

# 아이소-지오메트릭 최적설계 Isogeometric Optimal Design

## 1. 서론

최근의 높은 원유가 및 철강재 가격으로 인하여 에너지 및 원자재 절약의 관점에서 시스템의 요구 성능을 만족하면서 최소중량을 갖는 최적설계의 필요성이 증대되고 있다. 또한 NT, BT, IT 등 미래 첨단기술 분야에서 필요로 하는 MEMS, 컴플라이언트 메카니즘, 복합재료의 구조설계 등에서 초소형, 고정밀 설계가 요구됨에 따라 “기하학적 엄밀성과 비선형성을 고려한 새로운 최적설계”의 필요성이 대두되고 있다. 최근 십여 년간 최적설계 기술은 시스템의 배치를 최적으로 결정하는 위상설계를 중심으로 발전하여 왔는데, 이는 설계개선의 효과가 매우 크며 창조적인 설계에 필수적인 방법론으로 알려져 있다. 그러나 위상을 표현하는 밀도함수로 인하여 그림 1의 왼편과 같이 비선형 응답해석에서 극복하기 어려운 수렴성 문제가 발생하였다.

정체되어 있는 현재 최적설계 방법론의 미래의 방향에 대해서 세계적 전문가들은 “형상설계에 기초한 위상 최적설계”로 예측하고 있다. 2003년에는 CAD 모델 없이 암시적 경계를 사용하는 레벨셋 형상 최적설계가 제안되었으나 암시적 경계의 엄밀성 부족, 이로 인한 응답 및 설계민감도의 부정확성 등으로 인하여 정밀한 최적설계를 얻기는 어려우며 비선형 문제에서는 그림 1의 오른편과 같이 여전히 수렴성 문제를 안고 있다.

2005년에는 CAD의 형상을 표현하는 NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)를 활용하여 해석공간의 기저함수를 구성하는 “아이소-지오메트릭 해석 (IGA)”이 제안되었는데, 이는 CAD 형상의 구성 단계에서 이산화(Discretization)가 이루어져서 경계에서 법선, 곡률 등의 절사(Truncation)가 원천적으로 방지되므로 유한요소해석(FEA)에 비해 “엄밀한 기하형상이 고려된 응답”을 얻을 수 있는 강점이 있다. 그림 2에서 IGA는 FEA에 비해 적은 수의 요소로 연속성이 높은 결과를 제공한다.



조 선 호

서울대학교 조선해양공학과 교수



윤 민 호

아이소-지오메트릭 최적설계 창의연구단 박사후연구원

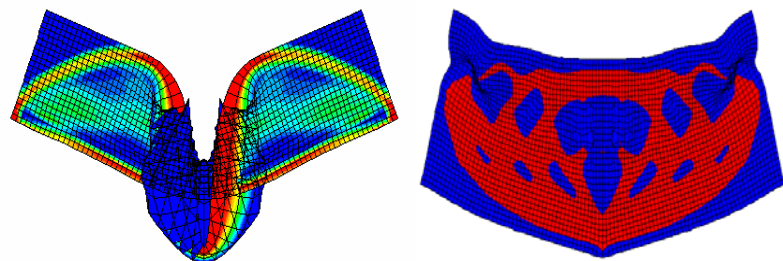


그림 1 비선형 위상 최적설계에서의 수렴성 문제

그림 3에서는 제품개발 각 단계에서 최적설계의 역할을 보여준다. 현재 세계적으로 CAD시장은 5~10조원, CAE (Computer-Aided Engineering)시장은 1~2조원 규모의 큰 시장이다. 이를 통합하여 새로운 큰 시장 가치를 창출할 수 있는 형상 최적설계 분야는 두 분야 간의 데이터 공유부족, 설계 파라미터 수정의 어려움 등의 장벽으로 인하여 통합된 발전이 어려웠다. “아이소-지오메트릭 최적설계”는 CAD와 CAE를 하나의 구성으로 융합하여 새로운 가치와 시장을 창출하고, 비선형 분야에서 기존 위상 최적설계 기법의 한계를 극복할 수 있을 것으로 기대되고 있다.

## 2. 아이소-지오메트릭 기법

아이소-지오메트릭 해석은 CAD 모델링에 사용된 B-spline 기저함수를 응답해석 공간의 기저함수로 직접 사용하는 기법으로서 기존 유한요소법에 비교하여 엄밀한 기하형상, 간단한 요소 세밀화(Refinement) 그리고 높은 연속성 등의 많은 수치적 장점을 가지고 있다.

### 2.1 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)

#### 2.1.1 NURBS 기저 함수

1차원 문제에서의 노트 벡터는 파라메트릭 좌표계에서의 좌표들의 집합이다.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

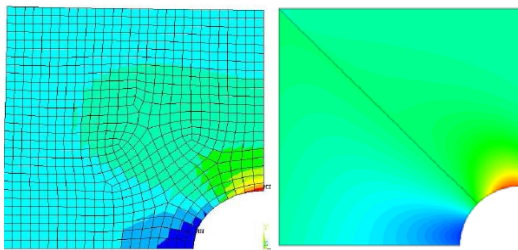


그림 2 유공판의 응력집중 문제 (좌: FEM, 우: IGA)

