

설계 의존형 구조물에 대한 아이소-지오메트릭 형상 최적설계 Isogeometric Shape Optimization of Design-Dependent Structures

1. 서론

아이소-지오메트릭 해석법(IGA)은 간단히 말해서 캐드 기하 모델링에서 흔히 사용되는 B-Spline 또는 NURBS 함수를 해석의 기저함수로 가지는 해석법이다. 일반적인 상용 해석코드에서는 모델의 형상이 복잡하거나 응력이 집중되는 곳에 요소의 개수를 늘임으로써 해석의 정확도를 높이는 반면에, 아이소-지오메트릭 해석에서는 고차의 스플라인 함수를 사용하거나 사용되는 조정점의 개수를 늘림으로써 해석의 정확도를 높이는 방법을 사용하고 있다. 특히나 해석을 위한 요소망 구성에서 경계면의 근사화 과정 없이, 기하학적으로 정확한 캐드 모델을 해석에 그대로 사용한다는 점에서 해석의 정확도를 보다 높일 수 있다는 이점을 가지고 있다.

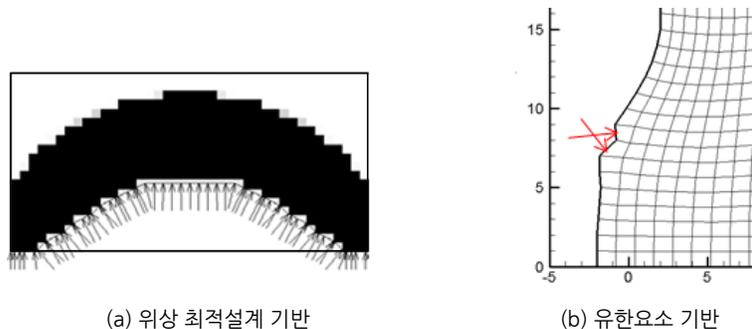
본 기사에서는 이러한 아이소-지오메트릭 해석법을 설계 의존형 구조물의 형상 최적설계에 적용시키는 법을 살펴보고자 한다. 설계 의존형 구조물의 특성 상 최적 설계의 중간 과정이 최적 형상에 영향을 미치게 되는데, 이러한 과정 중에서 경계면을 정확하게 묘사하지 못하거나 하중에 오류가 발생하게 되면 최적 형상도 올바르게 얻어지지 못하기 때문이다. 이러한 측면에서 아이소-지오메트릭 해석법 기반의 형상 최적설계는 설계 의존형 구조물의 형상 최적설계에 있어서 뛰어난 성능을 발휘할 수 있는 해석 및 설계법 중의 하나가 될 수 있을 것이다.

다음의 그림 1은 설계 의존형 구조물의 최적설계에 대한 기존의 접근법을 나타낸다. 우선 그림 1(a)는 위상 최적설계 기반의 최적설계이다. 흔히 일반적으로 사용되는 밀도법 기반의 위상 최적설계에서는 기하학적으로 부드러운 경계를 묘사할 수 없다. 재료밀도가 1이 되는 요소면의 경계가 구조물의 경계면이 되는데, 각 요소마다 법선 벡터의 방향 등이 연속적으로 분포하지 못한다. 이는 그림 1(b)의 유한요소 기반의 최적설계도 마찬가지이다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위해서 경계면의 추가적인 매개화 과정 등이 필요로 하게 된다.



하 승 현

한국해양대학교 해양공학과 조교수



(a) 위상 최적설계 기반

(b) 유한요소 기반

그림 1 기존의 접근법

하지만 아이소-지오메트릭 기반의 형상 최적설계에서는 경계면이 이미 스플라인 함수로 기하학적으로 정확하게 정의되어 있기 때문에 추가적인 매개화 과정이 필요 없을 뿐만 아니라, 전 영역에서 법선 벡터나 곡률 등과 같은 기하 정보들이 연속적으로 분포하기 때문에, 압력 등과 같은 설계 의존형 하중을 계산하는데 있어서 오차 없이 정확하게 계산할 수 있다는 장점이 있다.

