

## MRA와 POD를 적용한 공력특성 최적설계

구본찬,<sup>1</sup>한준희,<sup>1</sup>조태현,<sup>2</sup>박경현,<sup>3</sup>이도형\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>한양대학교 기계공학과

<sup>2</sup>한양대학교 기계설계공학과

<sup>3</sup>삼성전기 중앙연구소 기반기술팀 CAE그룹

### MRA AND POD APPLICATION FOR AERODYNAMIC DESIGN OPTIMIZATION

B.C. Koo,<sup>1</sup> J.H. Han,<sup>1</sup> T.H. Jo,<sup>2</sup> K.H. Park<sup>3</sup> and D.H. Lee\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

<sup>2</sup>Dept. of Mechanical Design Engineering, Hanyang Univ.

<sup>3</sup>Samsung Electro-Mechanics CAE Group

*This paper attempts to evaluate the accuracy and efficiency of a design optimization procedure by combining wavelets-based multi resolution analysis method and proper orthogonal decomposition (POD) technique. Aerodynamic design procedure calls for high fidelity computational fluid dynamic (CFD) simulations and the consideration of large number of flow conditions and design constraints. Thus, even with significant computing power advancement, current level of integrated design process requires substantial computing time and resources. POD reduces the degree of freedom of full system by conducting singular value decomposition for various field simulations. In this research, POD combined Design Optimization model is proposed and its efficiency and accuracy are to be evaluated. For additional efficiency improvement of the procedure, multi resolution analysis method is also being employed during snapshot constructions (POD training period). The proposed design procedure was applied to the optimization of wing aerodynamic performance. Throughout the research, it was confirmed that the POD/MRA design procedure could significantly reduce the total design turnaround time and also capture all detailed complex flow features as in full order analysis.*

**Key Words :** 전산유체역학(CFD), 다중해상도 해석기법(Multi Resolution Analysis), 적합적교분해(Proper OrthogonalDecomposition), 축소모델(Reduced Order Model), 최적설계(Design Optimization)

### 1. 서 론

최근 계산 자원 성능과 CFD 알고리즘의 발달로 인해 고신뢰도 해석(high fidelity simulation)과 고신뢰도 최적설계(high fidelity design optimization)에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다[1]. 일반적으로 CFD를 이용한 해석은 shock, vortex, boundary layer등의 복잡한 물리적 현상을 예측하기 위해 방대한 양의 격자와 함께 정확한 계산을 요구한다. 또한 최적설계는 해석단계에서 다수의 실험점에 대해 해석을 수행해야 하므로 많은 계산 작업을 필요로 한다. 그러므로 최근 계산시간

을 효율적으로 관리하며 정확도를 유지하는 Adaptive grid system등의 Reduced Order Model(ROM, 축소모델)이 활발히 연구되고 있다. Adaptive grid system은 격자의 해상도와 해석의 신뢰도의 관계에 대해 접근한 기법이다. Adaptive grid system의 대표적인 두 가지 기법으로 Multi Resolution Analysis(MRA)와 adaptive mesh refinement method[2-12]가 존재하는데, adaptive mesh refinement method는 성긴 격자에서 계산을 시작하여 정확도 향상을 위해 필요한 격자를 추가적으로 생성하는 기법이다[4]. 반면에 Adaptive wavelet을 이용한 MRA는 비싼 flux evaluation을 수행하는 격자의 자유도를 줄이면서 정확도를 유지하는 축소모델이다[5-9]. MRA의 주된 아이디어는 다음과 같다. 다중해상도의 격자를 구성하여 낮은 해상도에서 지지 점(꼭수 점)들을 이용해 대상격자점(홀수 점)에 대하여 interpolating polynomial로 계산된 값과 격자점에서의 flux evaluation의 결과 값과의 차이가 threshold value보다

Received: April 7, 2015, Revised: June 8, 2015,

Accepted: June 8, 2015.

\* Corresponding author, E-mail: dohyung@hanyang.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2015.20.2.007>

© KSCFE 2015

적은 경우에 해당 격자점에서 flux evaluation을 수행하지 않는다. 이때 이 차이를 adaptive coefficient라고 한다. 대부분의 경우 구배가 적은영역에서 adaptive coefficient가 적고 구배가 큰 영역에서 adaptive coefficient가 크다. Adaptive coefficient가 큰 격자점들은 Adaptive dataset을 구성하여 Flux evaluation을 수행하며, 나머지 격자에서는 low-cost computation인 interpolation을 수행함으로써 계산 효율성을 향상 시킬 수 있다.

이러한 MRA기법에 대한 연구들이 많이 진행되어 왔는데, Harten[5]은 hyperbolic PDE의 비선형 해를 계산하기 위해 Multi-resolution method를 사용하였고, Holmström[7]은 보간 wavelet 변환을 통한 adaptive dataset을 구성하는 알고리즘을 개발하였다. Sjögren[8]은 Multiresolution method를 이용하여 압축성 오일러 방정식을 계산하였다. 그는 많은 수의 격자점과 계산상 자원이 많이 필요한 방법들을 사용하였을 때, Multiresolution method를 통해 상당한 계산효율을 높일 수 있다고 하였다. 그러나 보간 wavelet 변환의 정확성과 효율은 Threshold value에 매우 민감하다고 하였고, Kang et al.[13-15]은 기존의 Threshold value에서 격자의 크기, Time step에 따라 다르게 적용되는 Modified threshold method를 개발하여 2차원 유동해석에 적용시켜 3차 정확도를 유지하는 연구를 수행하였다. Interpolation coefficient에 따라 해의 정확도가 달라져 적절한 값이 필요했기에 Jo et al.[16]은 Modified threshold method가 적용된 2차원 Adaptive Wavelet기법을 3차원으로 확장시킨 뒤 해의 정확도를 유지하는 Interpolation coefficient연구를 통해 ONERA M6주변 유동에 대해 시뮬레이션 하여 기존 CFD solver과 비교 분석하였다. 기존의 MRA에 대한 연구들은 실질적인 CFD활용분야인 설계에 대한 적용이 없었으므로 최적설계에 적용시키는 연구가 필요하다.