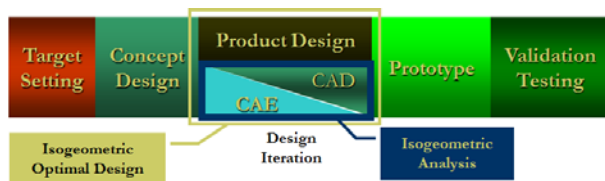


그림 3 제품개발 과정에서 최적설계의 역할

여기서  $p$ 는 사용되는 기저함수의 차수이고,  $n$ 은 기저함수의 개수이다. 따라서  $p$ 차의 기저함수  $n$ 개를 사용하게 되면 총  $n + p + 1$ 개의 노트벡터가 사용된다. 만일 노트 벡터가 파라메트릭 공간상에 균일하게 분포되어 있으면 균일(Uniform) 노트벡터, 불균일하게 분포되어 있으면 불균일(Non-uniform) 노트벡터라고 한다. 그리고 한 노트값이 같은 좌표에 여러 번 반복될 수 있는데, 이때를 중복(Repeated) 노트벡터라고 한다. 또한 첫 번째와 마지막 노트가  $p + 1$ 번 반복되면 열린(Open) 노트벡터라고 한다. 아이소-지오메트릭 해석법에서는 해 공간의 기저함수가 CAD 형상을 표현하는데 사용된 B-spline을 이용하여 다음과 같이 재귀적으로 구성된다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (p=0) \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

위의 기저함수와 그의 미분값을 그려보면 그림 4와 같다. 1차의 B-spline 기저함수를 사용하였을 때는 그림 4(a)에서와 같이 유한요소법의 기저함수와 동일하다. 그러나 2차 이상의 기저함수에 대해서는 기존의 유한요소법과는 다르게 된다. B-spline 기저함수의 중요한 성질을 정리하면 다음과 같다.

$$(1) \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \quad (\text{Partition of unity})$$

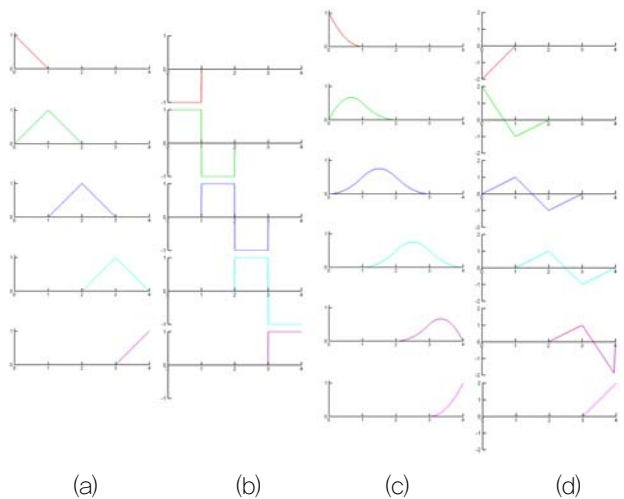


그림 4 기저함수와 미분값

- (2)  $N_{i,p}(\xi)$  is contained in interval  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$   
(Compact support)
- (3)  $N_{i,p}(\xi) \geq 0$  (Non-negativity)

그림 4의 (b), (d)는 그림 4의 (a), (c)에서 사용되었던 1차와 2차 B-spline 기저함수에 대한 미분값을 나타낸 그림이다. 1차 기저함수를 미분하게 되면 불연속한 미분값이 생기나 2차 기저함수의 경우에는 연속한 미분값을 얻게 된다. 따라서 변형도(Strain)나 응력(Stress)과 같이 변위장을 미분해서 얻을 수 있는 값에 대해서도 연속적인 해석 결과를 얻을 수 있다. NURBS 기저함수  $R_{i,p}(\xi)$ 는 B-spline 기저함수  $N_{i,p}(\xi)$ 와 위의 기저함수와 대응되는 가중치  $w_i$ 를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^p N_{i,p}(\xi)w_i} \quad (4)$$

1차원 문제에서의 파라메트릭 NURBS 곡선은 NURBS 기저함수의 선형결합으로 얻어지는데 기저함수들의 계수가 조정점(Control point)이 된다.  $n$ 개의  $p$ 차 기저함수  $R_{i,p}$ 와 대응되는 조정점  $B_i$ 가 주어졌을 때, NURBS 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi)B_i \quad (5)$$

이 때, NURBS 곡선의 특징은 다음과 같다.

- (1)  $p-1$ 차의 미분값에 대한 연속성을 가진다.
- (2) 중복된 노트나 조정점이  $k$ 번 사용되면, 미분의 연속성이  $k$ 차 만큼 감소한다.
- (3) 조정점들을 움직이게 되면 NURBS 곡선이 따라 변하게 된다.

앞서 얻은 NURBS 곡선을 바탕으로 아래와 같이 텐서 곱으로 NURBS 평면을 표현할 수 있다. 노트벡터는  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ ,  $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{l+q+1}\}$ 이다.

$$\mathcal{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,p}(\xi) L_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (6)$$

여기서,  $R_{i,p}(\xi), L_{j,q}(\eta)$  는 각각  $\xi, \eta$  방향으로의 유리 기

저함수이다. 수치적분을 위한  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$  구간이 기존의 유한요소법에서의 요소(Element) 역할을 하게 된다.

### 2.1.2 H-정밀화 (H-refinement)

h-정밀화는 기존의 노트 벡터에 노트를 추가(Knot insertion) 하는 것을 의미한다. 기존의 유한요소법에서 해석의 정확도를 높이기 위해서 요소망을 재구성(Remeshing) 하듯이 아이소-지오메트릭 해석에서는 h-정밀화를 사용한다. 주어진 노트벡터  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 와 조정점  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 에 대해서 새로운 노트  $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ 를 추가할 때, 새 노트벡터  $\bar{\Xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 와  $n+1$ 개의 조정점  $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+1}\}$ 은 다음과 같이 구성된다.

$$\bar{B}_i = \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) B_{i-1} \quad (7)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0 & k+1 \leq i \leq n+1 \end{cases} \quad (8)$$

실제로 h-refinement를 수행한 결과는 그림 5와 같다.

