Journal for History of Mathematics
Vol. 28 No. 3 (June 2015), 151–164

http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2015.28.3.151

On integration of Pythagoras and Fibonacci numbers

피보나치 수를 활용한 피타고라스 수의 통합적 고찰

Choi Eunmi* 최은미 Kim Si Myung 김시명

The purpose of this paper is to develop a teaching and learning material integrated two subjects Pythagorean theorem and Fibonacci numbers. Traditionally the former subject belongs to geometry area and the latter is in algebra area. In this work we integrate these two issues and make a discovery method to generate infinitely many Pythagorean numbers by means of Fibonacci numbers. We have used this article as a teaching and learning material for a science high school and found that it is very appropriate for those students in advanced geometry and number theory courses.

Keywords: Pythagoras number, Fibonacci number; 피타고라스 수, 피보나치 수.

MSC: A30 ZDM: 01AXX

1 들어가는 말

피보나치 수는 피보나치(L. Fibonacci, 1170–1250)의 유명한 산반서(Liber Abaci)에 나오는 토끼 한 쌍의 번식 문제에서 파생되었다. 단순하면서도 심오함을 갖는 수학의 대표적인 주제일 뿐만 아니라, 수학과 자연계의 여러 현상을 연결 짓고 더 나아가 음악, 미술, 그리고 컴퓨터 관련의 수많은 영역에서 응용됨으로써, 오늘날 융복합 수학을 요구하는 STEAM 교육에서 단연 중요한 주제로 인식되고 있다.

마찬가지로 피타고라스의 정리는 수학의 이론 중에서 가장 잘 알려진 내용 중 하나인데, 수학을 배운 사람이라면 수십 년이 지나서도 기억되는 것이라고 했다[9]. 이 정리는 중학교 기하영역에서 다루어지는데, 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a와 b로 하고 빗변의 길이를 c라고 하면 $a^2 + b^2 = c^2$이 되며, 그 역도 성립한다고 소개되어 있다. 또한

*Corresponding Author.
Choi Eunmi: Dept. of Math., HanNam Univ. E-mail: emc@hnu.kr
Kim Si Myung: Daejeon Dongsin Science High School E-mail: kandy2@hanmail.net
Received on Apr. 18, 2015, revised on June 4, 2015, accepted on June 17, 2015.

직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 세 자연수를 피타고라스 수라고 하며 특별히 그 수들이 서로소일 때 원시 피타고라스 수라고 부른다고 언급하면서, 예를 들어 $3, 4, 5$는 원시 피타고라스 수이고 $6, 8, 10$은 피타고라스 수라고 했다.

피타고라스 수를 찾는 대표적인 방법으로 플라톤과 유클리드의 형태가 잘 알려져 있으며, 이 방법들은 학생들의 수행평가 문제로 교과서에서 종종 언급되고 있다. 그러나 고대 그리스의 시대를 살았던 피타고라스(Pythagoras, 기원전 570–495년 경), 플라톤(Plato, 기원전 428–348년 경), 그리고 유클리드(Euclid, 기원전 350년 경)의 방법에는 공통으로 내재된 아이디어가 있어서 서로 다른 방법이라고 보기는 어렵다. 그 당시에는 전혀 상상하지 못했을 피보나치 수는 피타고라스 수를 찾는 데 무척 효과적인 방법일 뿐만 아니라, 기원전부터 알려져 온 여러 형태를 통합적으로 설명할 수 있는 도구가 된다. 한걸음 더 나아가 피보나치 수를 확장함으로써 피타고라스 수를 무한히 많이 생성하는 다양한 아이디어를 구성할 수 있다.

이 논문에서는 피타고라스 수와 피보나치 수를 통합하는 수학적 관계를 조명하고자 한다. 두 주제 모두 학교 현장에서 다루어지는 주요 내용인 만큼, 피타고라스 수를 제시한 후 학생들이 계산을 통해 확인해보도록 하는 기존의 수동적인 방법이 아니라, 직접 피타고라스 수를 무수히 많이 생성하는 발견학습 활동지를 개발한다. 수학교육학적 측면에서 교수학습 자료로 활용할 수 있다. 한편 수학은 변화하고 진화하는 영역이며 하나의 아이디어가 오랜 시간을 거쳐 개발되고 성장하는 학문임을 보여주어야 한다며 NCTM(1991)은 학교 교육에서 수학사의 필요성을 강조했다. 또한 수학사를 통해 수학은 시대적 문화권의 영향을 받는다는 것을 가르쳐야한다고 했다[2]. 이 연구에서 피타고라스 수와 피보나치 수의 통합을 다룸으로써 피타고라스 이후 무려 1800년의 시대적 차이를 넘어서는 수학의 교감을 보여줄 수 있을 뿐만 아니라, 고대와 중세시대를 연결하는 수학사적 가치를 제공할 수 있을 것으로 생각한다.