이와 더불어 축소모델중 하나로 Proper Orthogonal Decomposition(POD)가 존재한다[17,18]. CFD 최적설계를 위해서는 high computational cost가 요구되는데, POD를 이용하여 빠른 시간 안에 유동장 data를 Full Order Analysis가 아닌 Reduced Order Model을 통해 재생성할 수 있다. POD를 이용한 유동장 재생성은 Snapshot이라고 불리는 Euler 혹은 Navier-Stokes 방정식을 통해 획득한 Database로부터 Singular Value Decomposition(SVD)을 통해 시스템의 유동특성들을 표현할 수 있는 Basis vector sets를 추출한 뒤, 축소된 차원에서의 효율적인 계산을 수행한다. 축소공간의 해를 mapping function을 통해 Full Order System의 해로 변환시킴으로써 계산비용을 절감시킬 수 있다[18,19].

이러한 이점으로 Lucia et al.[17,18]은 고속 압축성 유동에 대해 ROM을 적용하였다. 그는 연구에서, ROM을 통해 내부 경계조건에서 shock이 이동하는 영역을 처리하는 기법을 개발하였다. Kim[20]은 효율적인 시간차분기법과 복수의 입력변수

를 갖는 선형 시스템에서의 model reduction 기법을 개발하였다. Beran 등은 2차원 Euler 방정식에 limit-cycle oscillation ROM을 적용하여 계산하였다. Jun et al.[21]은 기저벡터의 일차결합을 통해 POD의 3차원 Euler 방정식 예측의 정확도와 효율성을 검증하였다. Park et al.[22]은 기저벡터의 일차결합, 크리깅 그리고 인공신경망 기법을 적용한 POD를 통해 공탄성 최적설계를 수행하였다.

본 연구에서는 CFD해석의 실질적인 응용인 최적설계과정에 3차원 MRA와 POD를 적용하였다. MRA를 통해 합리적인 Computing cost와 높은 정확도를 갖는 메타모델을 생성하였다. 또한 메타모델에 생성에 사용된 데이터에서 추출한 POD basis의 일차결합을 통해 최적설계의 예측결과를 확인하는데 사용하였다. 이를 통해 MRA와 POD가 최적설계의 해석도구로써 적용이 가능한지 살펴보았다.

## 2. 이 론

### 2.1 Aerodynamic model

지배방정식으로써 비점성 Euler 방정식을 적용하였다. 3차원 질량, 모멘텀, 이상기체의 에너지의 보존방정식은 다음 방정식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q dV + \int_{\partial\Omega} F(Q) \cdot \vec{nd}S = 0 \quad (1)$$

Conservative variables  $Q$  와 비점성 flux벡터  $F(Q) \cdot \vec{nd}S$  는 방정식 (2)에 나타나있다.

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}, F(Q) \cdot \vec{nd}S = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V \\ \rho v V \\ \rho w V \\ \rho e V + p V \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Cell 경계면에서 Roe's flux difference splitting scheme을 이용하여 비점성 flux evaluation을 수행하였고 제한자으로써 Van albada limiter를 사용하였다. 시간적분 방법으로는 ADI implicit 기법을 사용하였다. Code의 정확도검증을 위해 ONERA M6 wing주변 유동 실험 결과와 수치해석 결과를 비교하였다[23]. 유동조건은 Mach 0.8395 그리고 받음각 3.06°, 수치해석에 사용된 격자는 Fig. 1이다. O-H type 격자이며, 격자수는 302,621 cell이다.  $C_p$  선도 비교 결과가 Fig. 2에 나타나있다.

Fig. 2를 통해 wing의 upper side에서 발생하는 lambda

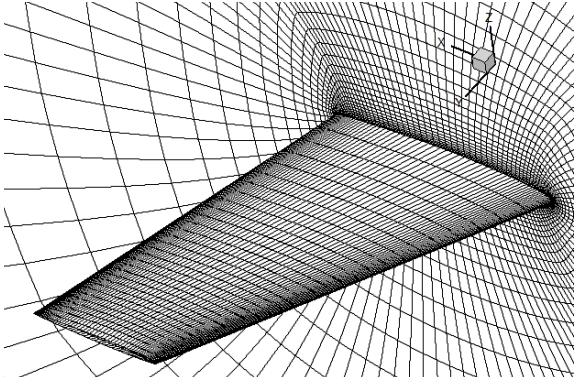


Fig. 1 ONERA M6 wing grid system

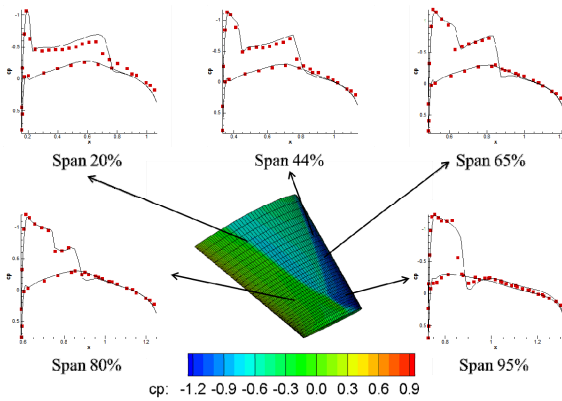


Fig. 2 Surface pressure coefficient of the ONERA M6 wing (■: experimental data[23], —: computational data)

shock을 포함한 pressure coefficient의 분포가 일치함을 볼 수 있다. 그러므로 본 code를 이용한 연구가 수행 가능함을 확인 했다.

## 2.2 Multi-resolution Analysis

MRA기법은 flux evaluation을 수행하는 격자점을 줄이는 기법으로써, interpolating polynomial을 이용 한다[15]. 식 (3), (4)를 통해 MRA의 아이디어가 나타나있다. 식 (3)과 같은 dyadic gridset이 있을 때, 식 (4)로 분해해 나타낼 수 있으며,  $P_{l,k}$ 는 다항식의 계수를 나타낸다.

$$V_l = x_{l,k} \in R : x_{l,k} = 2^{-l}k, k \in Z, l \in Z \quad (3)$$

$$\begin{cases} \tilde{f}_{l+1,2k} = f_{l,k} \\ \tilde{f}_{l+1,2k+1} = P_{l+1,2k+1}(f_{l,k-\frac{p}{2}+1}, \dots, f_{l,k}, \dots, f_{l,k+\frac{p}{2}}) \end{cases} \quad (4)$$

