

Performance Analysis of Volatility Models for Estimating Portfolio Value at Risk

Sung Chil Yeo^{a,1} · Zhaojing Li^a

^aDepartment of Applied Statistics, Konkuk University

(Received March 30, 2015; Revised April 15, 2015; Accepted April 15, 2015)

Abstract

VaR is now widely used as an important tool to evaluate and manage financial risks. In particular, it is important to select an appropriate volatility model for the rate of return of financial assets. In this study, both univariate and multivariate models are considered to evaluate VaR of the portfolio composed of KOSPI, Hang-Seng, Nikkei indexes, and their performances are compared through back testing techniques. Overall, multivariate models are shown to be more appropriate than univariate models to estimate the portfolio VaR, in particular DCC and ADCC models are shown to be more superior than others.

Keywords: Value at Risk, portfolio return, univariate and multivariate volatility models, back testing

1. 서론

금융시장에서 불안정성과 변동성의 증대로 인해 금융기관들이 직면하는 위험을 관리하기 위한 방안으로 최근 VaR가 크게 각광받고 있다. 특히 국제결제은행(Bank for International Settlements; BIS)의 바젤위원회(Basel Committee)가 1996년 바젤협약을 통해 금융기관들의 건전성을 감독하기 위한 자기자본 규제방안에서 금융기관의 내부모형(internal model) 사용으로 VaR에 기초하여 시장위험에 대한 필요자기자본(market risk capital charge; MRC)을 유지하도록 권고한 이후 VaR는 현재 시장위험을 관리하기 위한 중요한 도구로 우리나라를 비롯하여 외국의 금융기관들에서 널리 활용되고 있다.

VaR란 금융시장에서 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격들의 변화로부터 발생하는 시장위험의 크기를 나타내는 척도이다. 즉, VaR는 Jorion (2007)에서 언급한 바와 같이 향후 포트폴리오 가치의 변화로 인해 주어진 신뢰수준에서 보유기간 동안 발생할 수 있는 포트폴리오의 최대손실액을 말한다. VaR의 큰 장점은 여러 금융자산으로 구성된 포트폴리오 전체의 위험을 하나의 수치로 나타내므로 간결하면서도 종합적으로 위험을 평가할 수 있으며 또한 시장위험뿐만 아니라 신용위험, 운영위험 등 다른 위험들을 포함하여 통합적으로 위험을 관리할 수 있다는 것이다.

그런데 VaR의 측정에서 핵심적인 요소인 포트폴리오 수익률의 변동성에 대해서는 표준적인 확률모형이나 추정방법이 제시되지 않는 관계로 각 금융기관들마다 자산운용의 특성에 따라 달리 선택할 수 있다. 따라서 수익률 변동성의 모형설정과 추정방법에 따라 동일한 금융자산에 대해서도 서로 다른 VaR가 산

This paper was supported by Konkuk University in 2013.

¹Corresponding author: Department of Applied Statistics, Konkuk University, 120 Neungdong-ro, Gwangjin-gu, Seoul 143-701, Korea. E-mail: scyee@konkuk.ac.kr

출될 수 있다. 따라서 보다 정확한 VaR를 측정하기 위해서는 해당 포트폴리오 수익률에 가장 적합한 변동성모형을 선택하고 추정하는 것이 매우 중요한 과제라고 할 수 있다.

금융자산 수익률의 변동성을 가장 손쉽게 구하는 방법은 일정기간 동안 관찰된 수익률의 시계열 데이터를 이용하여 표본표준편차를 계산하는 것이다. 이는 수익률의 분포가 시간의 흐름에 관계없이 일정하고 독립적인 경우에는 타당하다고 볼 수 있다. 그러나 Mandelbrot (1963)와 Fama (1965)의 연구를 비롯하여 이후 이루어진 많은 선행연구들에 의하면 포트폴리오 수익률의 분포는 정규분포 보다 두터운 꼬리형태를 가지면서 시가변적(time varying)인 변동성 군집(volatility clustering)현상과 변동성 비대칭 현상을 보이는 것으로 알려져 있다. 즉, 수익률의 변동성은 시간의 흐름에 관계없이 일정한 것이 아니라 어떤 기간의 변동성은 이전 기간의 변동성에 의존적인 형태를 보이면서 변동성이 커진 상태와 작아진 상태가 일정기간 군집을 이루면서 교대로 나타난다. 또한 음의 수익률이 양의 수익률보다 변동성에 더 큰 영향을 주는 현상을 보인다는 것이다. 이러한 수익률 변동성의 조건부 이분산성(conditional heteroscedasticity)을 반영하는 모형으로 Engle (1982)은 ARCH(autoressive conditional heteroscedastic)모형을 처음 제안하였으며 Bollerslev (1986)는 ARCH모형을 일반화한 GARCH(generalized ARCH)모형을 제시하였다. 그런데 이들 두 모형은 수익률 변동성의 비대칭적인 특징을 설명하지 못하는 관계로 비대칭성을 반영하기 위한 여러 변형된 GARCH모형들, 예컨대 Nelson (1991)의 EGARCH(exponential GARCH)모형, Glosten 등 (1993)의 GJR-GARCH(혹은 TGARCH)모형 등을 비롯한 다양한 GARCH계열 모형들이 활발히 연구되고 제시되었다.

그런데 위에서 언급한 변동성모형은 개별 자산 수익률에 대한 일변량 모형들로서 여러 금융자산 수익률들 사이의 연관성을 설명하지 못한다. 따라서 이들 수익률을 동시에 고려하기 위한 다변량 변동성모형에 대한 연구가 더불어 진행되었다. 예컨대 Bollerslev 등은 EWMA(exponentially weighted moving-average)모형을 일반화한 DVEC(diagonal vectoriaztion)모형을 제시하였으며 Engle과 Kroner (1995)는 DVEC모형의 단점을 보완하여 BEKK(Baba-Engle-Kraft-Kroner)모형을 제시하였다. 그런데 이들 모형은 다변량의 차수가 증가함에 따라 추정해야할 공분산행렬의 원소의 수가 급격히 증가하는 문제를 야기시킨다. 이러한 모수추정상의 어려움을 극복하기 위해 모형을 단순화 하거나 차원을 축소시키는 여러 변형된 모형들이 제안되었다. 예를 들면 Bollerslev (1990)는 시계열간 상관계수가 시간의 변화에 관계없이 일정하다고 가정한 CCC(constant conditional correlation)모형을 제안하였고, Engle (2002)과 Tse와 Tsui (2002)은 시계열간 상관계수가 시간의 흐름에 따라 바뀐다고 설정한 DCC(dynamic conditional correlation)모형을 각각 제안하였으며, Cappiello 등 (2006)은 시계열간 상관계수의 비대칭적 효과를 반영하여 DCC모형을 확장한 ADCC(asymmetric DCC)모형을 제안하였다. 또한 Alexander와 Chibumba (1997)는 시계열의 차원을 축소시키기 위해 인자분석 방법을 적용한 O-GARCH(orthogonal GARCH)모형을 제안하였다. 다변량 GARCH모형들에 관해 포괄적으로 서술한 논문으로 Bauwens 등 (2006)과 Silvennoinen과 Teräsvirta (2009) 등이 있으며, 일변량과 다변량 변동성모형들에 대해 설명한 책으로는 Tsay (2010)와 Zivot과 Wang (2006) 등이 있다.

한편, 포트폴리오 VaR를 추정하기 위해서는 일변량모형과 다변량모형을 각각 적용할 수 있다. 이 경우에 각 모형의 장단점과 어떤 모형이 VaR의 추정에 대해 보다 우월한지 관심이 될 수 있다. 먼저 일변량모형을 적용하는 경우는 단순히 개별자산 수익률을 가중합산하는 방식이므로 변동성계산의 간편함이 있는 반면에 각 자산들간의 상관관계가 반영되지 않으면서 또한 포트폴리오를 구성하는 각 자산의 가중치가 바뀔 때 마다 해당 포트폴리오의 표준편차를 다시 계산해야 하는 번거로움이 따른다. 그런데 다변량모형의 경우에는 추정해야할 모수의 수가 매우 많아 분산-공분산행렬 추정의 어려움이 있는 대신에 각 자산들 간의 상관관계가 반영되고 또한 포트폴리오의 가치가 변할 때마다 분산-공분산행렬을 다시 추정할 필요없이 변화된 각 자산의 가중치를 바꾸어 주지만 하면 되므로 포트폴리오의 표준편차를 보다

편리하게 구할 수 있는 장점이 있다. 지금까지 포트폴리오 VaR의 측정을 위해 일변량모형과 다변량모형을 적용한 연구들은 많이 있는데 그 중 예를 들면 Berkowitz와 O'Brien (2002), Brooks와 Persaud (2003), Cho (2004), Christoffersen (1998), Hwang 등 (2009), Sarma 등 (2003), Lee (2011), Lee와 Binh (2008), McAleer과 da Veiga (2008), Park 등 (2011), Restrepo (2012), Rombouts와 Verbeek (2009) 등이 있다. 그런데 이들 논문들은 대부분 일변량모형과 다변량모형을 각각 별도로 적용하여 분석하였으며 함께 적용한 논문의 경우에도 이들 모형 중 제한된 일부 모형들만을 사용하였다.