2. 아이소-지오메트릭 해석법

2.1 아이소-지오메트릭 해석법의 개요

서론에서 언급한 바와 같이 아이소-지오메트릭 해석법에서는 스플라인 기저함수를 사용한다. 가장 대표적인 B-Spline은 아래의 식과 같이 재귀적인 함수로서 구성이 되는데, 우선 1차원 문제에서의 파라메트릭 좌표값들의 집합인 노트 벡터는 식 (1)과 같이 정의된다.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

여기서, p 는 사용되는 기저함수의 차수이고, n 은 기저함수의 개수이다. 이로부터 0차의 기저함수는 아래의 식 (2)와 같이 정의된다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

이로부터 고차의 기저함수는 식 (3)을 재귀적으로 사용함으로써 얻어낼 수 있다.

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

이러한 B-Spline 기저함수를 바탕으로 B-Spline 곡선은 식 (4)와 같이 얻어진다.

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (4)$$

여기서, B_i 는 각각의 기저함수에 대응되는 조정점의 좌표를

나타낸다. 이와 마찬가지로 B-Spline 곡면은 식 (5)와 같이 얻어진다.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (5)$$

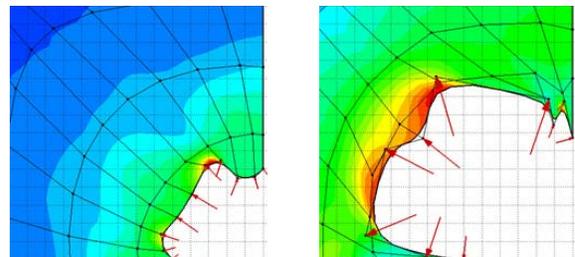
여기서, $N_{i,p}(\xi)$, $M_{j,q}(\eta)$ 는 각각 ξ , η , 방향의 B-Spline 함수이다.

2.2 H-정밀화 (H-refinement)

앞으로 살펴볼 설계 의존형 구조물에 대한 아이소-지오메트릭 최적설계에서 중요한 개념이 h-정밀화 과정이다. 아이소-지오메트릭 기반의 최적설계에서는 구조물의 경계에 위치하는 조정점의 위치를 이동시켜 가면서 최적설계를 진행하게 되는데, 경계면에 위치한 조정점의 수가 너무 적으면 해석의 정확도가 떨어지게 되고, 반대로 그 수가 너무 많으면 최적설계에 너무 많은 계산 시간이 소요될 뿐만 아니라 수치적 국소 최적점에 빠지게 될 위험성이 높아지게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 해석에 사용되는 조정점과 최적설계에 사용되는 조정점을 분리시켜 사용하게 되는데, 이러한 두 조정점 좌표들을 서로 연결시켜 주는 과정에서 h-정밀화 과정이 사용된다.

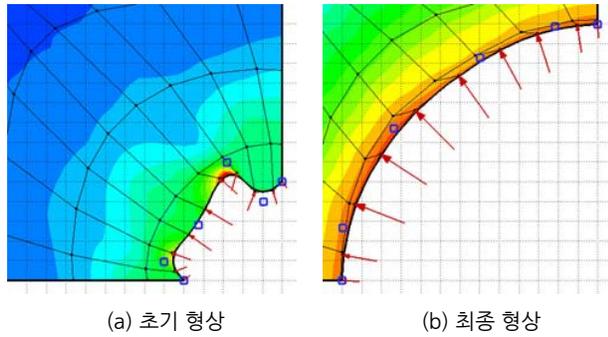
아래의 그림 2는 경계면의 모든 조정점들이 최적설계의 설계 변수로서 사용된 결과이다. 이는 기존의 유한요소 기반의 형상 최적설계와 같이 경계 형상이 부드럽게 얻어지지 못하고 국소 최적점에서 최적화 과정이 멈추어 버린 것을 확인할 수 있다. 하지만 h-정밀화 과정을 사용한 경계 매개화를 도입하게 되면 그림 3과 같이 매끄러운 최종 형상이 얻어지는 것을 확인할 수 있다.