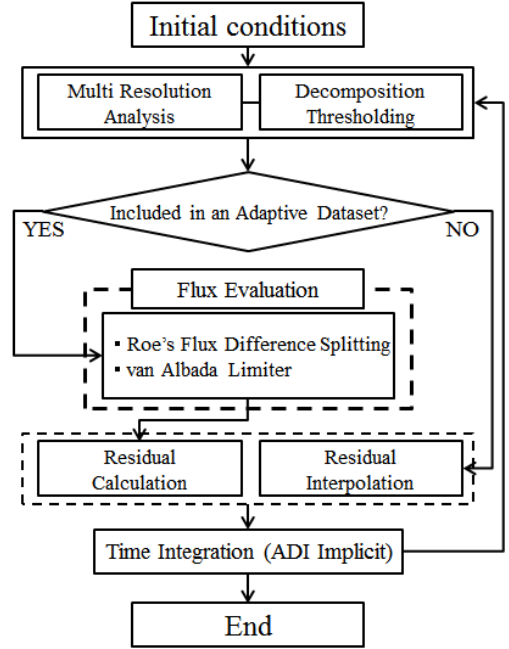


Fig. 3 Overall procedure of the multi-resolution analysis method in 3D Euler equation

식 (3), (4)를 통해 정의된 gridset에서 홀수 점에 대해 예측 하게 된다. 식 (5)와 (6)은 사용된 4차 다항식 interpolation과 adaptive coefficient를 정의한다.

$$\tilde{f}_{l+1,2k+1} = \frac{9}{16}(f_{l,k} + f_{l,k+1}) - \frac{1}{16}(f_{l,k-1} + f_{l,k+2}) \quad (5)$$

$$d_{l,k} = f_{l+1,2k+1} - \tilde{f}_{l+1,2k+1}, \forall k \in Z \quad (6)$$

일반적으로 물성치의 구배가 적은 영역에서는 adaptive coefficient가 작기 때문에 adaptive dataset에서 제외되므로, 변화가 크고 예측이 어려운 격자점들이 adaptive dataset을 구성 한다. Shock, vortex, boundary layer 등이 해당되며, adaptive dataset에 포함되기 위한 예측 값의 최대 오차범위는 식 (7)과 같이 threshold value로 나타난다.

$$|d_{l,k}|_{\infty} = |f_{l,k} - \tilde{f}_{l,k}|_{\infty} < O(\epsilon) \quad (7)$$

3차원 MRA가 Euler 방정식에 적용된 알고리즘이 Fig. 3에 나타나 있다. Fig. 4에 나타나있는 가장 낮은 level의 3차원 dyadic gridset을 가정하자.  $\circ$  cell에서 높은 level로 올라갈수록 더 적은 지지점들을 기준으로 flux evaluation을 수행하며,

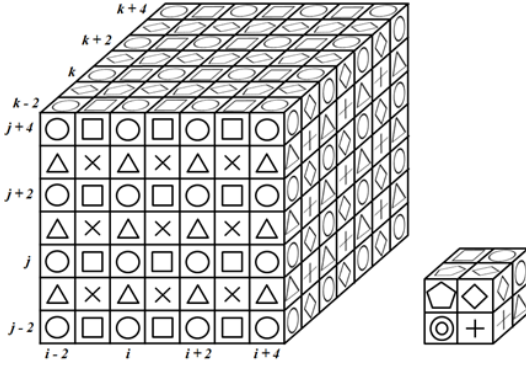


Fig. 4 Three-dimensional dyadic gridset[16]

나머지 cell들(□, △, ◇, ×, +, ◊, ⊙)에서는 방정식 (8)에 나와 있는 6차 interpolating polynomial을 사용한다.

$$\begin{aligned} \square : \tilde{Q}_{i+1,j,k}^n &= \frac{1}{256} (3Q_{i-4,j,k}^n - 25Q_{i-2,j,k}^n + 150Q_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150Q_{i+2,j,k}^n - 25Q_{i+4,j,k}^n + 3Q_{i+6,j,k}^n) \\ \triangle : \tilde{Q}_{i,j+1,k}^n &= \frac{1}{256} (3Q_{i,j-4,k}^n - 25Q_{i,j-2,k}^n + 150Q_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150Q_{i,j+2,k}^n - 25Q_{i,j+4,k}^n + 3Q_{i,j+6,k}^n) \\ \diamond : \tilde{Q}_{i,j,k+1}^n &= \frac{1}{256} (3Q_{i,j,k-4}^n - 25Q_{i,j,k-2}^n + 150Q_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150Q_{i,j,k+2}^n - 25Q_{i,j,k+4}^n + 3Q_{i,j,k+6}^n) \\ \times : \tilde{Q}_{i+1,j+1,k}^n &= \frac{1}{512} (3Q_{i-4,j-4,k}^n - 25Q_{i-2,j-2,k}^n + 150Q_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150Q_{i+2,j+2,k}^n - 25Q_{i+4,j+4,k}^n + 3Q_{i+6,j+6,k}^n \\ &\quad + 3Q_{i-4,j+6,k}^n - 25Q_{i-2,j+4,k}^n + 150Q_{i,j+2,k}^n \\ &\quad + 150Q_{i+2,j,k}^n - 25Q_{i+4,j-2,k}^n + 3Q_{i+6,j-4,k}^n) \\ + : \tilde{Q}_{i,j+1,k+1}^n &= \frac{1}{512} (3Q_{i,j-4,k-4}^n - 25Q_{i,j-2,k-2}^n + 150Q_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150Q_{i,j+2,k+2}^n - 25Q_{i,j+4,k+4}^n + 3Q_{i,j+6,k+6}^n \\ &\quad + 3Q_{i,j-4,k+6}^n - 25Q_{i,j-2,k+4}^n + 150Q_{i,j,k+2}^n \\ &\quad + 150Q_{i,j+2,k}^n - 25Q_{i,j+4,k-2}^n + 3Q_{i,j+6,k-4}^n) \\ \diamond : \tilde{Q}_{i,j+1,k+1}^n &= \frac{1}{512} (3Q_{i-4,j,k-4}^n - 25Q_{i-2,j,k-2}^n + 150Q_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150Q_{i+2,j,k+2}^n - 25Q_{i+4,j,k+4}^n + 3Q_{i+6,j,k+6}^n \\ &\quad + 3Q_{i-4,j,k+6}^n - 25Q_{i-2,j,k+4}^n + 150Q_{i,j,k+2}^n \\ &\quad + 150Q_{i+2,j,k}^n - 25Q_{i+4,j,k-2}^n + 3Q_{i+6,j,k-4}^n) \\ \odot : \tilde{Q}_{i+1,j+1,k+1}^n &= \frac{1}{1024} (3Q_{i-4,j-4,k-4}^n - 25Q_{i-2,j-2,k-2}^n + 150Q_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150Q_{i+2,j+2,k+2}^n - 25Q_{i+4,j+4,k+4}^n + 3Q_{i+6,j+6,k+6}^n \\ &\quad + 3Q_{i-4,j-4,k+6}^n - 25Q_{i-2,j-2,k+4}^n + 150Q_{i,j,k+2}^n \\ &\quad + 150Q_{i+2,j+2,k}^n - 25Q_{i+4,j+4,k-2}^n + 3Q_{i+6,j+6,k-4}^n \\ &\quad + 3Q_{i-4,j+6,k-4}^n - 25Q_{i-2,j+4,k-2}^n + 150Q_{i,j+2,k}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 150Q_{i+2,j,k+2}^n - 25Q_{i+4,j-2,k+4}^n + 3Q_{i+6,j-4,k+6}^n \\ &+ 3Q_{i+6,j+6,k-4}^n - 25Q_{i+4,j-2,k-2}^n + 150Q_{i+2,j,k}^n \\ &+ 150Q_{i,j+2,k+2}^n - 25Q_{i-2,j+4,k+4}^n + 3Q_{i-4,j+6,k+6}^n \end{aligned} \quad (8)$$