본 논문에서는 동아시아의 주요 국가인 한국, 중국, 일본의 대표적인 주가지수들인 코스피(KOSPI), 항셱(Hang-Seng), 니케이(Nikkei) 지수들로 구성된 포트폴리오에 대해서 여러 유형의 일변량모형과 다변량모형을 동시에 적용하여 VaR를 측정하고 사후검증을 통해 그 성과를 비교분석하였다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 1절의 서론에 이어 제 2절에서는 VaR의 기본개념에 대해 살펴보고 VaR의 측정과 사후검증방법에 관해 논의하였다. 제 3절에서는 포트폴리오 VaR측정을 위해 본 논문에서 적용하는 일변량모형들과 다변량모형들에 관해 살펴보았다. 제 4절에서는 코스피, 항셱, 니케이 지수들로 구성된 포트폴리오 VaR의 추정과 사후검증에 관해 실증적으로 분석하였다. 그리고 제 5절에서는 본 논문의 결론과 함께 추후 연구에 대해 언급하였다.

2. VaR의 측정과 사후검증

2.1. VaR의 측정

VaR는 Jorion (2007)에서 언급한 바와 같이 향후 포트폴리오 가치의 변화로 인해 주어진 신뢰수준에서 보유기간 동안 발생할 수 있는 포트폴리오의 최대손실액을 말한다. 즉, VaR는 다음과 같이 정의된다.

$$P(\Delta V_t[l] > \text{VaR}) = 1 - \alpha, \quad (2.1)$$

여기서 $\Delta V_t[l] = V_{t+1} - V_t$ 로서 t 시점 전까지 정보가 주어졌을 때 t 시점부터 향후 l 보유기간동안 포트폴리오의 가치변동액이고 $1 - \alpha$ 는 신뢰수준을 나타낸다. 보유기간동안 포트폴리오의 가치가 상승하면 매수포지션에서 $\Delta V_t[l]$ 는 양의 값을, 하락하면 음의 값을 가지고 반대로 매도포지션에서 $\Delta V_t[l]$ 는 상승하면 음의 값을, 하락하면 양의 값을 가지게 된다. 본 논문에서는 편의상 매수포지션을 가정하여 포트폴리오 수익률의 확률분포에서 왼쪽꼬리부분을 고려하기로 한다.

식 (2.1)에서 정의된 VaR를 단일금융자산의 경우와 포트폴리오 금융자산의 경우에 구체적으로 표현해 보기로 한다. 먼저 단일자산의 경우 t 시점까지의 과거 정보들의 집합 \mathcal{F}_t 가 주어졌을 때 t 시점부터 $t + 1$ 시점까지 자산수익률의 확률분포가 정규분포, 즉 $r_{t+1}|\mathcal{F}_t \sim N(\mu_{t+1}, \sigma_{t+1}^2)$ 를 따른다고 가정하면 신뢰수준 $1 - \alpha$ 에서 금융자산의 VaR는 다음과 같이 주어진다.

$$\text{VaR}_t = V_t(\mu_{t+1} - z_\alpha \sigma_{t+1}), \quad (2.2)$$

여기서 V_t 는 t 시점의 자산가치를 나타낸다.

한편, 포트폴리오 자산의 경우 t 시점부터 $t + 1$ 시점까지 n 개의 개별자산의 수익률을 $r_{i,t+1}$ ($i = 1, \dots, n$)라고 하면 이들 n 개의 자산으로 구성된 포트폴리오 수익률 $r_{p,t+1}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$r_{p,t+1} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i,t+1}, \quad (2.3)$$

여기서 w_i 는 t 시점에서 포트폴리오가치에 대한 i 번째 자산가치의 비중을 나타낸다.

이제 n 개의 개별자산들의 수익률벡터가 다변량정규분포, 즉 $\mathbf{r}_{t+1}|\mathcal{F}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}_{t+1}, \boldsymbol{\Sigma}_{t+1})$ 를 따른다고 하면 \mathcal{F}_t 가 주어졌을 때 포트폴리오 수익률 $r_{p,t+1}$ 의 분포는 정규분포 $N(\mu_{p,t+1}, \sigma_{p,t+1}^2)$ 를 따른다. 따라서 신뢰수준 $1 - \alpha$ 에서 포트폴리오의 VaR는 다음과 같이 주어진다.

$$\text{VaR}_{p,t} = V_{p,t}(\mu_{p,t+1} - z_\alpha \sigma_{p,t+1}), \quad (2.4)$$

여기서 $V_{p,t}$ 는 t 시점의 포트폴리오 자산가치를 나타내고, $\mu_{p,t+1} = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}_{t+1}$, $\sigma_{p,t+1}^2 = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_{t+1}\mathbf{w}$, $\mathbf{w}' = (w_1, \dots, w_n)$, $\boldsymbol{\mu}'_{t+1} = (\mu_{1,t+1}, \dots, \mu_{n,t+1})$ 이다.

2.2. 사후검증

사후검증은 과거의 자료를 이용하여 제시된 모형에 의한 VaR측정의 성과를 검증하는 것이다. 즉, 현재 시점에서 과거 일정기간 동안의 자료를 이용하여 모형의 VaR 예측값과 실제 손실값을 비교하여 제시된 VaR모형의 정확성을 판단하는 방법이다. 본 논문에서는 사후검증의 방법으로 Christoffersen (1998)이 제안한 우도비 검정방법과 Lopez (1998, 1999)에 의한 손실함수(loss function)에 기초한 방법을 사용하기로 한다.

t 시점에서 $t + 1$ 시점까지 포트폴리오의 가치변동액을 $\Delta V_t = V_{t+1} - V_t$ 라고 하고 다음의 지시확률변수를 고려한다.

$$I_t = I \left\{ \Delta V_t < -\widehat{\text{VaR}}_t \right\}. \quad (2.5)$$

식 (2.5)는 일별구간 $[t, t + 1]$ 동안 포트폴리오의 실제 손실액이 VaR예측치를 초과하면 $I_t = 1$, 그렇지 않으면 $I_t = 0$ 임을 나타낸다. 따라서 I_t 는 평균이 $p = P(\Delta V_t < -\widehat{\text{VaR}}_t)$ 인 베르누이분포를 따르는 확률과정을 나타낸다. Kupiec (1995)은 식 (2.5)에서 주어진 실패율에 기초하여 사후검증을 위한 우도비 검정통계량을 다음과 같이 제시하였다.

$$\text{LR}_{uc} = -2 \ln \left\{ \frac{p^{n_1} (1 - p)^{n_0}}{\pi^{n_1} (1 - \pi)^{n_0}} \right\}, \quad (2.6)$$

여기서 p 는 VaR의 신뢰수준에 따라 주어지며, $n_1 = \sum I_t$ 는 실제손실액이 VaR예측치를 초과한 횟수, n_0 은 초과하지 않은 횟수, $\pi = n_1 / (n_0 + n_1)$ 는 실제 초과비율을 나타낸다. 식 (2.6)의 검정통계량 LR_{uc} 은 신뢰수준 $1 - p$ 에서 제시된 모형이 VaR측정에 적합한지를 묻는 귀무가설하에서 근사적으로 자유도가 1인 카이제곱분포를 따른다.

Kupiec (1995)이 제안한 검정은 매우 간편한 방법이지만 검정력이 낮다는 단점을 갖고 있다. Christoffersen (1998)은 Kupiec (1995)의 방법을 확장하여 식 (2.6)에서 주어진 비조건부 커버리지 검정과 독립성검정을 결합하여 조건부 커버리지 검정방법을 제시하였다. 먼저 독립성검정은 지시확률변수 I_t 들의 실현치 0과 1이 나타나는 패턴이 서로 독립적인지를 검정하는 것이다. 구체적으로 독립성검정을 위한 우도비검정 통계량은 다음과 같이 주어진다.

$$\text{LR}_{ind} = -2 \ln \left\{ \frac{(1 - \pi)^{n_{00} + n_{10}} \pi^{n_{01} + n_{11}}}{(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}} \right\}, \quad (2.7)$$

여기서, $\pi_{ij} = n_{ij} / \sum_j n_{ij}$, $n_{ij} = \sum I\{I_t = j | I_{t-1} = i\}$, ($i, j = 0, 1$)을 나타낸다. 식 (2.7)의 LR_{ind} 은 I_t 들이 서로 독립이라는 귀무가설하에서 근사적으로 자유도가 1인 카이제곱분포를 따른다.

Christoffersen (1998)의 조건부 커버리지 검정은 지시확률변수 I_t 들의 실현치로서 0과 1이 나타나는 횟수의 적정성과 독립성을 동시에 고려하기 위하여 식 (2.6)의 비조건부 검정과 식 (2.7)의 독립성검정을

결합한 것으로서 다음의 검정통계량을 나타낸다.

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}, \quad (2.8)$$

여기서 LR_{cc} 는 귀무가설 $\pi = \pi_{01} = \pi_{11} = p$ 하에서 근사적으로 자유도가 2인 카이제곱분포를 따른다.

한편, Lopez (1998, 1999)는 VaR측정의 성과를 평가하기위한 방안으로 실제 관찰된 수익률과 예측된 VaR의 차이를 기준으로 다음과 같이 손실함수를 도입하였다.

$$L_t = \begin{cases} (r_t - VaR_t)^2, & \text{if } r_t > VaR_t, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (2.9)$$

식 (2.9)에서 보는 바와 같이 손실함수 L_t 의 값은 VaR예측이 실제 관측된 수익률을 초과하는 정도가 커질수록 값이 커지게 된다. 따라서 $L = \sum_t L_t$ 의 값이 작아질수록 VaR의 예측이 우수하다고 볼 수 있다.

3. VaR 측정을 위한 변동성 모형

3.1. 일변량 변동성모형

$t-1$ 시점까지의 정보집합 \mathcal{F}_{t-1} 이 주어졌을 때 금융자산의 수익률 r_t 에 대해 다음과 같이 표현하자.