아이소-지오메트릭 해석법에서 h-정밀화를 사용하는 방법은 아래와 같다. 주어진 노트벡터 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 와 조정점 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 에 대해서 새로운 노트값 $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$



(a) 초기 형상 (b) 최종 형상

그림 2 모든 조정점이 최적설계에 사용된 경우



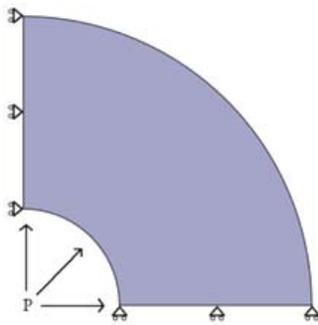
(a) 초기 형상 (b) 최종 형상

그림 3 h-정밀화 과정이 사용된 경우

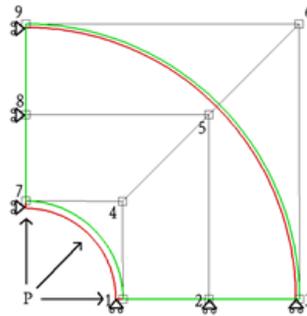
이 추가될 때, 새 노트벡터 $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_k, \bar{\xi}, \bar{\xi}_{k+1}, \dots, \bar{\xi}_{n+p+1}\}$ 와 $n+1$ 개의 조정점 $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+1}\}$ 은 다음과 같이 구성된다.

$$\bar{B}_i = \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) B_{i-1} \quad (6)$$

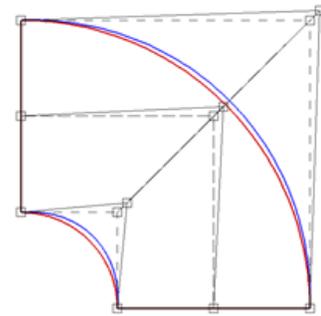
$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_{i+p} - \bar{\xi}_i} & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0 & k+1 \leq i \end{cases} \quad (7)$$



(a) 1/4 중공 원판 모델



(b) 아이소-지오메트릭 모델



(c) 조정점 이동

그림 4 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 검증

표 1 설계 민감도 비교

DOF	유한차분법	식 (9)	%	식 (11)	%
1x	2.935839E-05	7.839463E-06	374.4950	2.938916E-05	99.8953
2x	1.283707E-05	1.721349E-05	74.5756	1.284080E-05	99.9710
3x	1.140064E-05	8.634386E-06	132.0376	1.140411E-05	99.9696
4x	1.866651E-05	5.778239E-05	32.3048	1.868058E-05	99.9247
5x	8.162132E-06	1.681284E-06	485.4700	8.181002E-06	99.7693
6x	1.409646E-05	1.995839E-05	70.6293	1.411474E-05	99.8705

3. 압력 하중에 대한 아이소-지오메트릭 형상 최적설계

3.1 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 해석

설계 민감도 기반의 형상 최적설계법에서 설계민감도는 최적설계의 방향을 결정하기 때문에 이를 정확히 계산해 내는 것이 매우 중요하다. 앞으로 다루려는 구조 탄성체 문제에서 지배방정식은 식 (8)과 같이 주어진다.

$$\int_{\Omega} c_{ijkl} z_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \bar{z}_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \bar{z}_i d\Gamma \quad (8)$$

그리고 이에 대한 설계 민감도 식은 식 (9)와 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{ijkl} \dot{z}_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega = & \int_{\Omega} c_{ijkl} \dot{z}_{i,m} V_{m,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega + \int_{\Omega} c_{ijkl} \dot{z}_{i,j} \bar{z}_{k,m} V_{m,l} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} c_{ijkl} \dot{z}_{i,j} \bar{z}_{k,l} V_{m,m} d\Omega + \int_{\Omega} f_i \dot{z}_i \bar{z}_i d\Omega + \int_{\Omega} f_i \dot{z}_i V_{m,m} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} t_i \dot{z}_i \bar{z}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \kappa(t_i \dot{z}_i) V_{m,m} n_m d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, \dot{z} , V , n , 그리고 K 는 각각 설계민감도, 설계 속도장, 법선벡터, 곡률을 나타낸다. 이 때, 아이소-지오메트릭 해석법에서는 접선벡터가 식 (10)과 같이 정확하게 계산되고, 법선벡터는 이에 수직하게 정의된다.

$$(t_1, t_2) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_{i,p}(\zeta)}{\partial \zeta} x_i, \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_{i,p}(\zeta)}{\partial \zeta} y_i \right) \quad (10)$$