Polynomial interpolation을 통한 Residual을 예측한 후에 각 cell의 adaptive coefficient는 식 (9)를 통해 계산한다. Adaptive coefficient와 Modified threshold value와의 비교는 Kang et al.[15]을 참고하여 격자의 크기에 따라 값을 변화시키며 계산하였다.

$$\begin{aligned} \square : d_{i+1,j,k}^n &= Q_{i+1,j,k}^n - \tilde{Q}_{i+1,j,k}^n \\ \triangle : d_{i,j+1,k}^n &= Q_{i,j+1,k}^n - \tilde{Q}_{i,j+1,k}^n \\ \diamond : d_{i,j,k+1}^n &= Q_{i,j,k+1}^n - \tilde{Q}_{i,j,k+1}^n \\ \times : d_{i+1,j+1,k}^n &= Q_{i+1,j+1,k}^n - \tilde{Q}_{i+1,j+1,k}^n \\ + : d_{i,j+1,k+1}^n &= Q_{i,j+1,k+1}^n - \tilde{Q}_{i,j+1,k+1}^n \\ \diamond : d_{i+1,j,k+1}^n &= Q_{i+1,j,k+1}^n - \tilde{Q}_{i+1,j,k+1}^n \\ \odot : d_{i+1,j+1,k+1}^n &= Q_{i+1,j+1,k+1}^n - \tilde{Q}_{i+1,j+1,k+1}^n \end{aligned} \quad (9)$$

MRA를 통해 adaptive dataset을 구성하고 포함된 격자점에 대해서만 flux evaluation을 수행한다. 나머지 포함되지 않은 격자점들에 대해서는 flux evaluation을 수행하지 않고 residual을 식 (10)에 나와 있는 polynomial interpolation을 통해 계산하게 된다. Residual interpolation을 마친 후에 time integration을 진행하는데 이때, adaptive dataset에서 제외된 격자점들에 대해 정상상태에서는 수렴의 가속을 위해 restriction technique를 적용 한다. 유동의 변화가 modified threshold value보다 작을 경우 weighting factor을 곱해  $dQ$ 를 조절하여 MRA의 수렴성을 확보한다[13].

$$\begin{aligned} \square : \tilde{R}_{i+1,j,k}^n &= \frac{1}{256} (3R_{i-4,j,k}^n - 25R_{i-2,j,k}^n + 150R_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150R_{i+2,j,k}^n - 25R_{i+4,j,k}^n + 3R_{i+6,j,k}^n) \\ \triangle : \tilde{R}_{i,j+1,k}^n &= \frac{1}{256} (3R_{i,j-4,k}^n - 25R_{i,j-2,k}^n + 150R_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150R_{i,j+2,k}^n - 25R_{i,j+4,k}^n + 3R_{i,j+6,k}^n) \\ \diamond : \tilde{R}_{i,j,k+1}^n &= \frac{1}{256} (3R_{i,j,k-4}^n - 25R_{i,j,k-2}^n + 150R_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150R_{i,j,k+2}^n - 25R_{i,j,k+4}^n + 3R_{i,j,k+6}^n) \\ \times : \tilde{R}_{i+1,j+1,k}^n &= \frac{1}{512} (3R_{i-4,j-4,k}^n - 25R_{i-2,j-2,k}^n + 150R_{i,j,k}^n \\ &\quad + 150R_{i+2,j+2,k}^n - 25R_{i+4,j+4,k}^n + 3R_{i+6,j+6,k}^n \\ &\quad + 3R_{i-4,j+6,k}^n - 25R_{i-2,j+4,k}^n + 150R_{i,j+2,k}^n \\ &\quad + 150R_{i+2,j,k}^n - 25R_{i+4,j-2,k}^n + 3R_{i+6,j-4,k}^n) \end{aligned}$$

$$+ : \tilde{R}_{i,j+1,k+1}^n = \frac{1}{512} (3R_{i,j-4,k-4}^n - 25R_{i,j-2,k-2}^n + 150R_{i,j,k}^n + 150R_{i,j+2,k+2}^n - 25R_{i,j+4,k+4}^n + 3R_{i,j+6,k+6}^n + 3R_{i,j-4,k+6}^n - 25R_{i,j-2,k+4}^n + 150R_{i,j,k+2}^n + 150R_{i,j+2,k}^n - 25R_{i,j+4,k-2}^n + 3R_{i,j+6,k-4}^n)$$

$$\diamond : \tilde{R}_{i,j+1,k+1}^n = \frac{1}{512} (3R_{i-4,j,k-4}^n - 25R_{i-2,j,k-2}^n + 150R_{i,j,k}^n + 150R_{i+2,j,k+2}^n - 25R_{i+4,j,k+4}^n + 3R_{i+6,j,k+6}^n + 3R_{i-4,j,k+6}^n - 25R_{i-2,j,k+4}^n + 150R_{i,j,k+2}^n + 150R_{i+2,j,k}^n - 25R_{i+4,j,k-2}^n + 3R_{i+6,j,k-4}^n)$$