### 2.2 아이소-지오메트릭 해석

아이소-지오메트릭 해석에서 해 공간  $z$ 는 CAD 형상  $x$ 를 표현하는 NURBS와 동일한 형상함수를 이용하여(Isoparametric) 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) B_i \quad (9)$$

$$\mathbf{z}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{y}_i \quad (10)$$

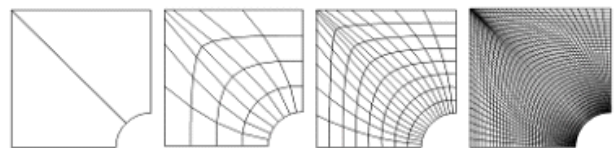
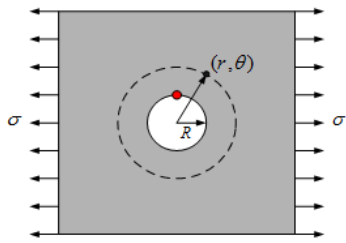


그림 5 H-refinement

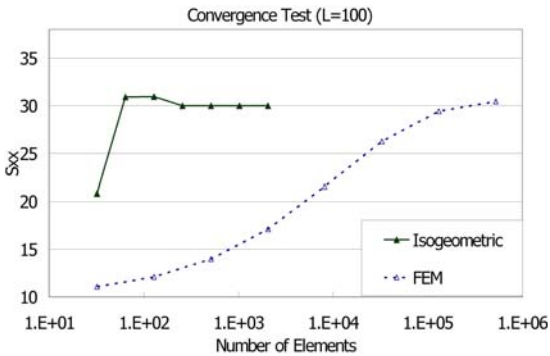
그림 6(a)와 같이 구멍이 있는 무한 크기의 평판에 대해서 최 대응력의 엄밀해(Exact Solution)는 구멍의 상하 끝단에서 외력  $T_x$ 의 3 배인 30으로 알려져 있다. 그림 6(b)에서 아이소-지오 메트릭 해석(실선)은 유한요소법(점선)에 비해 적은 수의 요소 로도 엄밀해에 빠른 수렴을 보임을 알 수 있다. 이는 유한요소 법에서 요소 사이에서  $C^0$ 의 연속성을 가지는 것에 비해 아이 소-지오메트릭 방법론에서는 NURBS 기저함수를 이용한 높은 차원의 연속성이 보장되기 때문이다.

### 2.3 경계 조건 부여

아이소-지오메트릭 방법론에서는 그림 7에서와 같이 NURBS 함수의 비보간적(non-interpolatory) 특성으로 인하여 기저함수의



(a) 무한평판 모델



(b) 엄밀해로의 수렴성

그림 6 유공판의 응력집중 문제( $T_x = 10$ )

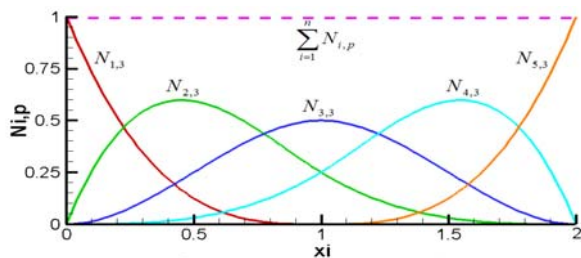
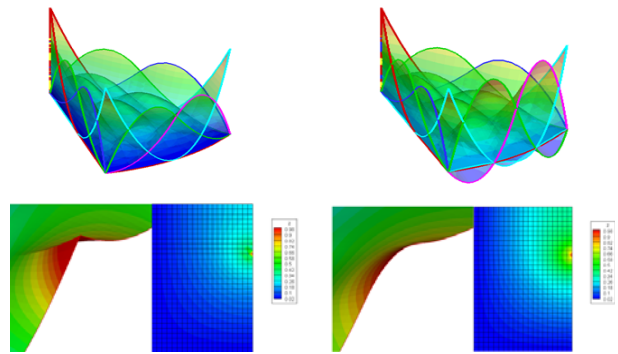


그림 7 NURBS 기저함수(3차)의 비보간성

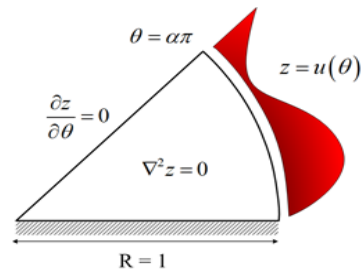
계수에 해당하는 조정점이 실제 기하영역 위에 존재하지 않아, 직관적인 필수 경계조건의 부여가 쉽지 않다.

이를 해결하기 위한 기존 방법론으로는 페널티(Penalty), 니체(Nitsche) 방법론 등이 있으나 수치적 불안정성의 한계점을 가지 고 있다. 최근에는 그림 8과 같은 수정 NURBS 기저함수를 사 용하여 Kronecker Delta Property를 갖도록 기저함수 변환법이 개발되었다. 이러한 방법론은 기존의 아이소-지오메트릭 해석에 서 변위 경계에서의 엄밀성이 떨어지는 한계를 극복할 수 있다 는 장점이 있다. 그림 9에서는 Laplacian 문제에 대하여 기존의



(a) NURBS (b) Transformed NURBS

그림 8 기저함수 변환법을 이용한 NURBS



Analytic (Exact) Solution

$$u = f(\theta) = 9\theta - 48 \frac{\theta^2}{(2\alpha\pi)} + 64 \frac{\theta^3}{(2\alpha\pi)^2}$$