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (3.1)$$

여기서 $\mu_t = E(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$ 와 $\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$ 는 \mathcal{F}_{t-1} 이 주어졌을 때 r_t 의 조건부 평균과 조건부분산을 각각 나타낸다. 그리고 a_t 는 t 시점에서 자산수익률의 충격(shock, innovation)이며, $\{\epsilon_t\}$ 는 평균 0, 분산 1인 독립이고 항등적인 확률변수들이다. 본 논문에서는 VaR측정을 위해 σ_t^2 에 대한 일변량 변동성모형으로 GARCH모형, EGARCH모형, IGARCH모형, TGARCH모형, PGARCH모형에 관해 간략히 살펴보기로 한다.

3.1.1. GARCH모형 GARCH모형은 Engle (1982)의 ARCH모형을 일반화한 것으로서 Bollerslev (1986)에 의해 제안되었다. 일반적인 GARCH(p, q)모형은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.2)$$

여기서 $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ 상수이고 또한 $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ 이다.

식 (3.2)에서 $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$, $\sigma_{t-j}^2 = a_{t-j}^2 - \eta_{t-j}$ ($j = 0, \dots, q$)라 두면 GARCH(p, q)모형은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \eta_{t-j}, \quad (3.3)$$

여기서 $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$, $\sigma_{t-i}^2 = a_{t-i}^2 - \eta_{t-i}$ ($i = 0, \dots, q$)이다. 따라서 GARCH모형은 제곱오차항 a_t^2 에 대한 ARMA모형의 형태를 갖는다.

GARCH(p, q)모형의 식 (3.2)에서 β_j 가 0이면 과거 변동성 항이 사라져서 ARCH(p)모형으로 축소된다. 그런데 ARCH(p)모형에서 차수 $p \rightarrow \infty$ 이면 GARCH(1, 1)이 되므로 ARCH모형에서 차수 p 가 클 경우 추정해야 할 모수가 훨씬 적은 GARCH(1, 1)모형을 사용하는 것이 효율적이라고 할 수 있다.

3.1.2. IGARCH모형 Engle과 Bollerslev (1986)에 의해 제시된 IGARCH모형은 식 (3.3)의 GARCH모형에서 AR다항식 부분이 단위근을 가질 경우 즉, $\alpha_i + \beta_i = 1$ 에 해당된다. IGARCH 모형의 주요 특징은 ARIMA모형의 경우와 같이 제공된 오차항에 미치는 과거 충격의 영향이 영속적이라는 점이다. 예컨대 IGARCH(1, 1)모형은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2, \quad (3.4)$$

여기서 β_1 은 충격소멸계수(decay factor)로서 $0 < \beta_1 < 1$ 이다. 특히 $\alpha_0 = 0$ 일 때 IGARCH(1, 1)모형은 미국의 금융기관인 모간(J. P. Morgan)사의 위험관리시스템인 RiskMetrics에서 사용하는 변동성추정모형인 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average)모형이다.

3.1.3. TGARCH모형 Bollerslev (1986)가 제안한 GARCH모형은 조건부 분산이 과거 오차항의 크기에만 의존할 뿐 그 부호에는 영향을 받지 않는다. 즉 오차항이 양수이든 음수이든 상관없이 절대값이 같으면 동일한 조건부분산을 가지므로 양의 충격(예: 좋은뉴스)과 음의 충격(예: 나쁜뉴스)에 따른 변동성의 반응이 대칭적이다. 그런데 Black (1976)은 음의 충격이 양의 충격보다 수익률 변동성에 더 크게 영향을 미친다는 레버리지 효과를 소개하였다. 따라서 Glosten 등 (1993)과 Zakoian (1994)은 수익률 변동성의 비대칭성과 레버리지효과를 설명할 수 있는 threshold GARCH(TGARCH)모형을 제시하였다. 일반적으로 TGARCH(p, q)은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.5)$$

여기서 $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$ 이고 I_t 는 지시함수로서 $I_t = I\{a_t < 0\}$ 이다.

식 (3.5)에서 오차항이 음수일 때 지시함수 I_t 가 1이 되므로 γ_i 가 양수라면 오차항이 양수일 때보다 변동성이 더 크게 되어 변동성의 비대칭성을 반영하는 레버리지 효과가 존재한다고 볼 수 있다.

3.1.4. EGARCH모형 변동성의 비대칭성과 레버리지효과를 나타내기위한 또 다른 모형으로 Nelson (1991)은 exponential GARCH(EGARCH)모형을 제안하였다. 특히 GARCH모형이나 TGARCH모형의 경우 조건부분산이 양의 값을 가지도록 모수에 제한을 두는데 비해 EGARCH모형은 이러한 제약이 없는 모형이다. 일반적으로 EGARCH(p, q)은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2), \quad (3.6)$$

여기서 $\alpha_0, \alpha_i, \beta_j, \gamma_i$ 는 상수이다.

식 (3.6)에서 우변 두 번째 항은 a_{t-i} 가 양수이면 $\alpha_i(1 + \gamma_i)|a_{t-i}|$ 가 되고, a_{t-i} 가 음수이면 $\alpha_i(1 - \gamma_i)|a_{t-i}|$ 가 된다. 따라서 γ_i 가 음수이면 과거 수익률이 음의 충격일 때 변동성이 양의 충격일 때 보다 더 크게 반영하는 레버리지효과가 존재한다고 볼 수 있다.

3.1.5. PGARCH모형 모형의 승수값을 포함하는 개수들이 조정하기 위하여 Ding 등 (1993)은 여러 유형의 ARCH모형들을 포괄하는 형태로 PGARCH모형을 제안하였다. 일반적으로 PGARCH(p, q, d)모형은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| + \gamma_i \epsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta, \quad (3.7)$$

여기서 $\delta > 0$ 이고 γ_i 는 비대칭적 반응의 계수이다. 특히 $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$ 이면 GARCH모형으로 전환되고, $\delta = 2$, $\gamma_i = 2$ 이면 TGARCH모형으로 전환된다.

3.2. 다변량 변동성모형

$t - 1$ 시점까지의 정보집합 \mathcal{F}_{t-1} 이 주어졌을 때 k 개 금융자산들의 수익률벡터 $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, \dots, r_{kt})'$ 에 대해 다음과 같이 표현하자.

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{a}_t, \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (3.8)$$

여기서 $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1})$ 와 $\boldsymbol{\Sigma}_t = \text{Var}(\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1})$ 는 \mathcal{F}_{t-1} 이 주어졌을 때 \mathbf{r}_t 의 조건부 평균벡터와 조건부 분산-공분산행렬을 각각 나타낸다. 그리고 \mathbf{a}_t 는 t 시점에서 자산수익률의 충격(shock, innovation)이며, $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$ 는 $\{\mathbf{a}_t\}$ 의 표준화된 충격들, 즉 평균벡터가 0, 분산-공분산행렬이 k 차원 단위행렬 \mathbf{I}_k 인 독립이고 항등적인 랜덤벡터들이다.

본 논문에서는 VaR측정을 위해 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ 에 대한 다변량 변동성모형으로 EWMA(exponentially weighted moving average)모형, DVEC(diagonal vectorization)모형, BEKK(Baba-Engle-Kraft-Kroner)모형, CCC(constant conditional correlation)모형, DCC(dynamic conditional correlation)모형, ADCC(asymmetric DCC)모형에 대해 살펴보기로 한다.

3.2.1. EWMA모형 $t - 1$ 시점까지의 정보집합 \mathcal{F}_{t-1} 이 주어졌을 때 EWMA모형은 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ 가 시간가변적임을 고려하여 충격 $\{\mathbf{a}_t\}$ 가 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ 에 미치는 영향이 시간이 지날수록 그 가중치가 지수적으로 감소한다고 가정하고 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \mathbf{a}_{t-i} \mathbf{a}'_{t-i}, \quad (3.9)$$

여기서 λ 는 소멸계수(decay factor)로서 $0 < \lambda < 1$ 이다.

식 (3.9)에서 가중치들 λ^i 의 합이 1이라고 하면 EWMA모형은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = (1 - \lambda) \mathbf{a}_{t-1} \mathbf{a}'_{t-1} + \lambda \boldsymbol{\Sigma}_{t-1}. \quad (3.10)$$

3.2.2. DVEC모형 Bollerslev 등 (1988)는 일변량 GARCH모형을 다변량 모형으로 일반화하여 다음과 같은 VEC(p, q)모형을 제시하였다.

$$\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_t) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^p A_i \text{vech}(\mathbf{a}_{t-i} \mathbf{a}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^q B_j \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{t-j}), \quad (3.11)$$

여기서 $\text{vech}(\cdot)$ 는 정방행렬의 하방삼각(lower triangular)부분을 열벡터로 나타낸 연산자이고, $\boldsymbol{\alpha}_0$ 는 $k(k+1)/2 \times 1$ 벡터이며, A_i 와 B_j 는 각각 $k(k+1)/2 \times k(k+1)/2$ 정방행렬을 나타낸다.