$$\odot : \tilde{R}_{i+1,j+1,k+1}^n = \frac{1}{1024} (3R_{i-4,j-4,k-4}^n - 25R_{i-2,j-2,k-2}^n + 150R_{i,j,k}^n + 150R_{i+2,j+2,k+2}^n - 25R_{i+4,j+4,k+4}^n + 3R_{i+6,j+6,k+6}^n + 3R_{i-4,j-4,k+6}^n - 25R_{i-2,j-2,k+4}^n + 150R_{i,j,k+2}^n + 150R_{i+2,j+2,k}^n - 25R_{i+4,j+4,k-2}^n + 3R_{i+6,j+6,k-4}^n + 3R_{i-4,j+6,k-4}^n - 25R_{i-2,j+4,k-2}^n + 150R_{i,j+2,k}^n + 150R_{i+2,j,k+2}^n - 25R_{i+4,j-2,k+4}^n + 3R_{i+6,j-4,k+6}^n + 3R_{i+6,j+6,k-4}^n - 25R_{i+4,j-2,k-2}^n + 150R_{i+2,j,k}^n + 150R_{i,j+2,k+2}^n - 25R_{i-2,j+4,k+4}^n + 3R_{i-4,j+6,k+6}^n)$$
 (10)

### 2.3 Proper Orthogonal Decomposition

POD 는 snapshot으로부터 추출된 낮은 자유도를 갖는 직교 기저를 이용하여 유체시스템을 모사하여 재생성하는 기법이다.

하나의 유동변수,  $w(t)$  를 고려하자.  $w(t)$  는 N개의 노드에 대응하는 값을 갖는다. 또한 3차원 Euler방정식의 변수에 해당하는 밀도( $\rho$ ), 속도( $u, v, w$ ), 에너지( $e$ )에 해당한다. Full system의 nonlinear operator  $R$ 을 이용하여  $w(t)$ 를 표현하면 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + R(w) = 0 \quad (11)$$

전체시스템의 해,  $w$ 와 축소시스템의 해,  $\hat{w}$ 의 관계를 mapping function  $\Psi$ 를 이용해 표현하면 식 (12)와 같이 쓸 수 있다.

$$w(t) = W_0 + \Psi \hat{w}(t) \quad (12)$$

$W_0$ 는 base solution이며,  $\Psi$ 는 시간에 대해 독립적이지만 나머지 변수들은 시간에 대한 함수이다.  $\Psi$ 는 관측된 해, snapshot들을 통해 구할 수 있으며, 이들은 일반적으로 linear dependency를 최소화하고 유동장의 거동을 다양하게 모사 할

수 있는 정상상태의 해들로 선택한다.

Q개의 snapshot들(N개의 노드)을 통해 행렬  $S (N \times Q)$ 를 구성한 뒤 Singular value decomposition을 수행하여 선형공간에 대한 새로운 기저를 추출한다. 추출된 기저를 이용하여 Nonlinear operator  $R$ 을 근사하기 위한 mapping function  $\Psi$ 를 다음의 식 (13)과 같이 계산한다.

$$S^T S V = V \Lambda \quad (13)$$

$$\Psi = S V$$

행렬  $V$ 는  $S^T S$ 의 Eigenvector로 구성된 행렬이며,  $\Lambda$ 는 Eigenvalue으로 구성된 대각행렬이다.

### 2.4 검증

위에서 언급한 두 가지 기법을 병합한 ROM의 computing efficiency와 accuracy에 대한 검증을 수행하였다. 검증에 사용된 ROM은 POD에 필요한 snapshot을 MRA를 통해 추출하는 구조의 병합된 모델이다.

먼저 Table 1을 통해 MRA의 수렴속도와 정확도 확인을 위해 Original code의 검증과 같은 유동조건의 ONERA M6 wing에 대해 수행하였다. MRA는 FOA에 비해서 유동장계산시간이 약 3.7배의 계산효율을 나타내고 있으며, CPU Time/iteration이 1.32:1.05로써 flux evaluations을 수행하지 않음에 따른 수렴속도를 보여주고 있다.  $C_L$ 과  $C_D$ 는 각각 0.3%, 0.4%의 미미한 오차를 보여주고 있다. FOA와의 L2 error가 5.712E-7를 나타내며 Fig 5에 50% span에서의 압력분포 비교가 나타나있고 shock과 같은 discontinuity를 정확하게 포착한 것을 볼 수 있다.

MRA를 통해 추출된 snapshot을 이용한 POD의 유동장 재생성 정확도 검증을 수행하였다. 이를 위해 입력변수로 wing의 형상설계변수 중 span, sweep angle과 dihedral angle 총 세 가지를 설정하였다. Span은 Wing길이방향에 대한 크기를 나타내며 sweep angle, dihedral angle의 단위는 degree다. Table 2를 통해 사용한 snapshot과 검증 data의 형상설계변수가 나타나있다. 적절한 Snapshot추출을 위해 실험계획법(Design Of

Table 1 MRA validation

	Original	MRA
Lift coefficient	0.292329	0.291456(0.3%)
Drag coefficient	1.2609E-2	1.2553E-2(0.4%)
CPU time (sec)	4924.88	1328.44
Time ratio	3.706	1
Iteration	3728	1264
CPU Time/iteration	1.32	1.05
L2 error	-	5.712E-7

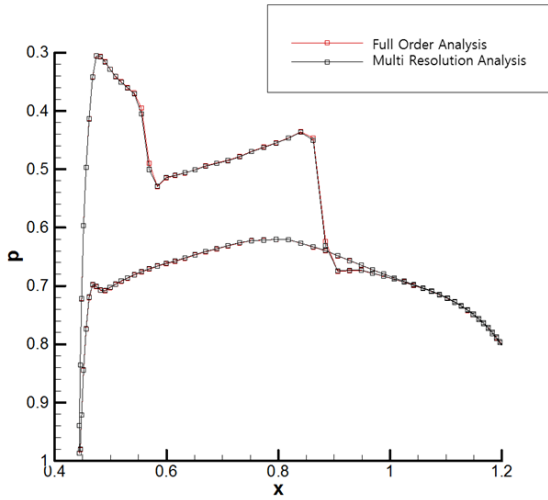


Fig. 5 Pressure distribution on the surface of wing(FOA and MRA at 50% of span)