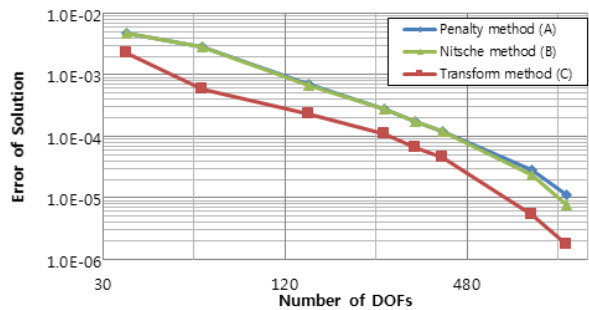


그림 9 Laplacian 문제

방법론과 기저함수 변환법을 h-정밀화에 따른 해의 수렴성과 정확성을 확인하였을 때, 변환법이 기존의 다른 방법론 보다 더 정확한 해석결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

### 3. 아이소-지오메트릭 최적설계

유한요소 기반 형상 최적화 기법은 설계 매개변수화에 어려움이 있으나 아이소-지오메트릭 기법에서는 기하학적 특성이 NURBS 기저함수와 조정점에 내재되어 있으며, 이들의 변경은 연속성이 높은 형상변화를 자연스럽게 제공한다. 따라서 응답 해석과 형상 설계민감도 해석에서 엄밀한 기하형상 모델을 사용할 수 있으며 전체 설계공간에서 법선과 곡률 함수가 연속적이므로 향상된 형상 설계민감도와 결과적으로 정밀한 형상 최적설계를 얻을 수 있다. 조정점의 변경은 형상을 변화시키고, 이는 전체 설계영역에서 연속적이다.

#### 3.1 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 해석

그림 10과 같이 현재의 설계영역을  $\Omega$ 라 하고 변형 후의 설계영역을  $\Omega_\tau$ 라 정의한다.

임의의  $\mathbf{x}$  에서의 파라미터  $\tau$  에 의한 변환관계는 식 (11)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{x}_\tau = T(\mathbf{x}, \tau) \tag{11}$$

이 때 설계속도장은 식 (12)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_\tau, \tau) \equiv \frac{d\mathbf{x}_\tau}{d\tau} = \frac{dT(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \tag{12}$$

응답  $z$  에 대해서 전미분은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z} \equiv \frac{d}{d\tau} (z + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}))|_{\tau=0} = z' + \nabla z^T \mathbf{V} \tag{13}$$

일반적인 형태의 영역 적분과 경계적분으로 주어지는 성능 함수  $\psi_1$  과  $\psi_2$  는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\psi_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \tag{14}$$

$$\psi_2 = \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) d\Gamma \tag{15}$$

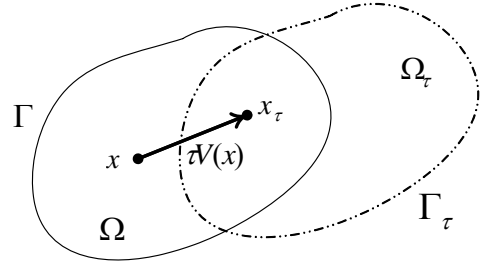


그림 10 설계 영역의 변화

식 (13)을 사용한 성능함수의 전미분은 다음과 같다.

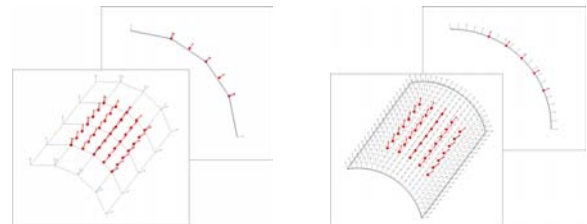
$$\psi_1' = \int_{\Omega} [f'(\mathbf{x}) + \nabla f^T \mathbf{V}(\mathbf{x}) + f \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{x})] d\Omega \tag{16}$$

$$\psi_2' = \int_{\Gamma} [g'(\mathbf{x}) + (\nabla g(\mathbf{x})^T \mathbf{n} + \kappa g(\mathbf{x})) \mathbf{V}^T \mathbf{n}] d\Gamma \tag{17}$$

여기서  $\kappa = \text{div} \mathbf{n}$ 으로서 곡률을 나타낸다. 식 (16), (17)을 이용하여 2차원 선형 탄성문제에 대한 각 조정점의 형상 설계민감도 식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} a(\dot{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}) = & \int_{\Omega} \sum_{I,M}^{CP} (b_{i,m} W_I^p W_M^p + b_i W_I^p W_{M,m}^p) \bar{y}_{il} V_{mm} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \sum_{I,M}^{CP} (t_{i,k} n_k + \kappa t_i) \tilde{W}_I^p \tilde{W}_M^p \bar{y}_{il} V_{mm} n_m d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \sum_{I,K,M}^{CP} C_{ijkl} (W_{I,m}^p W_{M,j}^p W_{K,l}^p + W_{I,j}^p W_{K,m}^p W_{M,l}^p \\ & - W_{I,j}^p W_{K,l}^p W_{M,m}^p) y_{il} \bar{y}_{kk} V_{mm} d\Omega \end{aligned} \tag{18}$$

여기서,  $W_I^p$ 는  $R_{i,p}(\xi)$ 의 임의의 차원을 갖는 일반화된 NURBS 표현식이다. 아이소-지오메트릭 기법을 사용한 설계민감도 해석에서는, 설계하고자 하는 경계가 선형이고 설계영역



(a) 유한요소법 법선벡터 (b) 아이소-지오메트릭 법선벡터

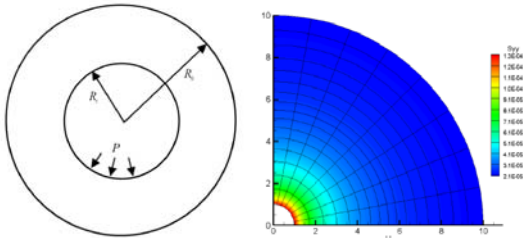
그림 11 아이소-지오메트릭 기법의 정확한 고차원 기하정보(법선벡터)

역이 선형속도에 의해서 변화할 경우 기존의 유한요소법과 동일한 결과를 제공한다. 그러나 유한요소 해석법에서는 그림 11(a)와 같이 형상이 부분 선형적으로 표현되게 되고 이에 따라 정확한 법선벡터가 구해질 수 없다.