식 (3.11)에서 주어진 VEC(p, q)모형은 상당한 유연성이 있다는 장점이 있지만 추정해야 할 모수의 수가 $k(k+1)/2 + (p+q)(k(k+1)/2)^2$ 로서 금융자산의 개수 k 가 증가함에 따라 k^4 의 속도로 급격히 증가하게 되어 모수의 추정이 곤란해지는 문제점을 가지고 있다. 또한 분산-공분산 행렬 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ 가 양정치행렬의 조건을 만족하지 않을 수도 있다. 따라서 Bollerslev 등 (1988)는 모수추정을 간편화하기 위한 방안으로 식 (3.11)에서 각각의 변동성이 자신의 과거값과 충격에만 의존한다고 가정하여 행렬 A_i 와 B_j 를

대각행렬로 제한하는 DVEC모형을 제안하였다. 그런데 DVEC모형의 경우 추정해야 할 모수의 수는 $(p+q+1)k(k+1)/2$ 로 축소되고 또한 각각의 변동성은 서로 분리해서 추정할 수가 있게 되는 간편함이 있는 반면에 각 변동성들 간의 동적 의존성을 반영하지 못하는 한계점을 내포하고 있다.

식 (3.11)로 표현된 DVEC(p, q)모형은 S-plus에서 행렬의 형태로 변환해서 나타내면 다음과 같다.

$$\Sigma_t = A_0 + \sum_{i=1}^p A_i \odot (\mathbf{a}_{t-i} \mathbf{a}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^q B_j \odot \Sigma_{t-j}, \quad (3.12)$$

여기서 A_0, A_i 와 B_j 는 $k \times k$ 대칭행렬이고, \odot 는 아다마르곱(Hadamard product)을 나타낸다.

3.2.3. BEKK모형 VEC모형 혹은 DVEC모형이 분산-공분산 행렬의 양정치조건을 보장하지 못하는 문제점을 해결하는 방안으로 Engle과 Kroner (1995)는 BEKK모형을 제시하였다. BEKK(p, q)모형의 식은 다음과 같이 주어진다.

$$\Sigma_t = A_0 A_0' + \sum_{i=1}^p A_i (\mathbf{a}_{t-i} \mathbf{a}'_{t-i}) A_i' + \sum_{j=1}^q B_j \Sigma_{t-j} B_j', \quad (3.13)$$

여기서 A_0 는 $k \times k$ 하삼각행렬이고, A_i 와 B_j 는 $k \times k$ 정방행렬이다.

식 (3.13)에서 $A_0 A_0'$ 가 양정치행렬이기만 하면 Σ_t 는 항상 양정치행렬이 된다. BEKK모형은 DVEC모형과 달리 각각의 자산수익률의 변동성이 자신뿐만이 아니라 다른 자산수익률의 과거 관찰치들로 구성되어 있어서 각 수익률의 변동성들 간의 동적 연관성을 반영하는 장점이 있다. 그러나 A_i 와 B_j 에 내포된 모수들이 변동성 혹은 충격에 관해 직접적으로 의미를 부여하기가 곤란하다. 또한 이 모형에서 추정해야 할 모수의 수가 $(p+q)k^2 + k(k+1)/2$ 로서 금융자산의 개수 k 가 증가함에 따라 k^3 의 속도로 증가하게 되어 금융자산의 수 k 가 클 경우 여전히 모수의 추정이 어려워지는 문제점이 있다.

3.2.4. CCC모형 DVEC모형과 BEKK모형이 가지고 있는 양정치행렬의 문제점과 모수추정의 어려움을 해결하고자 Bollerslev (1990)는 수익률들 간의 조건부 상관계수가 시간의 흐름에 따라 변하지 않는 상수들이라고 가정한 다음의 CCC모형을 제안하였다.

$$\Sigma_t = \{\sigma_{ij,t}\} = D_t R D_t, \quad (3.14)$$

여기서 $D_t = \text{diag}\{\sigma_{1,t}, \dots, \sigma_{k,t}\}$ 는 $k \times k$ 대각행렬, $R = \{\rho_{ij}\}$ 은 수익률들의 $k \times k$ 상관행렬, $\sigma_{ij,t} = \sigma_{i,t} \rho_{ij} \sigma_{j,t}$, $i, j = 1, \dots, k$, $\sigma_{ii,t} = \sigma_{i,t}^2$ 는 수익률 $r_{i,t}$ 의 조건부분산으로 일변량 GARCH모형을 따른다.

일반적으로 CCC모형은 각 수익률의 조건부분산 $\sigma_{i,t}^2$ 이 일변량 GARCH모형을 따른다고 가정한다. 그런데 GARCH모형이 변동성의 비대칭성과 레버리지효과를 반영하지 못하는 한계점이 있으므로 이를 보완하기 위한 방편으로 CCC모형에서 각 수익률의 변동성이 TGARCH모형이나 EGARCH모형 등을 따른다고 가정할 수 있다.

3.2.5. DCC모형 CCC모형은 수익률들 간의 조건부 상관계수가 상수들이라고 가정함으로써 이들 상관관계가 시간에 따라 변하는 동태성을 반영하지 못하는 단점이 있다. 따라서 Engle (2002)은 수익률들 간의 시간-가변적인 상관관계를 나타내는 DCC모형을 다음과 같이 제안하였다.

$$R_t = V_t^{-\frac{1}{2}} Q_t V_t^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

여기서 $V_t^{-1/2} = \text{diag}\{\sqrt{q_{11,t}}, \dots, \sqrt{q_{kk,t}}\}$ 는 $k \times k$ 대각행렬, $Q_t = \{q_{ij,t}\}$ 는 $k \times k$ 양정치행렬로서 다음을 만족한다.

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta)\bar{Q} + \alpha\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1} + \beta Q_{t-1}, \quad (3.16)$$

여기서 α 과 β 는 음수가 아닌 모수로 $0 < \alpha + \beta < 1$ 이고, \bar{Q} 는 $\epsilon_t = \Sigma_t^{-1/2}\mathbf{a}_t$ 의 비조건부 분산-공분산행렬이다.

한편 Tse와 Tshui (2002)도 Engle (2002)과 다른 형태의 DCC모형을 제안하였다. 이들의 DCC모형은 CCC모형과 같이 각 수익률의 조건부분산 $\sigma_{i,t}^2$ 이 일변량 GARCH모형을 따른다고 가정한다. 그리고 이들 모형이 수익률들 간의 상관관계에 시간-가변적인 동태성을 고려하고 있지만 이들 상관관계가 모두 동일한 형태의 동태성을 갖는다는 한계점을 지니고 있다.

3.2.6. ADCC모형 앞에서 언급한 DCC모형이 CCC모형과 같이 각 수익률의 조건부분산 $\sigma_{i,t}^2$ 이 일변량 GARCH모형을 따른다고 가정함으로써 변동성의 비대칭적 효과를 반영하지 못하는 단점을 극복하기 위해 Capiello 등 (2006)은 ADCC모형을 다음과 같이 제안하였다.

$$Q_t = (\bar{Q} - \alpha\bar{Q} - \beta\bar{Q} - \gamma\bar{D}) + \alpha\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1} + \beta Q_{t-1} + \gamma\delta_{t-1}\delta'_{t-1}, \quad (3.17)$$

여기서 $\delta_t = \mathbf{I}\{\epsilon_t < 0\} \odot \epsilon_t$, $\mathbf{I}\{\cdot\}$ 는 $k \times 1$ 지시벡터이고, $\bar{D} = E(\delta_t\delta'_t)$ 이다. 그리고 Q_t 가 양정치행렬이 되기 위해 α, β, γ 는 양의 모수로서 $0 < \alpha + \beta + \lambda\gamma < 1$ 라고 가정한다. 여기서 λ 는 $\bar{Q}^{-1/2}\bar{D}\bar{Q}^{-1/2}$ 의 최대 고유값이다.

식 (3.17)에서 보는 바와 같이 ADCC모형은 δ_t 항을 통해 수익률들간의 조건부 동태적 상관관계의 비대칭적효과가 반영된다. 또한 DCC모형이나 ADCC모형의 경우에도 각 수익률의 조건부 변동성모형으로 일변량 GARCH모형이외에 TGARCH모형이나 EGARCH모형 등을 가정할 수 있다.

4. 실증분석

4.1. 자료

본 절에서는 앞에서 제시한 여러 유형의 일변량모형들과 다변량모형들 중에서 어떤 모형이 포트폴리오 VaR의 측정에 가장 우수한 성과를 보이는지 실증적으로 분석하고자 한다. 분석에 사용된 자료는 한국의 코스피, 중국의 항셱, 일본의 니케이 지수들로서 VaR측정을 위한 모형설정과 추정을 위하여 2005년 1월 4일부터 2010년 12월 30일까지의 일별증가를 로그차분한 수익률자료(총 1,373관측치)를 표본내 기간(in sample period)으로 사용하였다. 그리고 VaR측정의 성과분석을 위해 2011년 1월 4일부터 2013년 12월 30일까지의 일별증가를 로그차분한 수익률자료(총 678관측치)를 표본외 기간(out of sample period)으로 사용하여 사후검증을 실시하였으며, 본 논문의 실증분석을 위해 R과 Splus의 FinMetrics를 사용하였다.