한편 위의 식 (9)에서 $t_i = pn_i$ 와 같은 압력 하중을 고려하게 되면 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{ijkl} \dot{z}_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega &= \int_{\Omega} c_{ijkl} z_{i,m} V_{m,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega + \int_{\Omega} c_{ijkl} z_{i,j} \bar{z}_{k,m} V_{m,l} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} c_{ijkl} z_{i,j} \bar{z}_{k,j} V_{m,m} d\Omega + \int_{\Omega} f_{i,m} \bar{z}_i V_{m,m} d\Omega + \int_{\Omega} f_i \bar{z}_i V_{m,m} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} (p_j V_j n_j \bar{z}_i + p V_{j,j} n_j \bar{z}_i - p V_{i,j} n_j \bar{z}_i) d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

3.2 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 검증

위의 식 (8)~(11)을 통해서 구조 탄성체 문제에 대한 설계민감도 식을 유도하였다. 다음으로는 유도된 설계민감도 식의 정확도를 수치 예제를 통해서 살펴보자. 그림 4(a)는 중공 원판에 대한 1/4 모델이고, 내부로부터 압력 하중 P 를 받고 있다고 가정한다. 이에 대해서 아이소-지오메트릭 해석법으로는 그림 4(b)와 같이 2차의 NURBS 함수와 9개의 조정점만을 통해서 기하학적으로 정확하게 묘사하는 것이 가능하다. 이와 같은 아이소-지오메트릭 모델에 대해서 그림 4(c)와 같이 조정점 4, 5, 6의 위치를 대각선 방향으로 약간 이동시켰을 때, 그 설계민감도를 비교해 보면 표 1과 같다.

조정점 1-6에 대해서 x방향의 설계민감도 값을 각각 유한차분법으로 얻은 값과 비교해 보았다. 식 (9)로부터 얻은 설계민감도 값은 유한차분법과 비교해 보았을 때, 작지 않은 오차를 가지고 있는데, 이는 위의 식이 하중의 방향이 변하지 않는 트랙션으로 가정하였기 때문이다. 하지만 압력 하중에 대한 식 (11)을 사용하였을 때에는 마지막 열에서 보는 것과 같이 매우 정확한 설계민감도가 얻어지고 있음을 확인할 수 있다. 따라서 위의 식 (11)을 사용하여 앞으로 나오는 수치 예제에 필요한 설계민감도를 계산할 것이다.

3.3 H-정밀화를 사용한 경계면 매개화

앞서 언급한 바와 같이 아이소-지오메트릭 해석에 사용되는

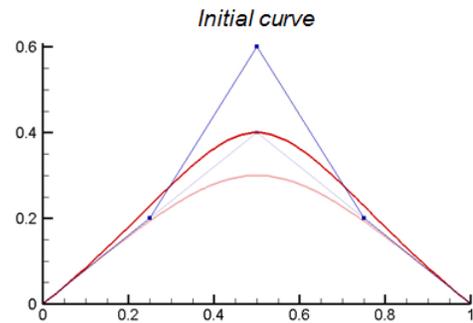
조정점과 최적 설계에 사용되는 조정점을 서로 연관시키기 위해서 h-정밀화를 사용하게 된다. 이 때, 두 가지의 조정점으로 얻어지는 모델이 정확하게 일치해야만 원하는 최적 형상이 얻어지는 것은 당연하다.

그림 5(a)는 5개의 조정점을 가지는 3차의 B-Spline 곡선이 다. 이 때, 조정점은 파란색 점으로 주어지고, 이에 따른 곡선은 붉은색 선으로 나타난다. 만약 설계 형상이 변화되어 중앙에 위치한 조정점이 이동하였다고 가정하였을 때, h-정밀화 결과 얻어지는 곡선에 대해서도 기존의 곡선과 동일한 이동 결과를 얻어야 한다.

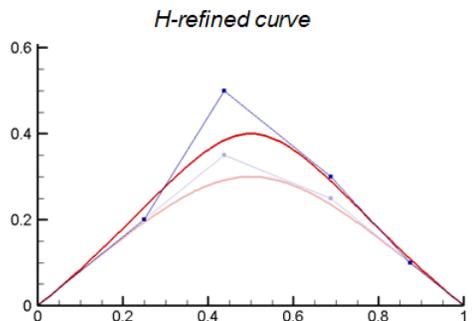
그림 5(b)는 노트값 1.5를 노트벡터에 추가함으로써 얻어진 곡선으로 총 6개의 조정점을 가지고 있다. 이 때, h-정밀화 전후의 조정점 사이의 관계를 결정하는 값들은 식 (6), (7)에 의해서 다음의 값들로 정의된다.

$$\alpha = \left\{ 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0 \right\} \quad (12)$$

위의 식 (12)의 값을 식 (6)에 적용시키게 되면 그림 5의 두 조정점들로 얻어진 곡선에 대한 상관관계는 다음의 식 (13)과 같다.