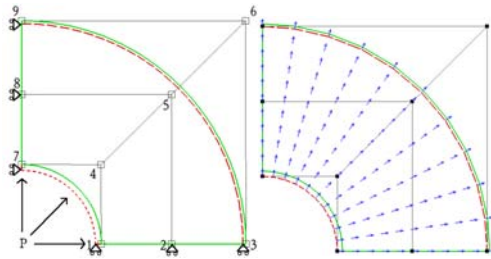
그림 11(b)에서와 같이 아이소-지오메트릭 해석법은 법선 벡터와 곡률의 고차항의 정보를 잃지 않기 때문에 보다 정확한 설계민감도를 얻을 수 있고 결과적으로 정밀한 최적설계 형상을 기대할 수 있다.

그림 12(a)의 내압 파이프 문제에서 그림 12(b)에는 같이 내부 반경  $R_i$ 가 변화될 때의 형상 설계변경에 대한 속도장이 표현되어 있다.

그림 12(c)에서는 구한 아이소-지오메트릭 설계민감도를 유한 차분과 비교하였을 때 곡률  $\kappa$  항을 제외한 경우(Case A; 유한요소 설계민감도와 동일)에는 정확도가 매우 낮았으나, 포함된 경우(Case B)는 단 4개의 요소와 9개의 조정점이 사용되었음에도 불구하고 매우 정확한 결과가 나타나고 있음을 알 수 있다.



(a) 내압 파이프문제 및 응력분포



(b) 아이소-지오메트릭 모델 및 속도장

자유도	유한차분 설계민감도	Iso-geometric 민감도 (A) (곡률항 제외)	Case A 정확도 (%)	Iso-geometric 민감도 (B) (곡률항 고려)	Case B 정확도 (%)
1x	9.42135E-05	2.30892E-05	408.04	9.41939E-05	100.02
3x	6.57607E-05	3.09113E-05	212.74	6.57335E-05	100.04
4x	9.40964E-05	2.30592E-05	408.06	9.40768E-05	100.02
6x	6.56583E-05	3.08643E-05	212.73	6.56312E-05	100.04

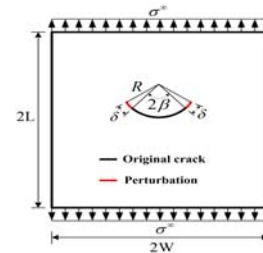
(c) 유한 차분 설계민감도와와의 비교

그림 12 내압 파이프 문제의 설계민감도 해석

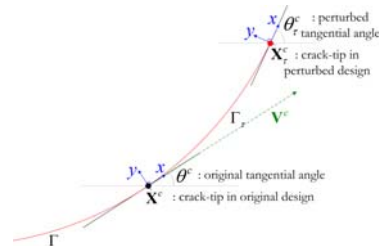
그림 13(a)에서와 같이 원호 형상의 곡선 균열 문제에 대하여 정확한 응답 및 설계민감도 해석을 얻기 위해서는 균열 선단 주변의 응력 분포 및 그 변화를 정확히 계산하는 것이 필수적이다. 아이소-지오메트릭 방법을 통해서서는 엄밀한 기하형상이 반영되는 경계적분이 수행될 수 있으며 휘어진 균열의 진전에 따른 균열 선단에서의 국소 좌표계 변화를 정확히 고려할 수 있다(그림 13(b)). 그림 13(c)에서 2차 아이소-지오메트릭 설계민감도가 기존의 1, 2차 유한요소법에 기반한 설계민감도와 유한차분과 비교하여 보다 정확함을 확인할 수 있다.

### 3.2 아이소-지오메트릭 형상 최적설계

아이소-지오메트릭 형상 최적설계에서 설계변수는 조정점  $B_i$ 이며, 제약조건 함수  $h(B_i, z_i)$ ,  $g(B_i, z_i)$ 를 만족하면서 목적 함수  $\psi(B_i, z_i)$ 를 최소화시키는 문제로 정식화 된다.