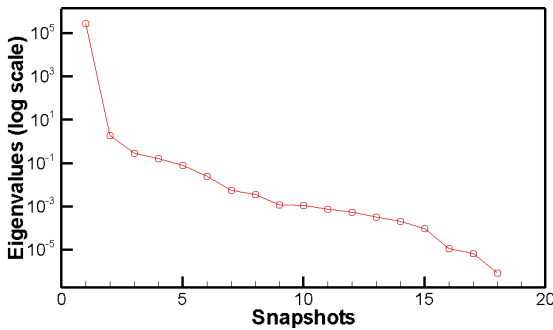


Fig. 6 Eigenvalues for each of the primitive variables

Experiments, DOE) 중에서 완전요인배치법(Full Factorial Design, FFD)의 3수준을 사용하여 총 18개의 snapshot을 추출하였다. 검증용 위해 ROM을 통해 해석한 데이터와 original solver를 통한 full order analysis 데이터를 비교했다. Fig. 6는 Snapshot 개수에 따른 밀도의 Eigenvalue으로써 6개 이상의 Snapshot이 전체 Eigenvalue의 99.99999%가 됨을 볼 수 있으나 충분한 정확도를 위해 18개의 Snapshot을 사용하였다. Table 2의 검증결과들을 L2 error, Lift coefficient( $C_L$ ) 그리고 Drag coefficient( $C_D$ )를 통해 분석하였다.

Table 3는 검증결과로써, L2 error값이 E-5를 넘지 않는 L2 error의 경향을 통해 유동장에 대한 재생성이 설계에 충분한 accuracy를 보유하고 있음을 확인할 수 있다. 또한, Lift/Drag coefficient 또한 3% 이내의 error를 보여주고 있음을 확인할 수 있다. Computing time은 18개의 snapshot에서 basis를 추출하는데 50.53초의 시간이 소요되며, 추출한 basis를 이용하여

유동장을 재생성시에는 9.09초의 시간이 소요된다. FOA의 유동장 해석시간과 비교하면 약 80배의 CPU time으로 효율적인 계산시간을 확인하였다. 결과적으로 ROM은 요구 accuracy와 efficiency를 만족한다.

### 3. 최적설계 및 결과

#### 3.1 설계문제 정식화 및 최적설계

DOE의 종류는 크게 Random Error가 존재하는 Real experiment를 위한 Conventional DOE와 computer experiment를 위한 space filling DOE로 나뉘며, OA는 space filling DOE에 속하는 기법으로써 설계공간에 실험점들이 직교성을 확보하면서 고르게 배치하는 기법이다[25]. 메타모델의 종류는 크게 두 가지로 나뉘는데, Interpolation Model과 Regression Model로 분류 된다. 설계의 효율과 정확성을 위하여  $R^2$ 값이 높은 메타모델이 필요하다.

Table 2 Snapshots and validation case

Snapshot							
No.	span	sweep	dihedral	No.	span	sweep	dihedral
1	1.400	25.0	-1.0	10	1.400	27.0	1.0
2	1.475	26.0	0.0	11	1.475	25.0	-1.0
3	1.550	27.0	1.0	12	1.550	26.0	0.0
4	1.400	25.0	0.0	13	1.400	26.0	1.0
5	1.475	26.0	1.0	14	1.475	27.0	-1.0
6	1.550	27.0	-1.0	15	1.550	25.0	0.0
7	1.400	26.0	-1.0	16	1.400	27.0	0.0
8	1.475	27.0	0.0	17	1.475	25.0	1.0
9	1.550	25.0	1.0	18	1.550	26.0	-1.0
Validation case							
No.	span	sweep	dihedral	No.	span	sweep	dihedral
1	1.460	25.7	1.0	4	1.480	26.7	0.7
2	1.450	24.5	0.6	5	1.520	27.0	-0.5
3	1.430	26.0	0.0	6	1.485	25.0	0.0

Table 3 Validation case of ROM

No.	Full order analysis			
	$C_L$	$C_D$	L/D	
1	0.29263	0.012939	22.616	
2	0.29176	0.013072	22.320	
3	0.28606	0.012461	22.956	
4	0.29360	0.012751	23.026	
5	0.29654	0.012666	23.413	
6	0.29533	0.013093	22.556	
No.	Reduced order model			
	$C_L$	$C_D$	L/D	L2 error
1	0.29114(0.5%)	0.012564(2.9%)	23.173(2.5%)	1.782E-5
2	0.29568(1.3%)	0.012859(1.6%)	22.994(3.0%)	4.441E-5
3	0.29405(2.8%)	0.012574(0.9%)	23.385(1.9%)	3.918E-5
4	0.29139(0.8%)	0.012418(2.6%)	23.465(1.9%)	1.798E-5
5	0.29081(1.9%)	0.012254(3.2%)	23.731(1.4%)	1.325E-6
6	0.29634(0.3%)	0.012916(0.1%)	22.943(0.1%)	1.764E-5

본 연구에서는 ONERA M6 Wing을 Base line으로, Mach number가 0.8395, AOA이 3.06°인 유동조건에서 3가지 설계변수(Half span, Sweep angle, Dihedral angle)에 대해 메타모델 기법을 이용해 최적설계 하였다. Orthogonal Array(OA)를 통해 3가지 설계변수, 5수준(Level)의 25개 실험계획법(DOE)표를 작성하였고 Polynomial Regression(PR)[24]을 이용하여 메타모델을 생성하였다. 또한 Regression Model 중 Full quadratic polynomial regression을 사용하였다. DOE 해석을 MRA와 FOA로 각각 수행하여 메타모델을 구축하였으며  $C_D$ ,  $C_L$ 에 대한  $R^2$ 값은 MRA에서 99.9603%, 99.9203%, FOA에서 99.9699%, 99.9381%로써 충분한 예측 정확도를 확인했다.

