = \mathbf{0} \tag{26}$$

강체에 대한 운동방정식과 유사하게 유연체에 대한 운동방적식은 식 (27)과 같이 표현되는데 유연체에 대한 식은 상대좌표계 공간이 아닌 절대좌표계 공간에서 정의됨에 유의한다.

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{M}^e\ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}^e}^{ee\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{ee} + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}^e}^{er\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{er} - \mathbf{Q}^e = \mathbf{0} \tag{27}$$

여기에서, 첨자 e 는 유연체 노달 바디에 대한 식을 의미하며 $\mathbf{q}^e$ 는 유연체 노달 바디에 대한 일반좌표계를 나타낸다. 또한, 첨자 ee 는 유연체 노달 바디사이의 식을 나타내며, 첨자 er 은 식 (25)에서와 같이 유연체 노달 바디와 강체 사이의 식을 나타낸다. 힘 $\mathbf{Q}^e$ 는 유연체 노달 바디에 적용되는 힘으로써 중력을 포함한다.

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{Q}^{element} + \mathbf{Q}^{gravity} \tag{28}$$

또한, 식 (24)에서 정의한 유연체 노달 바디와 가상 강체 바디 사이에 적용되는 유연체 조인트에 대한 구속조건이 $\mathbf{\Phi}^{er}$ 로 정의되어 사용된다.

$$\mathbf{\Phi}^{er}\left(\mathbf{q}^e, \mathbf{q}^r\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_j^e - \mathbf{r}_{j1}^r \\ \boldsymbol{\theta}\left(\left(\mathbf{A}_j\mathbf{C}_j\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{j1} - \mathbf{I}\right) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{29}$$

유사하게, 유연체 노달 바디들 사이의 구속조건식 $\mathbf{\Phi}^{ee}$ 는 식 (30)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{\Phi}^{ee}\left(\mathbf{q}^e\right) = \mathbf{0} \tag{30}$$

위의 식들이 만족되도록 문제를 푸는 것이 강체와 유연체가 통합된 MFBD 시스템을 해석하는 것이며, 리커다인은 이러한 비선형 방정식을 풀기 위해 식 (31)과 같은 Newton-Rhapson 방정식을 사용하여 암시

적 접근법(implicit method)으로 통합 MFBD 방정식을 해석한다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \mathbf{q}^e} & \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}^e}^{ee\,\mathrm{T}} & \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \mathbf{q}^r} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}^e}^{er\,\mathrm{T}} \\ \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}^e}^{ee} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^r}{\partial \mathbf{q}^e} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{F}^r}{\partial \mathbf{q}^r} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{z}}^{rr\,\mathrm{T}} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{z}}^{er\,\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}^r}^{rr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}^e}^{er} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}^r}^{er} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q}^{ee} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{ee} \\ \Delta\mathbf{q}^{rr} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{rr} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{er} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{F}^e \\ \mathbf{\Phi}^{ee} \\ \mathbf{F}^r \\ \mathbf{\Phi}^{rr} \\ \mathbf{\Phi}^{er} \end{bmatrix} \tag{31}$$

6. 결 론

리커다인은 강체와 유연체가 함께 존재하는 유연 다물체 동역학 문제를 해석하기 위해 순환공식을 이용한 강체 동역학 기법과 동시회전 기법을 기반으로 한 증분 유한요소 기법을 사용하는 유연체 동역학 기법을 하나의 솔버에 탑재하고 있다. 리커다인에서 채택하고 있는 이러한 방법은 대변위, 대변형, 대회전을 하는 유연 다물체 동역학 문제를 효과적이고 쉽게 해석하는데 적합하다고 볼 수 있다. 또한 이러한 유연 다물체 동역학 문제를 해석함에 있어 중요한 요소 중 하나는 강체 동역학과 유연체 동역학을 어떻게 일반화하여 통합 해석하느냐이다. 리커다인은 이러한 어려움을 해결하기 위해 가상 바디를 도입하여 강체 동역학에서 사용되는 조인트 요소와 힘 요소 등을 효과적으로 일반화하였으며, 일반화 과정에서 유연체 조인트가 사용되었다. 결과적으로 리커다인은 강체 동역학 모델과 유연체 동역학 모델, 그리고 이들을 자동으로 연결하는 가상바디와 유연체 조인트를 사용하여 하나의 솔버에서 유연 다물체 동역학 문제를 해석할 수 있는 통합환경을 제공함으로써, 보다 쉽고 자연스러운 모델링과 해석을 진행할 수 있도록 하였다. 본 논문에서는 이러한 과정에서 사용된 중요한 개념들에 대해 살펴보았다.

참고문헌
(References)

(1) 2014, RecurDyn^{TM} Help Library, FunctionBay, Inc., http://www.functionbay.co.kr.
(2) Choi, J., 2009, A Study on the Analysis of Rigid and Flexible Body Dynamics with Contact, PhD Dissertation, Seoul National University, Seoul.
(3) Choi, J., Ryu, H. S., Choi, J. H., 2009, Multi Flexible Body Dynamics Using Incremental Finite Element Formulation, *ECCOMAS Thematic Conference, Warsaw, Poland, 29 June - 2 July*.
(4) Wempner, G., 1969, Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells, *International Journal of Solids and Structures*, **5**, pp. 117~153.
(5) Belytschko, T. and Hsieh, B. J., 1973, Non-Linear Transient Finite Element Analysis with Convected Co-ordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **7**, pp. 255~271.
(6) Bae, D. S., Han, J. M., Choi, J. H. and Yang, S. M., 2001, A Generalized Recursive Formulation for Constrained Flexible Multibody Dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, pp. 1841~1859.
(7) Shabana, A. A., 2005, Dynamics of Multibody Systems, 3rd Edition, Cambridge University Press.
(8) Haug, E. J., 1989, *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Volume I: Basic Methods*, Allyn and Bacon Series in Engineering.