(a) 원호 균열에서 설계변화



(b) 국소 좌표계의 변화

$\beta$		Exact Variation (a)	Analytical Variation (b)	FDM Variation (c)	(b)/(a) -100%	
					(b)/(a)	(b)/(c)
15°	Linear FEA	4.3174E-04	5.5820E-04	4.6894E-04	129.29	119.03
	Quadratic FEA	4.3174E-04	4.2910E-04	4.2785E-04	99.39	100.29
	Quadratic IGA	4.3174E-04	4.3772E-04	4.3744E-04	101.39	100.07
	Linear FEA	-7.2792E-05	-4.2941E-04	9.4536E-05	-589.91	454.23
	Quadratic FEA	-7.2792E-05	-5.545E-05	-6.9596E-05	76.31	79.81
	Quadratic IGA	-7.2792E-05	-7.4043E-05	-7.4601E-05	101.72	99.25
30°	Linear FEA	-6.9241E-04	2.6963E-04	-4.0869E-04	-38.94	-65.97
	Quadratic FEA	-6.9241E-04	-6.2372E-04	-6.8168E-04	90.08	91.50
	Quadratic IGA	-6.9241E-04	-7.0847E-04	-7.0931E-04	102.32	99.88
	Linear FEA	-1.2108E-03	-1.3170E-04	-9.0693E-04	-10.88	-14.52
	Quadratic FEA	-1.2108E-03	-1.0508E-03	-1.1922E-03	86.78	88.13
	Quadratic IGA	-1.2108E-03	-1.2460E-03	-1.2471E-03	102.91	99.91
45°	Linear FEM	4.6560E-04	2.0807E-04	3.9332E-04	45.58	52.90
	Quadratic FEM	4.6560E-04	4.5348E-04	4.5516E-04	99.34	99.63
	Quadratic IGA	4.6560E-04	4.6560E-04	4.6567E-04	101.99	99.99
	Linear FEM	7.1809E-04	3.3659E-04	6.5798E-04	46.87	51.15
	Quadratic FEM	7.1809E-04	7.0709E-04	7.1758E-04	98.47	98.54
	Quadratic IGA	7.1809E-04	7.3334E-04	7.3357E-04	102.12	99.97
60°	Linear FEM	6.6987E-04	3.3051E-04	7.0314E-04	49.34	47.01
	Quadratic FEM	6.6987E-04	6.4984E-04	6.7245E-04	97.01	96.64
	Quadratic IGA	6.6987E-04	6.8413E-04	6.8458E-04	102.13	99.93
	Linear FEM	3.0494E-04	1.6935E-04	4.9495E-04	55.53	34.21
	Quadratic FEM	3.0494E-04	2.9116E-04	3.1464E-04	95.48	92.54
	Quadratic IGA	3.0494E-04	3.0921E-04	3.0944E-04	101.40	99.93

(c) 설계민감도 해석 결과

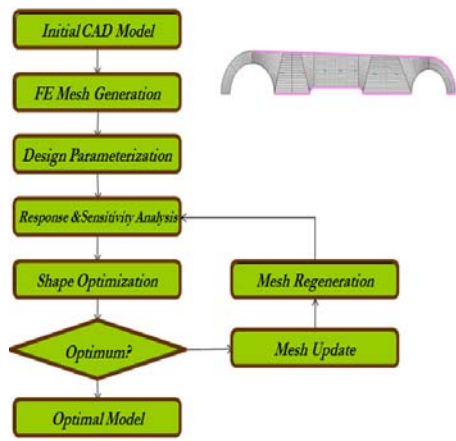
그림 13 원호 균열에서 응력집중계수의 설계민감도

Minimize  $\psi(B_i, z_i)$  (19)

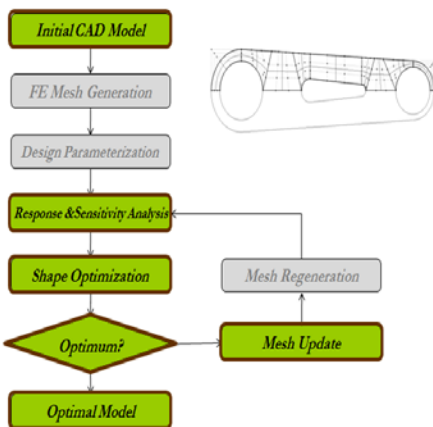
Subject to  $h(B_i, z_i) = 0$  (20)  
 $g(B_i, z_i) \leq 0$

그림 14에는 기존의 유한요소 기반 최적설계와 비교하여 아이소-지오메트릭 최적설계의 흐름도를 보였으며 유한요소망 구성(FE mesh generation), 설계 매개화(Design parameterization), 요소망 재구성(Mesh regeneration) 과정이 생략되어 있음을 알 수 있다. 이는 CAE 해석을 위한 반복적인 일련의 추가 과정이 요구되지 않아 전체 최적설계에 걸리는 시간이 줄어들게 되고 (효율성), CAD에 익숙한 설계자 또한 전문적인 CAE의 배경 지식 없이도 쉽게 최적설계에 접근할 수 있게 한다(용이성).

그림 15는 좌단이 고정되고 우단에서 집중하중을 받는 토오 크 암 문제를 보여준다.



(a) 유한요소법 기반 최적설계

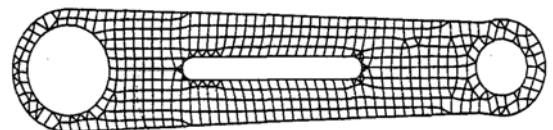


(b) 아이소-지오메트릭 최적설계

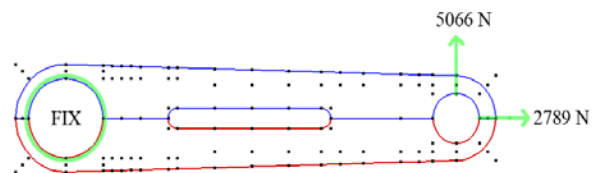
그림 14 최적설계 흐름도의 비교

이 문제에 대해서는 허용응력 조건 하에서 최소의 질량을 갖는 형상 최적설계를 수행하고자 한다. 기하학적 불연속이 발생하는 접합구조에서 유한요소 기반으로 응력완화를 위한 형상 최적설계가 수행된다면 응력의 불연속과 설계민감도의 부정확성으로 인해 바람직한 결과를 얻기 어려우며, 최적설계 도중에 그림 15(a)와 같은 유한요소망을 계속 수정해야 하는 난점이 발생되게 된다. 그러나 15(b)의 아이소-지오메트릭 최적설계에서는 유한요소망 수정의 어려움이 근본적으로 발생되지 않으며 필요에 따라 조정점을 추가하거나 기저함수의 차수를 추가시켜서 더욱 정밀한 형상을 만들 수 있다. 그림 15(c)는 2차 기저함수가 사용된 결과이며, 적은 수의 조정점으로도 모서리가 부드럽게 처리됨으로써 설계민감도가 정확히 구해지고 이를 바탕으로 빠르고 효과적으로 형상 최적설계를 얻을 수 있다.