사용된 최적설계알고리즘은 PQRS(Progressive Quadratic Response Surface Method)[26,27]으로 Sequential Approximate Optimization 기법들 중 하나로 목적함수들에 수치적노이즈가 존재할 때 효과적인 기법이다. 설계문제를 정식화 하면 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Find} && \text{Half span, Sweep, Dihedral} \\
 & \text{to minimize} && C_D \\
 & \text{s.t} && C_L > C_{L0} \\
 & && \text{Wing Size} < \text{Wing Size}_0 \times 1.3
 \end{aligned} \tag{14}$$

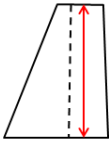
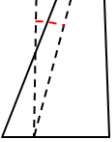
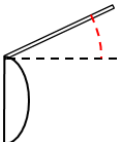
3가지 설계변수들에 대한 정의와 설계범위가 Table 4에 나타나있다. Half span, Sweep angle, Dihedral angle를 설계변수로 설정하여  $C_D$ 를 목적함수로서 최소화하였다. 제한조건으로  $C_L$ 이 Base line에서의 값보다 높도록 하였으며, Wing의 크기가 Base line의 크기보다 30% 이상 커질 수 없도록 제한조건을 설정하였다.

3.2 최적설계 결과 및 비교

3.2.1 최적설계결과 및 ROM의 정확성

MRA와 POD를 결합한 ROM의 최적설계의 효율과 정확성을 확인하기 위해 FOA를 이용한 최적설계와 병행 및 비교하였다. ROM을 이용한 최적설계는 Half span의 길이가 1.5에서

Table 4 Range and definition of design variables

Design Variable	Half span	Sweep angle	Dihedral angle
Definition			
Range	[1.2, 1.8]	[15, 35]	[-7, +7]

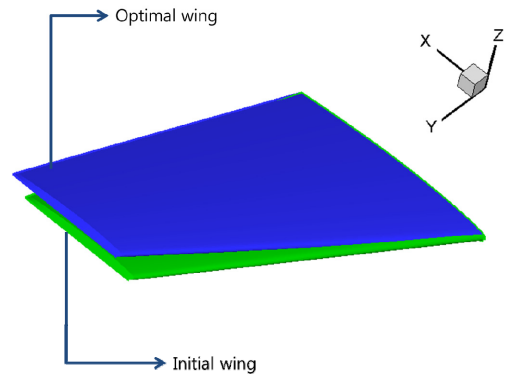


Fig. 7 Geometry comparison of ROM and FOA

1.535750으로, Sweep angle은 25°에서 28.2502°로, Dihedral angle은 3.5°에서 5.80486°로 변경되었다. 최적 설계변수에 따른 유동장을 POD를 이용하여 재생성 하였으며, Table 5를 통해 설계변수와 목적함수의 증감률이 나타나있다. 목적함수로 설정한  $C_D$ 가  $C_L$ 에 대한 제한조건을 만족하는 범위에서 Base line보다 2%감소하고, L/D는 Base line보다 2.058% 증가하였다. 다른 제한조건이었던 Wing size또한 만족하였다. MRA와 POD를 결합한 ROM의 최적설계 결과와 FOA만을 이용한 설계결과의 비교가 Table 6에 나타나 있다.

위의 결과를 통해 연구의 목적이었던 ROM이 FOA의 최적 설계결과의 정확도를 충분히 유지할 수 있는 것을 확인 할 수 있다. Dihedral angle의 경우 공력특성보다 비행 안정성에 중요한 설계변수인만큼 공력특성최적설계에 있어서 간접적인 영향을 미치는데, ROM을 이용한 최적설계 있어서도 FOA와 같은 경향을 보인다. 이를 통해 FOA 와 ROM의 해석에 대한 경향이 일치함을 확인하였다. Fig. 7에 Initial wing과 Optimal wing을 나타내었다.

Table 5 Result of design optimization with ROM

		ROM		
		Initial	Optimal	% of change
Find	Half span	1.50000	1.53575	2.38%
	Sweep	25.0000	28.2502	13.00%
	Dihedral	3.50000	5.80486	65.85%
Obj	$C_D$	0.01240	0.01215	-2.00%
s.t	$C_L$	0.28120	0.28120	0.00%
	Wing size	1.07215	1.06412	-0.75%

Table 6 Comparison of ROM and FOA

		ROM	FOA	% Error
Find	Half span	1.535750	1.533710	0.133%
	Sweep	28.25020	28.18110	0.245%
	Dihedral	5.804860	5.968760	2.727%

3.2.2 ROM의 효율성

이와 같이 높은 정확도를 갖는 ROM 최적설계 에 대한 효율성이 Table 7을 통해 확인 할 수 있다.

ROM을 통한 최적설계는 DOE Chart를 작성함에 있어서 약 3.7배 빠른 시간 안에 작성이 가능하며, 최적설계에 대한 예측 후에 최적화된 설계변수들에 대한 실제 목적함수들을 해석 할 때에 1분 이내의 시간이 소요되기 때문에 많은 Computing cost를 절약할 수 있다. 또한 필요시 DOE chart 작성 과정과 최적화된 유동장을 해석 할 때에 MRA, POD와 FOA를 선택적으로 사용 할 수 있다. 최적화된 설계변수들에 대한 최대 error는 2.82%, 효율은 약 3.8배 빠른 설계시간으로써, 기존의 FOA를 통한 최적설계보다 효율적인 기법을 제시한다.

4. 결 론

본 연구는 Reduced Order Model인 MRA와 POD를 이용한 공력특성 최적설계 기법을 제시하였다. 메타모델 기법을 위해 DOE 기법들 중 OA를 사용하였으며, 작성과정에 MRA 해석 기법을 적용하였다. PQRSM을 최적설계 알고리즘으로 사용하였으며, 최적설계 후 유동장 재생성시에 POD를 적용하였다. 모든 단계에서 ROM혹은 FOA를 선택적으로 적용할 수 있다.

Euler 방정식에서 MRA 해석 기법은 기존의 FOA보다 Iteration당 CPU Time을 30% 정도 가속하였으며 전체 CPU Time을 약 3.7배 빠른 계산 속도를 제공한다. 높은 효율성을 유지하면서 Modified threshold value의 적용으로 3차 정확도를 유지했다. 그 결과 L2 error는 5.712E-7를 유지했으며  $C_L$ 과  $C_D$ 는 각각 0.3%, 0.4%의 오차로 복잡한 유체의 거동 또한 정확하게 모사할 수 있다. 설계범위 내의 임의의 유동장을 POD로 재생성할 때 약 95초의 시간으로 기존 FOA보다 약 80배 정도의 빠른 계산 속도를 보여준다.  $C_L$ 과  $C_D$ 의 오차는 3% 이내의 정확성을 보여줬다. 재생성 CPU Time은 snapshot의 개수, 입력변수, 격자의 수 등에 영향을 받는다.