(a) $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2\}$



(b) $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 1.5, 2, 2, 2, 2\}$

그림 5 H-정밀화를 사용한 경계 매개화

$$\delta = 0.2 \times \{0, 0, 1, 0, 0\}$$

$$\tilde{\delta} = 0.2 \times \left\{0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right\} \quad (13)$$

즉, 그림 5(a)에서 중앙의 조정점이 y방향으로 0.2만큼 이동하였다고 가정하였을 때, 그림 5(b)에서는 세 번째, 네 번째 조정점을 y방향으로 각각 0.15, 0.05 만큼 이동시키면 기존의 곡선과 정확하게 일치하게 된다. 위의 과정을 경계면에 위치한 조정점들에 대해서 적용시키게 되면 해석을 위한 조정점과 최적설계를 위한 조정점을 분리시키되, 두 조정점들로 정의되는 경계면을 정확히 동일하게 이동시킬 수 있다.

4. 수치 예제

4.1 2축 하중을 받는 평판 문제

첫 번째 수치 예제는 2축 하중을 받는 평판 문제이다. 설계 의존형 구조물은 아니지만, 기존의 유한요소 기반의 형상 최적

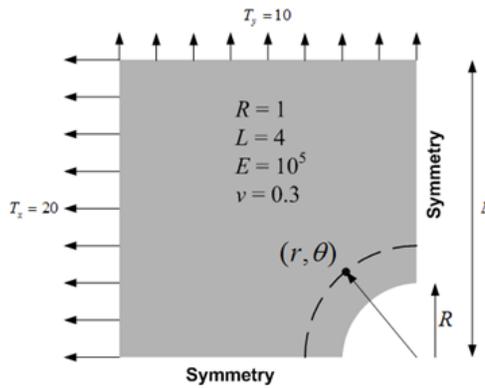
설계가 주어져 있기 때문에 이를 아이소-지오메트릭 기반의 형상 최적설계와 비교해 볼 수 있다.

그림 6(a)는 중공 원판의 1/4 모델이다. 이 모델에 대해서 x 방향으로 20, y방향으로는 10의 비대칭 트렉션이 경계에 가해지고 있을 때, 주어진 최대 응력 제한조건을 만족시키는 최소 부피의 평판 형상을 얻는 것이 설계의 목표이다.

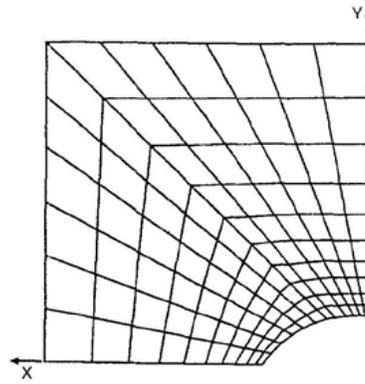
그림 6(b)는 기존의 유한요소 기반의 형상 최적설계 결과이다. 비교적 간단한 예제이기 때문에 큰 문제점은 없지만, 이론 해인 타원의 형상과는 조금 거리가 있다. 그림 6(c)와 (d)는 아이소-지오메트릭 기반의 형상 최적설계 결과를 보여주고 있다. 1/4 모델의 한쪽 변의 길이 L이 10으로 충분히 커다란 모델에 대해서, 가로축-세로축 비가 2.05:1인 타원 형상이 얻어지는 것을 확인할 수 있다. 이는 이론치인 가로축-세로축 비율이 2:1인 타원에 매우 근사한 값이다.