2 피타고라스 수

잘 알려진 대로 직각삼각형의 길이와 관련된 피타고라스 수에 대한 기록은 피타고라스보다 훨씬 이전인 고대 인도의 서적 Shulba Sutras(기원전 800–500년 경)나 중국의 자료에서도 찾아 볼 수 있다. 그 중에서 가장 유명한 것은 고대 바빌로니아인들이 만든 것으로 추정되는 플림프톤(Plimpton) 322일 것이다. 쐐기문자로 새겨진 점토판인 플림프톤 322에는 피타고라스 수와 관련된 놀라운 내용이 기록되어 있으며, 그 뿐만 아니라 이차방정식 풀이 등이 수록되어 있는데 지금부터 무려 4000년 전의 수학이 얼마나 놀라운 모습으로 발전되어 있었는지를 짐작할 수 있게 해준다.

플림프톤 322는 메소포타미아 지역의 고대 바빌로니아 시대로 추정되는 기원전 1900년

에서 1600년 사이에 만들어진 수천 개의 점토판 중 하나이다. 수학 내용과 관련하여 플림프톤 322 이외에 Yale tablet라고 불리는 YBC 7289와 Susa tablet 그리고 Tell Dhibayi tablet 등이 잘 알려져 있다. 미국 출판사의 경영자이던 플림프톤(A. Plimpton, 1855–1936)은 1923년에 E. J. Banks로부터 점토판을 구입하여 콜롬비아대학에 기증하였으며, 콜롬비아대학의 George Arthur Plimpton collection에 소장되어 목록 322번으로 분류된 판이다. 최근에 옥스포드대학의 동양사학자 E. Robson[14]은 플림프톤 322을 재조사하여 기원전 1762년경의 바빌로니아의 함무라비 시대의 것으로 추정된다고 했다.

가로와 세로가 각각 12.7cm, 8.8cm로서 작은 스마트폰 크기인 플림프톤 322는 발견되었던 초기에는 바빌로니아 사람들이 사용한 상품 대장(ledgerbook)중 하나라고 추측되었다. 그러나 1940년 초에 브라운대학의 고대사학자인 O. Neugebauer와 그의 팀인 A. Sachs는 점토판의 숫자들이 부정방정식 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 정수근들, 다시 말해서 피타고라스 수라고 밝혀냈다. 그 점토판에는 15개 정도의 피타고라스 수가 기록되어 있다.

오늘날 이러한 수의 최초 발견자처럼 불리는 피타고라스는 기원전 500년 경 그리스 사모스(Samos)지역에 살았다. 자신보다 훨씬 이전인 기원전 1700–1800년경부터 알려져 온 숫자들을 통합하여 수학적인 논리로 증명하고 그 상관관계를 밝히는 중요한 역할을 하였으며, 오늘날 학교 수학에서 피타고라스라는 이름으로 불리는 이론의 주인이 되었다.

피타고라스는 자연수 a, b, c 에 대하여, 만일 a가 홀수이면 세 순서쌍

$$\left(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2}\right) \tag{1}$$

이 직각삼각형의 세 변의 길이, 즉 피타고라스 수가 된다고 했다. 그 후 피타고라스 수를 찾는 대표적인 방법으로 플라톤과 유클리드의 것이 있다. 플라톤은 만일 a가 짝수이면

$$\left(a, \left(\frac{a}{2}\right)^2-1, \left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right) \tag{2}$$

이 피타고라스 수가 된다고 했다. 홀수, 짝수에 상관없이 식 (1)의 성분에 2를 곱해 분모를 정리하면 $(2a, a^2-1, a^2+1)$ 이 된다. 여기에 a를 어떤 분수 $\frac{m}{n}$ 으로 치환하여 다시 한번 정수화하면

$$(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2) \tag{3}$$

이 되는데, 이것이 유클리드의 형태로 알려진 피타고라스 수이다.