Figure 4.1은 코스피, 항셱, 니케이 지수들과 이들 지수들로 구성된 포트폴리오에 대한 일별 로그차분수익률들에 대한 시계열그래프들이다. 여기서 포트폴리오는 편의상 이들 세 개의 종목들에 대해 동일가중치를 적용하였으며 일별 투자금액은 1이라고 가정하였다. Figure 4.1을 보면 이들 로그차분 수익률자료들이 다 같이 평균적으로 0을 중심으로 변동성군집현상을 나타냄을 쉽게 확인할 수 있다. 그리고 이들 수익률자료들에 대한 ADF(Augmented Dickey-Fuller)검정과 PP(Phillips-Perron)검정을 실시한 결과 p -값이 모두 1%이하가 되어 단위근이 존재한다고 볼 수 없으므로 이들 그래프는 정상시계열이라고 볼 수 있다. Table 4.1은 이들 수익률자료에 대한 기본 통계결과를 보여주고 있다. Table 4.1로부터 일별

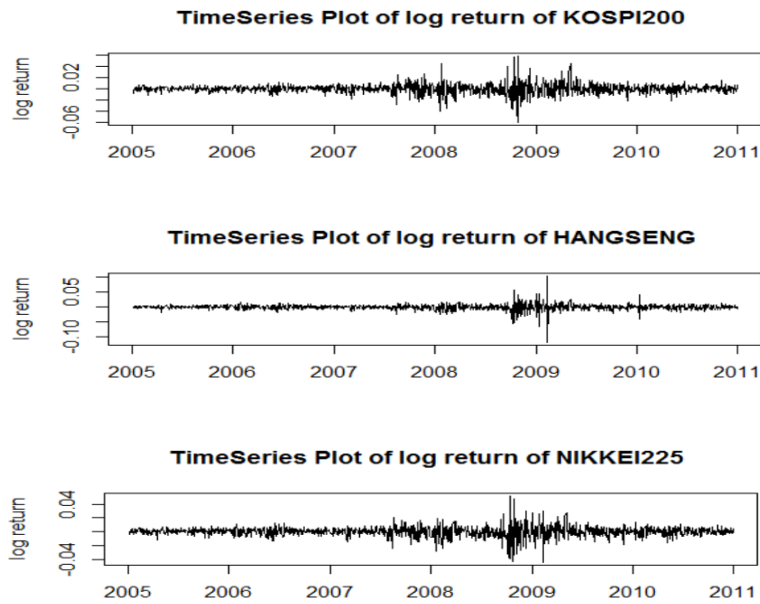


Figure 4.1. Time series plots of daily log returns for KOSPI, Hang-Seng and Nikkei indexes.

Table 4.1. Basic statistics of daily log returns for KOSPI, Hang-Seng, Nikkei and Portfolio

	KOSPI200	Hang-Seng	Nikkei225	Portfolio
Mean	0.00017653	8.61855e-05	-4.915e-05	7.11876e-05
Median	0.000568003	0.000259413	0.000169344	0.00028894
Maximum	0.05011629	0.05822503	0.1045144	0.05153414
Minimum	-0.04735054	-0.05898598	-0.1178667	-0.04415159
Standard Deviation	0.007479601	0.007439479	0.008300069	0.006635105
Skewness	-0.3089372	0.1523781	-0.8211749	-0.2585731
Kurtosis	4.046289	9.492615	35.43127	7.485663
Jarque-Bera	1596.458 (0.0000)*	8589.049 (0.0000)	119744.4 (0.0000)	5361.878 (0.0000)
sample size	1373	1373	1373	1373

* Numbers in parentheses () represent p -values.

과 같이 자산보유기간이 짧은 경우 수익률들의 평균은 거의 제로에 가까우므로 앞으로 VaR의 계산에서 수익률의 평균은 0으로 간주해도 무방하다. 또한 이들 수익률자료의 왜도, 첨도 및 Jarque-Bera통계량의 값들을 살펴보면 이들 수익률자료의 분포가 정규분포와 달리 비대칭적이고 봉우리 부분은 뾰족하면서 꼬리부분은 두터운 형태를 띠고 있다고 볼 수 있다. 이들 수익률분포의 이러한 특징은 Figure 4.2의 히스토그램과 Q-Q 플롯을 통해서 육안으로도 확인할 수 있다.

4.2. 모형별 VaR의 추정과 사후검증

코스피, 항생, 니케이 지수들로 구성된 포트폴리오 수익률에 대해 일변량 및 다변량 변동성모형을 적용하여 VaR를 추정하기에 앞서 먼저 이 수익률자료에 ARCH효과가 있는지 알아보기 위해 수익률자료

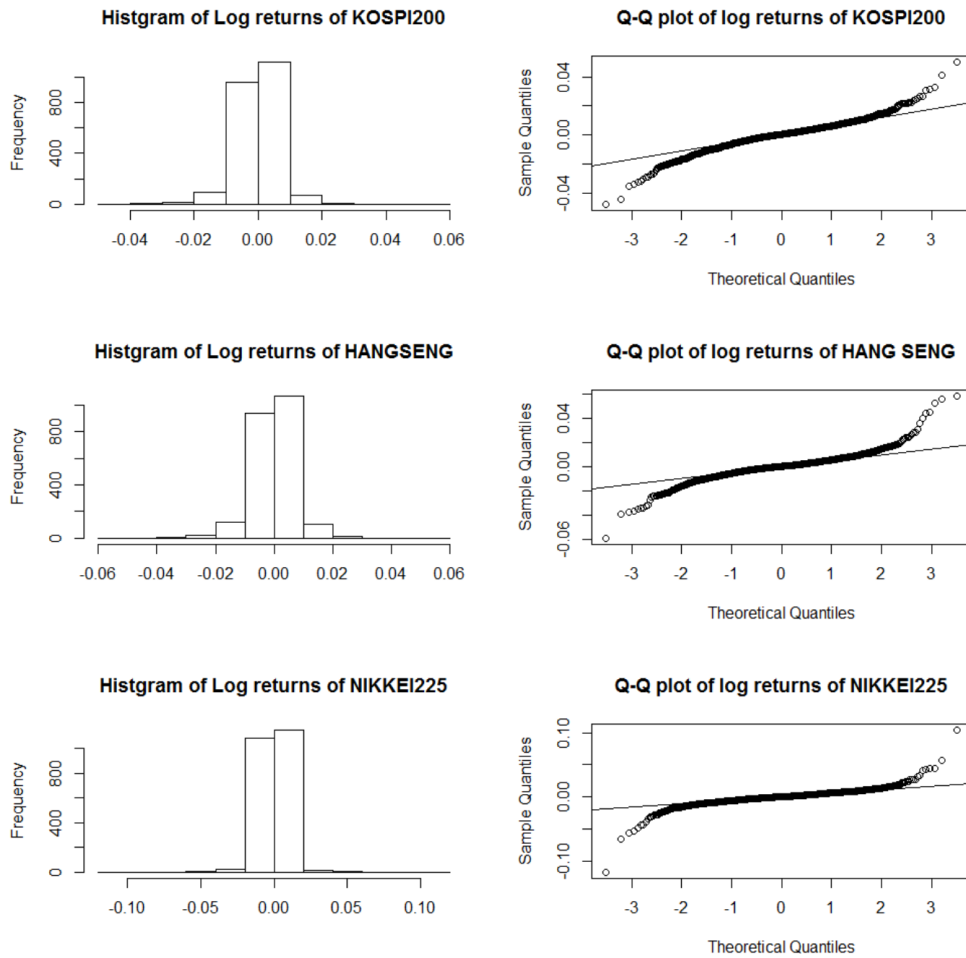


Figure 4.2. Histograms and Q-Q plots of daily log returns for KOSPI, Hang-Seng and Nikkei indexes.

의 제곱시계열에 대한 Ljung-Box검정과 Engle (1982)의 LM(Lagrange multiplier)검정을 실시할 수 있다. 여기서 포트폴리오는 편의상 이들 세 개의 지수수익률들에 대해 동일가중치를 적용하였다. 먼저 Ljung-Box검정을 실시한 결과 대부분의 시차에서 p -값이 거의 0에 가까운 값을 보여 자기상관관계가 존재한다고 볼 수 있다. 마찬가지로 LM검정을 실시한 결과 p -값이 역시 거의 0에 가까운 값이 되어 포트폴리오 수익률 시계열에 ARCH효과가 있는 것으로 볼 수 있다. Figure 4.3은 동일가중 포트폴리오 수익률과 수익률의 제곱, 수익률의 절대값의 시계열 그래프와 자기상관함수 그래프를 나타낸다. Figure 4.3을 살펴보면 수익률이 큰 기간과 작은 기간을 구별할 수 있는데 변동성이 커진 상태가 어느 정도 지속되다가 다시 작아진 상태로 이어지는 변동성 군집현상을 볼 수 있다. 그리고 포트폴리오 일별수익률의 평균이 거의 0인 점을 감안하면 수익률 제곱의 기대치는 수익률의 분산이므로 Figure 4.3에서 보는 바와 같이 수익률의 제곱과 절대값의 자기상관계수가 수익률의 자기상관계수보다 크다는 것은 분산에 가해진 충격의 지속성이 크다는 것을 반영하므로 변동성 군집현상을 역시 확인할 수 있다. 따라서 포트폴리오 수익률 자료에 대해 조건부 이분산성 모형을 고려하는 것이 타당하다고 할 수 있다.