MRA와 POD를 통한 최적설계는 전체 Computing time을 약 3.8배 효율적으로 수행할 수 있으며, FOA수준의 정확도를 유지하는 새로운 최적설계기법을 제시한다. 나아가 FSI(Fluid Structure Interaction)등의 해석에도 이 기법들을 적용 시킬 수 있다.

Table 7 Efficiency of ROM

	FOA	ROM
Time (min)	2134.12	555.12
Iteration/case (average)	3678	1140
% Error of DVs (average)	-	1.066%
Efficiency	1	0.2601

후 기

본 연구는 2015년도 산업통상자원부의 재원으로 에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 결과입니다. (No. 20133010031751)

References

- [1] 2009, Ball, D., "Recent Applications of CFD to the Design of Boeing Commercial Transports," *HPC User Forum, Roanoke, VA.*
- [2] 1988, Berger, M.J. and Colella, P., "Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics," *Journal of Computational Physics*, Vol.82, pp.64-84.
- [3] 1988, Harten, A., Enquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S.R., "Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.71, pp.239-303.
- [4] 1988, Berger, M.J. and Colella, P., "Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics," *Journal of Computational Physics*, Vol.82, pp.64-84.
- [5] 1994, Harten, A., "Adaptive multiresolution schemes for shock computation," *Journal of Computational Physics*, Vol.115, pp.319-338.
- [6] 1997, Bihari, B.L. and Harten, A., "Multiresolution schemes for the numerical solution of 2-D conservation laws I," *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol.18.2, pp.315-354.
- [7] 1999, Holmström, M., "Solving hyperbolic PDEs using interpolation wavelets," *SIAM Journal on Scientific Computation*, Vol.21, pp.405-420.
- [8] 1995, Sjögreen, B., "Numerical experiments with the multiresolution scheme for the compressible Euler equations," *Journal of Computational Physics*, Vol.117, pp.251-261.
- [9] 2001, Chiavassa, G. and Donat, R., "Point-value multiscale algorithms for 2D compressible flows," *SIAM Journal on Scientific Computation*, Vol.23, pp.805-823.
- [10] 2003, Chiavassa, G. and Donat, R., "Shock vortex interactions at high mach numbers," *Journal of Scientific Computing*, Vol.19, pp.347-371.
- [11] 2003, Cohen, A., Kaber, S.M., Müller, S. and Postel, M., "Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws," *Mathematics of Computation*, Vol.72, pp.183-2250.
- [12] 2007, Muller S, Stiriba Y., "Fully adaptive multiscale



- schemes for conservation laws employing locally varying time stepping," *Journal of Scientific Computing*, Vol.30, pp.493-531.
- [13] 2008, Kang, H., Kim, K., Lee, D. and Lee, D., "Improvement in computational efficiency of Euler equations via a modified Sparse Point Representation method," *Compu. and Fluids*, Vol.37, pp.265-280.
- [14] 2008, Kang, H., Kim, K., Lee, D. and Lee, D., "Improved computational efficiency of unsteady flow problems via the modified wavelet method," *AIAA Journal*, Vol.46, pp.1191-1203.
- [15] 2014, Kang, H., Park, K., Kim, K. and Lee, D., "Multi resolution analysis for high accuracy and efficiency of Euler computation," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.74.9, pp.661-683.
- [16] 2014, Jo, D.U., Park, K.H., Kang, H.M. and Lee, D.H., "IMPLEMENTATION OF ADAPTIVE WAVELET METHOD FOR ENHANCEMENT OF COMPUTATIONAL EFFICIENCY FOR THREE DIMENSIONAL EULER EQUATION," *J. Comput. Fluids Eng.*, Vol.19.2, pp.58-65.
- [17] 2004, Lucia, D.J., Beran, P.S. and Silva, W.A., "Reduced-Order Modeling: New Approaches for Computational Physics," *Progress in Aerospace Science*, Vol.40.1, pp.51-117.
- [18] 2001, Lucia, D.J., "Reduced Order Modelling for High Speed Flows With Moving Shocks," *Ph.D. Dissertation, Air Force Inst. of Technology School of Engineering and Management*.
- [19] 1996, Holmes, P., Lumley, J.L. and Berkooz, G., "Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry," *Cambridge University Press*.
- [20] 2005, Kim, T., "Efficient Reduced-Order System Identification for Linear Systems with Multiple Inputs," *AIAA Journal*, Vol.43.7, pp.1455-1464.
- [21] 2010, Jun, S.O., Park, K.H., Kang, H.M., Lee, D.H. and Cho, M.H., "Reduced Order Model of Three Dimensional Euler Equations Using Proper Orthogonal Decomposition Basis," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol.24.2, pp.601-608.
- [22] 2013, Park, K.H., Jun, S.O., Baek, S.M., Cho, M.H., Yee, K.J. and Lee, D.H., "Reduced-order model with an artificial neural network for aerostructural design optimization," *Journal of Aircraft*, Vol.50.4, pp.1106-1116.
- [23] 1979, Schmitt, V. and Charpin, F., "Pressure distributions on the ONERA-M6-Wing at transonic Mach numbers," *Experimental data base for computer program assessment 4*.
- [24] 1995, Myers, R.H. and Montgomery, D.C., "Response Surface Methodology - Process and Product Optimization Using Designed Experiments Vol.705," *John Wiley & Sons*.
- [25] 1999, Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A. and Stufken, J., "Orthogonal arrays: theory and applications," *Springer Science & Business Media*.
- [26] 2004, Lee, Y., Hong, K.J. and Choi, D.H., "An efficient robust optimal design method for engineering systems with numerical noise," *In Proceedings of the 10th AIAA/ISSMO multidisciplinary analysis and optimization conference*.
- [27] 2001, Hong, K.J., Kim, M.S. and Choi, D.H., "Efficient approximation method for constructing quadratic response surface model," *KSME international journal*, Vol.15.7, pp.876-888.