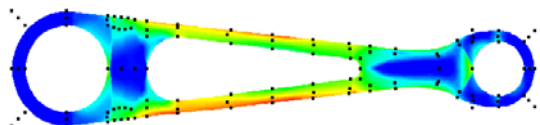
NURBS 평면은 텐서 곱으로 이루어지기 때문에 응력집중 문제 등에서 요구되는 형상의 국부 정밀화나 또는 평면수정이 용이하지 않다. 이를 개선시키는 방법으로 적응성(Adaptivity)을 향상시킨 T-spline이 CAD 분야에서 연구되고 있으며 이를 활용한 아이소-지오메트릭 최적설계도 진행이 되었다. 그림 16(a)의 브라켓 모델에는 T-spline을 이용한 불규칙한 조정점들이 분포되어 있으며, (b)의 아이소-지오메트릭 모델을 이용한 초기 응력해석 결과가 (c)에 나타나 있다. 그림 16(d)에는 이를 활용한 형상 최적설계 결과를 보여주며 적응적 조정점을 이용한 T-spline 기반 아이소 지오메트릭 형상 최적설계에 의해서



(a) 유한요소 모델



(b) 아이소-지오메트릭 모델



(c) 아이소-지오메트릭 최적설계

그림 15 토오 크 암의 아이소-지오메트릭 최적설계

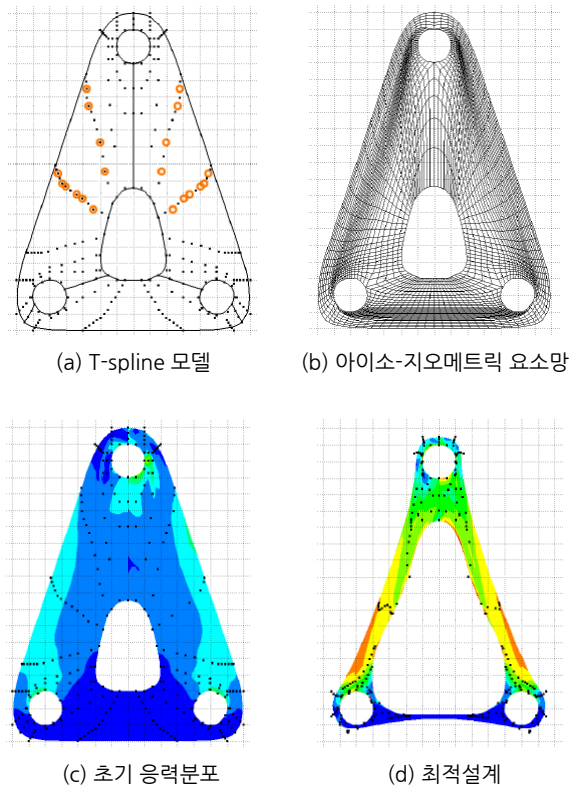


그림 16 T-spline 아이소-지오메트릭 최적설계

도 물리적으로 타당한 결과가 얻어질 수 있음을 알 수 있다. 유한요소 기반 형상 최적설계는 CAD와 해석 모델의 차이로 인해 설계영역 매개 변수화에 어려움이 있으나 아이소-지오메트릭 기반 형상 설계민감도 해석법은 자연스런 설계매개화가 용이한 장점을 가진다. 그러나 상용 CAD 시스템에서는 표면 정보만을 제공하는데 초점을 두기 때문에 비 접합(Non-water tight) 모델, 트림(Trimmed) 모델, 경계로만 이루어지는

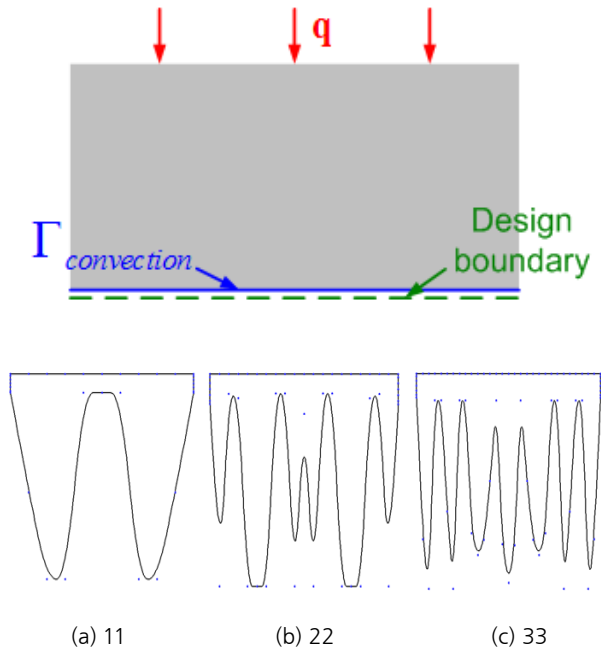


그림 17 설계변수 수에 따른 형상 최적설계

모델과 같이 영역기반 해석에 부적합한 CAD 정보가 생성되기도 한다. 따라서 이러한 CAD와 CAE 모델간의 부적합성을 해결하기 위해 CAD의 경계정보만을 해석에 이용하는, 경계적분방정식 기반 아이소-지오메트릭 최적설계 기법이 최근에 개발되었다. 그림 17과 같이 주어진 재료량 제약 조건을 만족하면서 열 방출량을 최대화하는 냉각핀 형상 최적설계 문제를 고려하자.