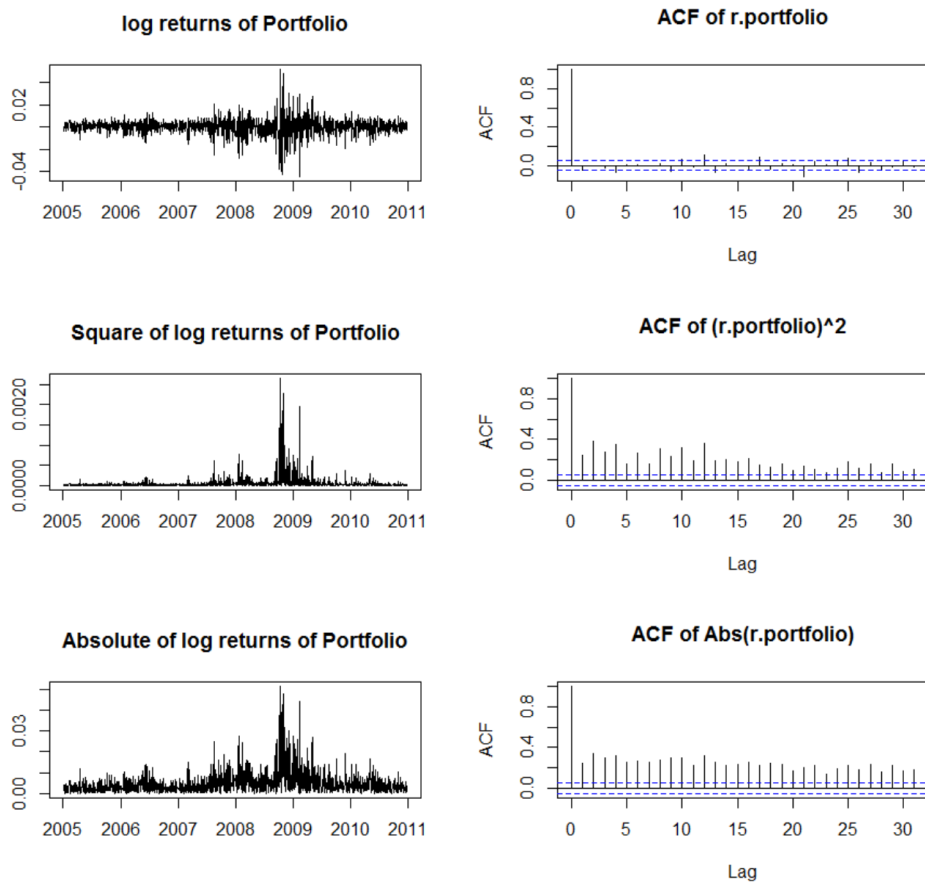


Figure 4.3. Time plots and sample ACF of daily log returns, squared log returns and absolute log returns for portfolio.

Figure 4.4와 4.5는 동일가중 포트폴리오 수익률의 표본의 자료에 대해 신뢰수준 95%에서 일변량 및 다변량 변동성모형들을 적용하여 측정한 VaR의 그래프를 각각 나타낸다. Figure 4.4와 4.5를 살펴보면 VaR 추정치들 사이에 큰 차이가 나타나지는 않는 것을 보게 된다. 여기서 각 변동성모형의 차수는 $p = q = 1$ 을 사용하였고 각 변동성모형의 오차항에 대해 정규분포와 t -분포를 함께 가정하였다. p 와 q 가 2차 이상인 경우 대개 자료의 비정칙성으로 인해 모수 p, q 의 추정이 사실상 힘들고 추정이 된 경우에도 추정치가 대부분 유의하지 않으며 또한 모수 절약의 원칙을 고려할 때 일반적으로 $p = q = 1$ 을 사용한다. 그런데 VaR 추정치가 음수로 나타나는 것은 손실액을 의미하는데 이는 매수포지션을 가정하여 수익률 분포의 왼쪽꼬리부분을 고려하기 때문이다.

본 논문에서 제시한 일변량과 다변량 변동성모형들을 적용한 VaR 추정치들의 성과를 비교하기 위한 사후검증으로 Christoffersen (1998)에 의한 조건부 커버리지 검정을 신뢰수준 95%와 99%에서 각각 수행한 결과가 Table 4.2와 4.3에 각각 나와 있다. Table 4.2와 4.3에서 각 모형들에 대한 표현에서 $-n$ 과 $-t$ 의 첨가는 각 모형들에 대한 오차항의 분포로 정규분포와 t -분포를 각각 가정한 경우를 나타낸다. 먼저 일변량모형의 경우 Table 4.2를 살펴보면 IGARCH모형을 제외한 나머지 모형들은 신뢰수준 95%와

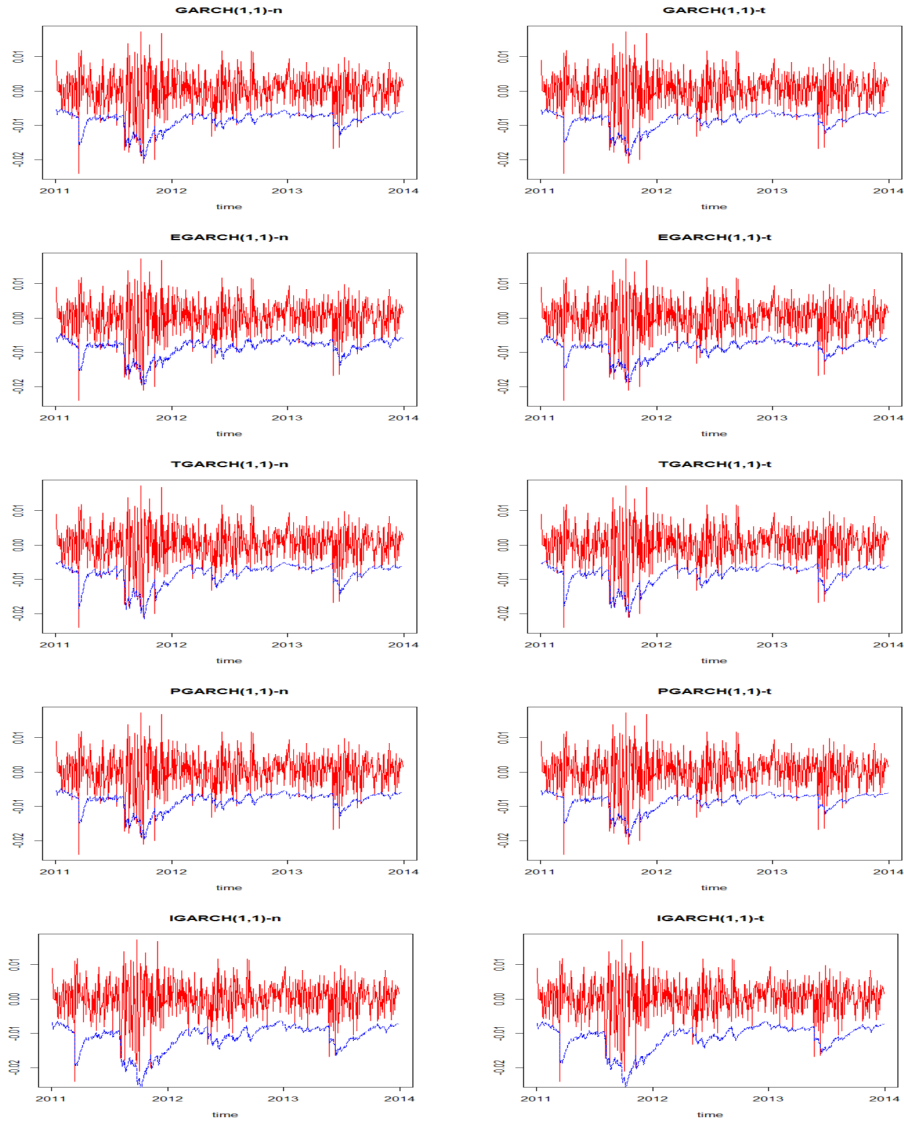


Figure 4.4. Portfolio VaR estimates of univariate models (n : normal distribution, t : t -distribution).

99%에서 모두 p -값이 높게 나와 일반적인 유의수준에서 귀무가설이 기각되지 않으므로 VaR의 측정에 적합하다고 볼 수 있다. 그런데 p -값이 커질수록 귀무가설을 기각할 가능성이 낮아지므로 검정을 통과한 이들 모형들 중에서 특히 PGARCH- t 모형이 신뢰수준 95%와 99% 모두에서 실패율이 가장 낮고 또한 p -값이 가장 큰 모형으로 일변량 모형들 중에서 VaR의 측정에 가장 적합한 모형이라고 볼 수 있다. 그리고 일변량 모형의 경우 오차항의 분포로 정규분포를 가정할 때보다 t -분포로 가정한 경우에 p -값이 좀 더 크게 나와 VaR의 측정에 보다 적합한 것으로 보여진다.