4.2 압력 하중을 받는 평판 문제

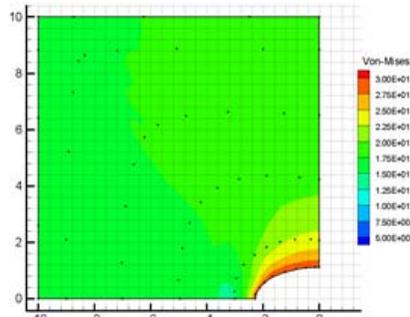
두 번째 수치 예제는 압력 하중을 받는 평판 문제이다. 그림



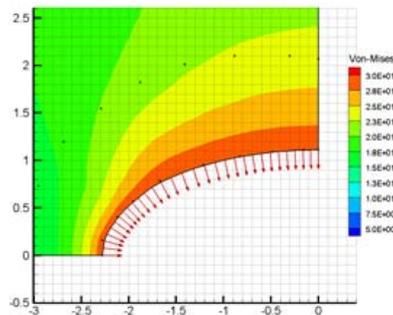
(a) 1/4 중공 원판 모델



(b) 유한요소 기반의 형상 최적설계



(c) 아이소-지오메트릭 기반의 형상 최적설계



(d) 확대 그림

그림 6 2축 하중을 받는 평판 문제

7과 같이 양 끝단이 고정되어 있으며, 아래쪽 경계면을 따라서 수직인 압력 하중이 작용하고 있다. 이러한 평판 모델에 대해서 40%의 부피 제약 조건을 가지는 최저 컴플라이언스 구조물의 형상을 찾아내는 것이 목적이다. 설계 변수는 위쪽과 아래쪽 경계면을 따라 위치한 조정점들의 연직방향 좌표이다.

그림 8(a)와 8(b)는 h-정밀화를 통한 경계면 매개화의 유무에 따른 아이소-지오메트릭 해석 모델을 나타낸다. 우선 8(a)는 파란색 사각형으로 표시된 모든 조정점들이 해석과 최적화 과정에 있어서 동일하게 사용되고 있음을 알 수 있다. 반면에 8(b)에서는 해석에 사용되는 조정점은 검정색 점으로, 최적화에 사용되는 조정점은 파란색 사각형으로 서로 분리되어 있다. 하지만 두 조정점들은 앞서 언급된 h-정밀화 과정을 통해서 항상 같

은 형상을 유지하면서 움직일 수 있도록 정의되어 있다.

그림 8(c)와 8(d)는 각각의 경우에 대해서 얻어진 최적 형상을 나타내고 있다. 우선 경계면 매개화가 없었던 8(c)의 경우에는, 압력이 작용하고 있는 아랫면이 매우 심하게 굽어지는 형태로 나타나는 것을 확인할 수 있다. 그 결과 붉은 화살표로 나타나는 것처럼 압력에 대한 하중도 불규칙하게 작용할 수밖에 없다.

반면에 h-정밀화 과정을 통해 경계면 매개화가 이루어지고 있는 8(d)의 경우에는, 최적 형상이 매우 매끄럽게 얻어지고 있는 것을 확인할 수 있다. 최적설계에 사용되는 파란색 사각형으로 얻어지는 형상과 아이소-지오메트릭 해석에 사용되는 검정색 점으로 얻어지는 형상이 정확하게 동일하고, 이 경계면

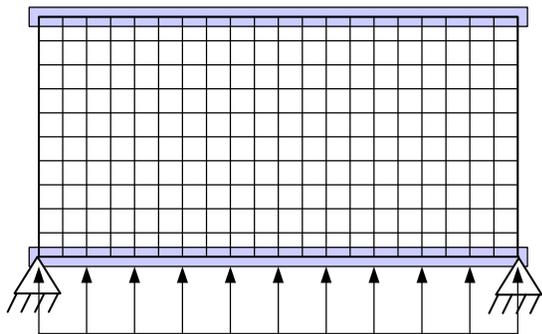


그림 7 압력 하중을 받는 평판 문제

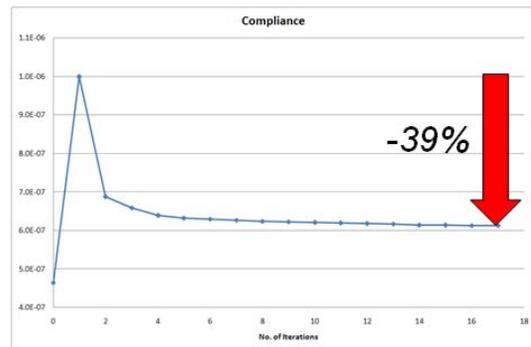
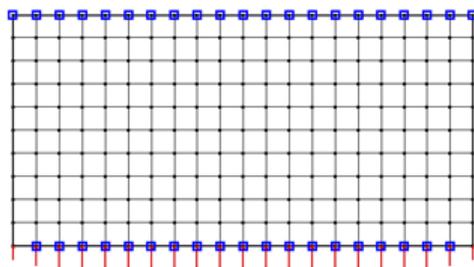
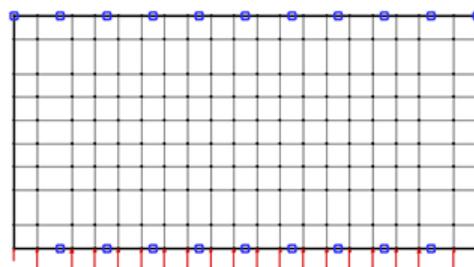