$$\text{Minimize } G_2 = \int_{\Omega} Q T d\Omega + \int_{\Gamma} q T d\Gamma$$

$$\text{Subject to } Volume = \int_{\Omega} d\Omega \leq V_{initial}$$

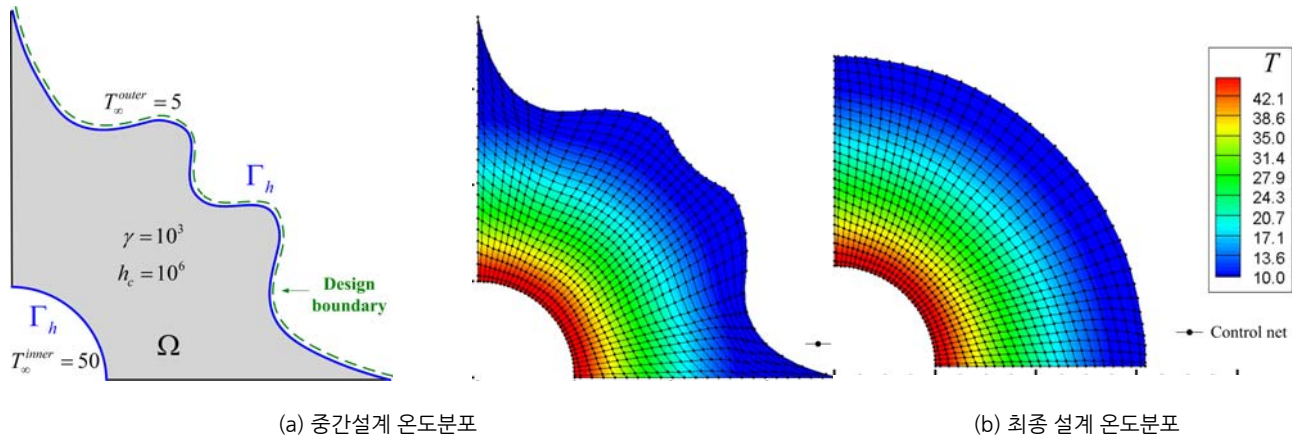


그림 18 요소 정규화 기법을 적용한 최적설계



그림 17 하단에는 설계변수의 개수에 따른 최적설계가 나타나 있으며 추가적인 설계변수 매개화 과정없이 CAD의 경계정보만으로 급격한 설계변경이 이루어 질 수 있음을 확인할 수 있다.

유한요소법에서 요소의 균질성(Uniformity) 및 직교성(Orthogonality)은 응답해석의 정확도에 영향을 주는 주요 요인으로 알려져 있다. 아이소-지오메트릭 해석법에서도 마찬가지로 매개(Parametric) 공간과 물리적(Physical) 공간 사이의 변환 관계에 있어서 이러한 요소의 균질성과 직교성이 응답해석에 큰 영향을 준다. 따라서 아이소-지오메트릭 형상 최적설계 과정에서 엄밀한 응답 및 설계민감도 해석을 얻기 위해서는 급격한 형상 변화에 대응하여 요소의 균질성과 직교성을 유지할 수 있어야 한다. 에너지 범함수 최소화 기반의 요소 정규화(Regularization) 기법은 불룩한 특성을 갖는 디리클레(Dirichlet) 범함수를 활용함으로써 기존에 제시된 방법론에 비해 훨씬 효율적으로 전단 사상(Bijective mapping)의 특성을 갖는 변환을 얻을 수 있다. 그림 18에서는 요소 균질화 기법이 단열 문제의 최적설계에 적용된 것으로 내부 조정점을 재구성하여 급격한 형상 설계변화에도 불구하고 요소의 균질성 및 직교성을 최종 설계에서 확보될 수 있음을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & G_1 = \int_{\Gamma_{out}} h_c (T - T_\infty) d\Gamma \\ \text{Subject to} \quad & Volume = \int_{\Omega} d\Omega = V_{initial} \end{aligned}$$

#### 4. 맺는 말

아이소 지오메트릭 해석은 CAD의 NURBS 곡면을 사용하여 직접 해석공간의 기저함수를 만들 수 있으므로 별도의 유한요소망을 구성할 필요가 없으며 기저함수의 연속성도 쉽게 향상시킬 수 있다. 따라서 해석모델이 “기하학적으로 엄밀하며 형상의 수정, 개선이 용이”하여 차세대 해석 기법으로 기대되어 진동문제, 음향문제, 균열 진동문제, 전자기 문제, 다중물리 연성 문제 등으로 빠르게 연구가 확장되고 있다. 특히 조선해양 분야, 항공우주 분야, 의공학 분야 등에서 많이 발생하는 다중물리 문제에서는 엄밀한 기하형상과 경계면의 추적이 해석의 품질에 지배적인 영향을 미치기 때문에 아이소-지오메트릭 해석법의 도입 필요성이 점차 증대될 것으로 판단된다.

또한 본 기사에는 새로이 등장한 아이소-지오메트릭 해석법을 확장하여 엄밀한 기하형상과 CAD와 CAE가 융합이 고려된 새로운 패러다임의 형상 설계민감도 해석법이 소개되어 있다. 엄밀한 기하형상을 고려하고 법선, 곡률과 같은 고차원의 기하정보를 고려한 설계민감도 해석은 정밀한 최적설계를 가능하게 한다. 이를 활용한 아이소-지오메트릭 최적설계는 기존 위상설계의 방법론적 한계를 극복하고, 형상설계에서 매개변수화의 난점을 해결할 수 있는 새로운 방법론이 될 것이다. 뿐만 아니라 CAE 해석에서 80%이상의 시간과 비용이 소요되는 유한요소망 구성시간을 원천적으로 제거함으로써 “제품 개발 과정의 획기적 단축과 양질의 최적설계를 제공하여 제품의 경쟁력 향상에 큰 기여”를 할 수 있을 것으로 기대된다. [7]

[섭외: 하윤도 편집위원]