다음으로 다변량 모형의 경우 Table 4.3을 살펴보면 EWMA모형을 제외한 다른 모형들은 모두 p -값

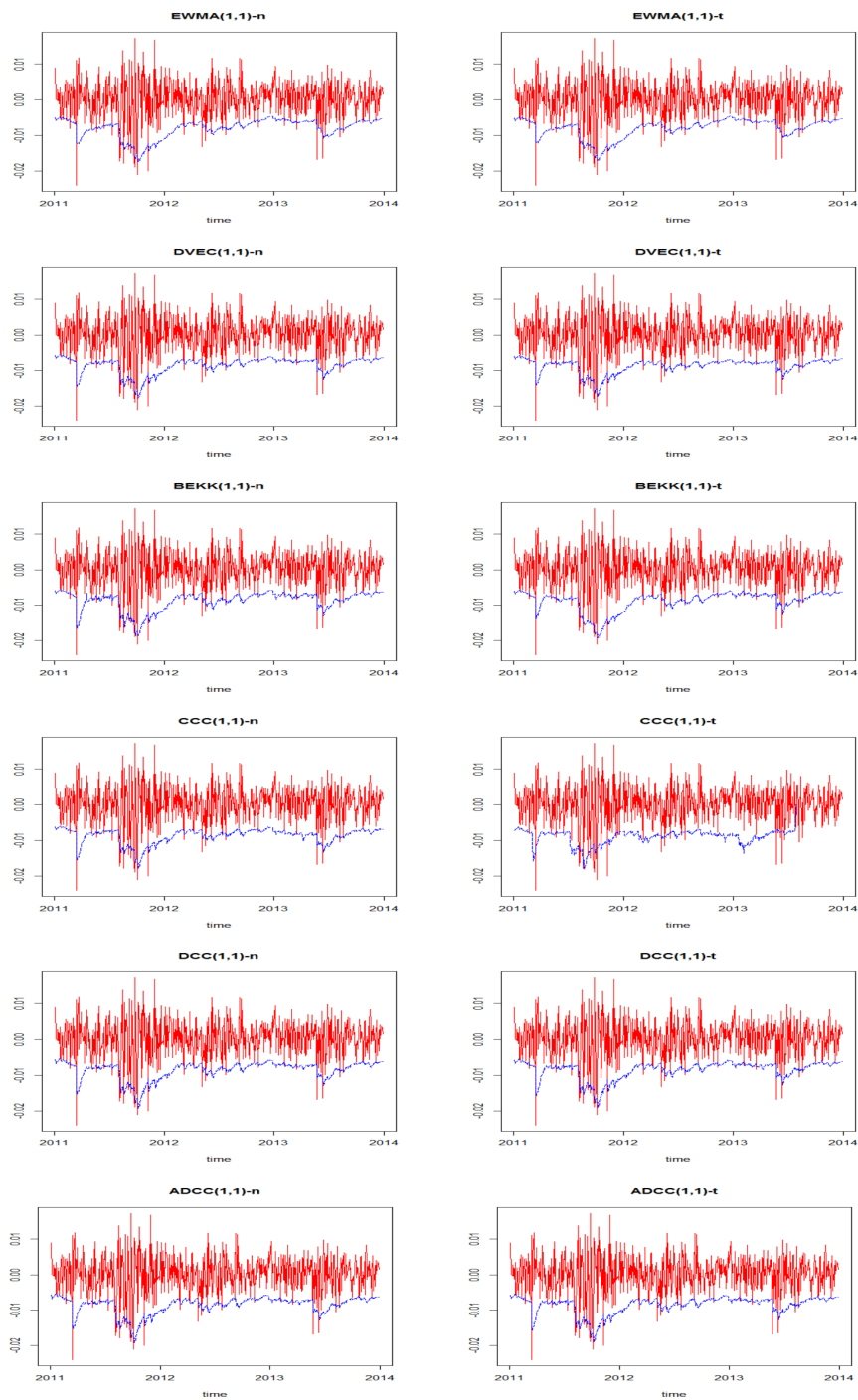


Figure 4.5. Portfolio VaR estimates of multivariate models (n : normal distribution, t : t -distribution).

Table 4.2. Backtesting results for univariate models by Christoffersen (1998)

(a) 95% VaR				
Models	No. of exceedences	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}
GARCH-n	37(0.0546)*	0.2902[0.5901]*	0.0003[0.9868]	0.2904[0.8648]
EGARCH-n	39(0.0575)	0.7719[0.3796]	0.0315[0.8590]	0.8035[0.6692]
TGARCH-n	37(0.0546)	0.2902[0.5901]	0.4679[0.4940]	0.7579[0.6846]
PGARCH-n	40(0.0590)	1.0951[0.2953]	0.1802[0.6712]	1.2753[0.5285]
IGARCH-n	47(0.0693)	4.7811[0.0288]	2.1982[0.1382]	6.9793[0.0305]
GARCH-t	36(0.0531)	0.1343[0.7140]	0.0042[0.9482]	0.1386[0.9331]
EGARCH-t	35(0.0516)	0.0372[0.8471]	0.4731[0.4916]	0.5103[0.7748]
TGARCH-t	36(0.0531)	0.1343[0.7140]	0.0042[0.9482]	0.1386[0.9331]
PGARCH-t	34(0.0501)	0.0003[0.9810]	0.0529[0.8181]	0.0532[0.9737]
IGARCH-t	47(0.0693)	4.7811[0.0288]	2.1982[0.1382]	6.9793[0.0305]
(b) 99% VaR				
Models	No. of exceedences	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}
GARCH-n	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
EGARCH-n	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
TGARCH-n	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
PARCH-n	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
IGARCH-n	13(0.0192)	4.5431[0.0331]	0.5091[0.4755]	5.0522[0.0800]
GARCH-t	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
EGARCH-t	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
TGARCH-t	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
PGARCH-t	7(0.0103)	0.0071[0.9327]	0.1463[0.7021]	0.1534[0.9262]
IGARCH-t	13(0.0192)	4.5431[0.0331]	0.5091[0.4755]	5.0522[0.0800]

* Numbers in parentheses () and brackets [] represent failure rates and p -values, respectively.

이 높게 나와 일반적인 유의수준에서 검정을 통과함으로 VaR의 측정에 적합한 것으로 볼 수 있다. 이들 모형 중에서 95% 신뢰수준에서는 특히 BEKK-n, DCC-n, ADCC-n 모형들의 p -값이 상대적으로 크게 나와 VaR의 측정에 가장 적합한 것으로 보여지며, 99% 신뢰수준에서는 BEKK-n, CCC-n, CCC-t, DVEC-t 모형들의 p -값이 크게 나와 상대적으로 다른 모형들 보다 VaR의 측정에 좀 더 적합한 것으로 나타난다. 그런데 다변량 모형의 경우에는 일변량모형의 경우와 달리 오차항의 분포로 정규분포를 가정할 때 p -값이 t -분포를 가정한 경우보다 크게 나타나서 VaR의 측정에 좀 더 우수한 것으로 여겨진다. 그런데 검정을 통과한 모형들 중에서 일변량모형들과 다변량모형들을 함께 비교하면 신뢰수준 95%에서는 PGARCH-t, BEKK-n, DCC-n, ADCC-n 모형들의 p -값이 가장 크게 나와 VaR의 측정에 우수한 것으로 보여지며, 신뢰수준 99%에서는 PGARCH-t, DVEC-t, BEKK-n, CCC-n, CCC-t 모형들의 p -값이 가장 높아 VaR의 측정에 가장 적합한 것으로 여겨진다. 따라서 일변량모형들 보다 다변량모형들이 VaR의 측정에 적합한 모형들이 많아 포트폴리오 VaR의 측정에 보다 우수한 것으로 판단된다.

한편 Table 4.4는 Christoffersen (1998)의 검정을 통과한 모형들에 대해서 Lopez (1998, 1999)가 제안한 손실함수를 이용한 VaR모형의 측정성가를 나타내고 있다. 손실함수가 작은 값을 가질수록 VaR의 측정에 우수한 모형이라고 볼 수 있다. 그런데 Table 4.4를 살펴보면 일변량모형과 다변량모형의 경우에 모형들 사이에 손실함수의 값이 의미있는 큰 차이가 있는 것으로 나타나지는 않는다. 이들 일변량 모형들 중에서 PGARCH-n모형이 신뢰수준 95%와 99% 모두에서 가장 작은 손실함수의 값을 나타내고 다변량 모형들 중에서는 DCC-t모형과 ADCC-t모형이 신뢰수준 95%와 99% 모두에서 가장 작은

Table 4.3. Backtesting results of VaR estimates for univariate models by Christoffersen (1998)

(a) 95% VaR				
Models	No. of exceedences	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}
EWMA-n	46(0.0678)	4.1096[0.0426]	1.1217[0.2896]	5.2313[0.0731]
DVEC-n	33(0.0487)	0.0254[0.8735]	1.0851[0.2976]	1.1105[0.5739]
BEKK-n	34(0.0501)	0.0003[0.9859]	0.0529[0.8181]	0.0532[0.9737]
CCC-n	31(0.0457)	0.2685[0.6043]	1.5049[0.2199]	1.7734[0.4120]
DCC-n	34(0.0501)	0.0003[0.9859]	0.0529[0.8181]	0.0532[0.9737]
ADCC-n	34(0.0501)	0.0003[0.9859]	0.0529[0.8181]	0.0532[0.9737]
EWMA-t	44(0.0649)	2.9074[0.0882]	0.4700[0.4930]	3.3774[0.1848]
DVEC-t	31(0.0457)	0.2685[0.6043]	1.5049[0.2199]	1.7734[0.4120]
BEKK-t	32(0.0472)	0.1141[0.7355]	0.1586[0.6905]	0.2727[0.8725]
CCC-t	30(0.0442)	0.4905[0.4837]	1.7452[0.1865]	2.2357[0.3270]
DCC-t	32(0.0472)	0.1141[0.7355]	0.2151[0.6428]	0.3292[0.8482]
ADCC-t	32(0.0472)	0.1141[0.7355]	0.2151[0.6428]	0.3292[0.8482]

(b) 99% VaR				
Models	No. of exceedences	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}
EWMA-n	15(0.0221)	7.4833[0.006]	0.6798[0.4096]	8.1631[0.0169]
DVEC-n	9(0.0133)	0.6658[0.4145]	0.2425[0.6224]	0.9083[0.6350]
BEKK-n	7(0.0103)	0.0071[0.9327]	0.1463[0.7021]	0.1534[0.9262]
CCC-n	7(0.0103)	0.0071[0.9327]	0.1463[0.7021]	0.1534[0.9262]
DCC-n	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
ADCC-n	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
EWMA-t	15(0.0221)	7.4833[0.0062]	0.6798[0.4096]	8.1631[0.0169]
DVEC-t	7(0.0103)	0.0071[0.9327]	0.1463[0.7021]	0.1534[0.9262]
BEKK-t	6(0.0088)	0.0943[0.7588]	0.1073[0.7432]	0.2016[0.9041]
CCC-t	7(0.0103)	0.0071[0.9327]	0.1463[0.7021]	0.1534[0.9262]
DCC-t	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]
ADCC-t	8(0.0118)	0.2096[0.6470]	0.1913[0.6618]	0.4010[0.8183]

* Numbers in parentheses () and brackets [] represent failure rates and p -values, respectively.