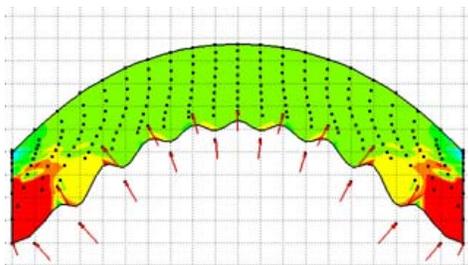
그림 9 설계 히스토리 (컴플라이언스)



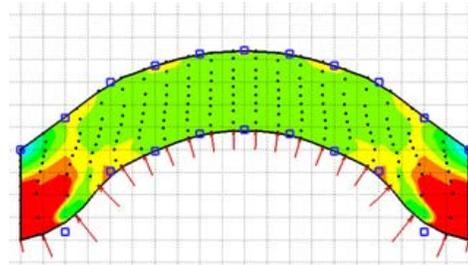
(a) 경계면 매개화가 없는 초기 모델



(b) 경계면 매개화가 있는 초기 모델



(c) 경계면 매개화가 없는 최적 형상



(d) 경계면 매개화가 있는 최적 형상

그림 8 압력 하중을 받는 평판 문제

에 작용하는 압력 하중도 경계면을 따라서 항상 법선 방향으로 작용하고 있음을 붉은 화살표를 통해서 확인할 수 있다.

끝으로 그림 9는 경계면 매개화가 있는 모델에 대해서 컴플라이언스에 대한 히스토리를 나타내고 있다. 총 17회의 반복 설계가 수행되었는데, 첫 번째 단계에서는 부피 제약 조건을 만족시키기 위한 결과 컴플라이언스 값이 크게 증가한 것을 확인할 수 있다. 하지만 그 후로는 부피를 유지한 채로 계속 컴플라이언스 값이 감소되어 최종적으로는 첫 번째 반복 계산 때에 비해서 약 39% 감소된 컴플라이언스 값을 얻을 수 있었다.

5. 맺는 말

유한요소 기반의 해석법은 지난 수십년 동안의 이론적 발전과 함께 이미 상용 코드로 정립되어 많은 복잡한 문제들에 대한 해석 결과도 정확하게 얻어낼 수 있다. 현재는 Rhinoceros와 같은 캐드 프로그램에서 T-Spline 등을 사용하여 아이소-지오메트릭의 개념이 도입되는 것으로 보여지나, 단순 해석 문제에서는 아이소-지오메트릭 해석법이 기존의 유한요소법을 대

체하기는 힘들어 보인다.

하지만 단순 해석이 아니라 형상 최적설계 영역으로 이를 확장시켰을 경우에는, 분명 아이소-지오메트릭 기반의 해석 및 최적설계가 가지는 이점이 존재한다고 생각한다. 앞서 본문에서 살펴본 것과 같이 캐드 모델과 직접 연결되어 기하학적으로 정확한 모델을 다룰 수 있다는 점과 함께, 최적 설계 측면에서 아이소-지오메트릭 기반의 방법이 가질 수 있는 이론적 장점은 분명하다. 물론 현재까지는 단순한 형상에 대한 최적설계 문제로 한정되어 있지만, 이에 대한 연구가 지속된다면 미래에 아이소-지오메트릭을 기반으로 한 해석 및 최적설계 소프트웨어 개발이라는 결과를 얻을 수 있을 것으로 기대한다. 이러한 측면에서 아이소-지오메트릭 해석법 및 최적설계는 CAD와 CAM을 결합시킴으로서 시너지 효과를 얻어낼 수 있는 차세대 융복합 설계법으로 앞으로 많은 관심과 기대가 주목된다. 

[섭외: 하윤도 편집위원]