Table 4.4. Backtesting results of VaR estimates using loss function by Lopez (1998)

Univariate models	Loss values		Multivariate models	Loss values	
	95%	99%		95%	99%
GARCH-n	0.0730	0.1282	DVEC-n	0.0708	0.1240
EGARCH-n	0.0740	0.1324	BEKK-n	0.0751	0.1323
TGARCH-n	0.0752	0.1302	CCC-n	0.0738	0.1297
PGARCH-n	0.0723	0.1268	DCC-n	0.0726	0.1275
			ADCC-n	0.0726	0.1275
GARCH-t	0.0725	0.1272	DVEC-t	0.0722	0.1268
EGARCH-t	0.0747	0.1315	BEKK-t	0.0765	0.1352
TGARCH-t	0.0754	0.1328	CCC-t	0.0775	0.1370
PGARCH-t	0.0724	0.1270	DCC-t	0.0724	0.1270
			ADCC-t	0.0724	0.1270

손실함수의 값을 나타내어서 VaR의 측정에 가장 우수한 모형이라고 판단된다. Lopez (1998, 1999)에 의한 기준결과는 Christoffersen (1998)에 의한 검정기준 결과와 약간의 차이는 있으나 두 기준을 종합

해 볼 때 코스피, 항생, 니케이 지수들로 구성된 포트폴리오 VaR의 측정에 가장 적합한 변동성모형은 PGARCH, DCC, ADCC모형들이라고 볼 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 한국, 중국, 일본의 대표적인 지수들인 코스피, 항생, 니케이 지수들로 구성된 포트폴리오 VaR의 측정을 위해 일변량과 다변량 시계열 변동성모형들을 적용하였다. 일변량모형으로는 GARCH, IGARCH, TGARCH, EGARCH, PGARCH모형들을 적용하였고, 다변량모형으로는 EWMA, DVEC, BEKK, CCC, DCC, ADCC모형들을 적용하였다. 그리고 오차항의 분포로는 정규분포와 t -분포를 적용하였다. Christoffersen (1998)에 의한 검정과 Lopez (1998, 1999)에 의한 방법을 종합해 보면 이들 모형들 중에서 VaR의 측정에 가장 적합한 모형으로 일변량모형의 경우에는 PGARCH모형으로 나타나고 다변량모형의 경우에는 DCC모형과 ADCC모형으로 나타났다. 그리고 오차항의 분포로 정규분포를 가정한 경우와 t -분포를 가정한 경우에 있어서 VaR의 적합여부를 판단하는 기준으로서 Christoffersen (1998)검정의 p -값에 큰 차이를 보이지는 않았으나 t -분포를 가정한 경우가 조금 더 나은 것으로 나타났다. 결론적으로 포트폴리오 VaR의 측정을 위해 다변량모형을 적용하는 경우가 계산상의 번거로움은 다소 있으나 VaR측정의 성과 측면에서는 일변량모형보다 우수하다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 포트폴리오의 구성으로 편이상 각 지수들에 대해 동일가중치를 적용하였는데 경우에 따라서 시가가중치나 혹은 최소분산포트폴리오를 구성하는 가중치를 적용할 수 있을 것이다. 만약 최소분산 포트폴리오를 적용할 경우에는 포트폴리오 전체추정기간에 대해 코스피, 항생, 니케이 지수들의 각 가중치는 0.6625, 0.1777, 0.1598이 된다. 그런데 최소분산 포트폴리오는 시간의 흐름에 따라 변하는 금융 시장의 상황에 따라 달라질 수 있으므로 추정기간 전체에 대해 가중치를 일회만 적용하는 것은 현실성이 떨어지며 빈번하게 바꾸어 가면서 투자하는 것이 타당할 것이다. 이 경우에 대한 VaR 측정의 성과를 연구하는 문제는 추후과제로 남기기로 하겠다.

References

- Alexander, C. O. and Chibumba, A. M. (1997). Multivariate orthogonal factor GARCH, *Mimeo*, University of Sussex.
- Bauwens, L., Laurent, S. and Lombouts, J. V. K. (2006). Multivariate garch models: A survey, *Journal of Applied Econometrics*, **21**, 79–109.
- Berkowitz, J. and O'Brien, J. (2002). How accurate are Value-at-Risk models at commercial banks?, *Journal of Finance*, **57**, 1093–1112.
- Black, F. (1976). Studies of stock market volatility changes, *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 177–181.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates, A multivariate generalized ARCH model, *Review of Economics and Statistics*, **72**, 498–505.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. and Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances, *The Journal of Political Economy*, **96**, 116–131.
- Brooks, C. and Persaud, G. (2003). The effect of asymmetries on stock index return Value-at-Risk estimates, *Journal of Risk Finance*, **4**, 29–42.
- Cappiello, L., Engle, R. F. and Sheppard, K. (2006). Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns, *Journal of Financial Econometrics*, **4**, 537–572.
- Cho, D. (2004). The effects of estimation methods of stock price volatility on VaR, *Korean Journal of*

- Futures and Options*, **12**, 1–24.
- Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts, *International Economic Review*, **39**, 841–864.
- Ding, Z., Granger, C. W. J. and Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and model, *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83–106.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1006.
- Engle, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate GARCH models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 339–350.
- Engle, R. F. and Bollerslev, T. (1986). Modeling the persistence of conditional variances, *Econometric Reviews*, **5**, 1–50.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, **11**, 122–150.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock market prices, *Journal of Business*, **38**, 34–105.
- Glosten, L. R., Jaganathan, R. and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- Hwang, S. Y., Choi, M. S. and Do, J. D. (2009). Assessments for MGARCH models using back-testing: Case study, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **22**, 261–270.
- Jorion, P. (2007). *Value at Risk*, 3rd edition, McGraw Hill, New York.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivatives*, **2**, 73–84.
- Lee, H. (2011). Volatility model fitness and VaR forecasting performance: A Korean study, *The Korean Journal of Financial Management*, **28**, 115–148.
- Lee, S. J. and Binh, K. B. (2008). Model selection for estimating portfolio VaR in Korean stock market, *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, **37**, 877–913.
- Lopez, J. A. (1998). Testing your tests, *The Financial Survey*, May-June, 18–20.
- Lopez, J. A. (1999). Method for evaluating Value-at-Risk estimates, *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, **2**, 3–17.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, **36**, 394–419.
- McAleer, M. and da Veiga, B. (2008). Single-index and portfolio models for forecasting Value-at-Risk thresholds, *Journal of Forecasting*, **27**, 217–235.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroscedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, **59**, 347–370.
- Park, R. H., Choi, M. S. and Hwang, S. Y. (2011). Asymmetric CCC modelling in multivariate-GARCH with illustrations of multivariate financial data, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **24**, 821–831.
- Restrepo, M. I. (2012). Estimating portfolio Value-at-Risk with GARCH and MGARCH models, *Perfil de Coyuntura Economica*, **19**, 77–92, Universidad de Antioquia.
- Rombouts, J. V. K. and Verbeek, M. (2009). Evaluating portfolio Value-at-Risk using semi-parametric GARCH models, *Quantitative Finance*, **9**, 737–745. Discussion Paper, Erasmus Research Institute of Management, Erasmus University Rotterdam.
- Silvennoinen, A. and Teräsvirta, T. (2009). Multivariate GARCH models, *Handbook of Financial Time Series*, Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiss, J.-P. and Mikosch, T. V., Eds., Springer, 201–229.
- Sarma, M., Thomas, S. and Shah, A. (2003). Selection of Value-at-Risk models, *Journal of Forecasting*, **22**, 337–358.
- Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2002). A multivariate GARCH model with time-varying correlations, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 351–362.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 3rd ed., John Wiley and Sons, New Jersey.
- Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroscedastic models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **18**, 931–955.
- Zivot, E. and Wang, J. (2006). *Modelling Financial Time Series with S-plus*, 2nd ed., Springer.

포트폴리오 VaR 측정을 위한 변동성 모형의 성과분석

여성철^{a,1} · 이조청^a

^a건국대학교 응용통계학과

(2015년 3월 30일 접수, 2015년 4월 15일 수정, 2015년 4월 15일 채택)

요약

VaR는 금융위험을 측정하고 관리하기 위한 중요한 도구로 현재 널리 사용되고 있다. 특히 금융자산 수익률의 변동성에 적합한 모형을 찾는 것은 VaR의 정확한 측정을 위해 중요한 과제이다. 본 연구에서는 한국의 코스피, 중국의 항셱, 일본의 니케이지수들로 구성된 포트폴리오의 VaR를 측정하기 위한 변동성모형으로 다양한 일변량모형들과 다변량모형들을 함께 고려하여 그 성과를 비교하였다. 사후검증을 통해 전체적으로 일변량모형들보다는 다변량모형들이 VaR의 측정에 더 적합한 것으로 보여 졌으며 특히 DCC와 ADCC모형이 더욱 우수한 것으로 나타났다.

주요용어: Value at Risk, 포트폴리오 수익률, 일변량 및 다변량 변동성모형, 사후검증

이 논문은 2013년도 건국대학교 학술진흥연구비 지원에 의한 논문임.

¹교신저자: (143-701) 서울특별시 광진구 능동로 120, 건국대학교 응용통계학과. E-mail: scyeo@konkuk.ac.kr