위의 결과로부터 여러 형태의 관계식을 만들 수 있다. (2)의 각 성분에 4를 곱하면 $(4a, a^2-4, a^2+4)$이 되며, a를 $\frac{m}{n}$으로 치환하여 정수화하면

$$(4nm, m^2-4n^2, m^2+4n^2) \tag{4}$$

형태의 피타고라스 수를 얻게 된다. 그러므로 (3)과 (4)로부터, 임의의 자연수 k에 대하여 $(2knm, m^2-k^2n^2, m^2+k^2n^2)$ (단, $m^2-k^2n^2>0$) 이 피타고라스 세 수가 됨을 알 수 있다. 유클리드의 형태 (3)에서 만일 m과 n이 서로소이면 원시 피타고라스 수가 되며, 그 역도 성립한다. 이러한 방법으로 모든 원시 피타고라스 수가 생성될 수 있다.

그리스 전통을 이어받은 피타고라스, 플라톤 그리고 유클리드의 아이디어와는 완전히 다른 방향에서 중세시대를 대표하는 피보나치 수의 발견으로부터 피타고라스 수를 생성할 수 있다. 이러한 논의를 통해 수학이 갑자기 솟아난 것 아니라 발전하고 진화하는 영역이라는 사실을 알게 한다[7]는 수학사 연구의 가치를 재확인할 수 있을 것이다.

3 피보나치 수

13세기 이탈리아에 살았던 피보나치(Fibonacci)는 중세 유럽의 가장 탁월한 수학자중 한 명이다. 1202년에 그가 쓴 산반서(Liber Abaci)는 당시 유럽에서 사용되던 로마 문자 대신에 쉽고 간결한 아리비아 숫자 체계를 사용하여 기술하면서, 동양 수학을 서양에 전한 업적을 남겼다. 또한 오늘날 피보나치 수라고 불리는 유명한 문제를 수록하고 있다. 피보나치 수는 $F_1 = F_2 = 1$을 초깃값으로 하여 바로 앞의 두 항을 더해 다음 항을 생성하는 점화식 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$으로 정의된다. F_n의 첨자 n을 음의 자연수로 확장하면 $F_0 = 0$, $F_{-1} = 1$, $F_{-2} = -1, \cdots$ 가 되어, $\{F_n\} = \{\cdots, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}$와 같은 피보나치 수들이 된다. 토끼 한 쌍의 번식 유형을 다룬 문제는 피보나치 자신에 의해서라기보다는 그 이후의 수많은 연구자들에 의해 아름다운 문제로 발전되었다. 실제로 19세기 프랑스의 수학자 뤼카(E. Lucas)가 그 수들의 중요한 성질을 알아차릴 때까지는 큰 주목을 받지 못했으며, 뤼카에 의해 1876년에 피보나치 수라는 이름으로 명명되었다[8]. 피보나치 수는 보통 고등학교 수열 단원에서 소개된다. 피타고라스의 정리처럼 독립된 단원은 아니지만, 수학 1 교과서 7종을 비교한 연구에 따르면 대부분의 교과서가 피보나치 수를 다루고 있다. 수열의 도입으로 활용하거나, 역사적 배경을 중심으로 언급, 혹은 탐구 활동이나 실생활 소재로 제시하는 등 다양한 형태로 소개된다.

간단하고 단순하면서도 수학의 아름다움을 추구하는 이론이 가장 좋은 수학 문제인데, 토끼 번식과 같이 실생활 문제에서 파생된 피보나치 수야 말로 그 대표적인 예라고 했다[17]. 그럼에도 불구하고 우리나라에는 피보나치 수와 관련된 연구 자료가 그리 많지 않으며, 교과서에서는 연구과제나 수학 산책으로 아주 단편적으로만 소개되고 있는 실정이다[16]. 그러나 외국에서는 피보나치 수에 관한 수많은 연구가 있을 뿐만이 아니라, 피보나치 수의 확장으로서 뤼카(Lucas) 수, 트리보나치(Tribonacci) 수, 또한 쿼드로나치(Quadronacci) 수 등 다양한 연구가 이루어졌다. 더 나아가 최근 20여 년 동안 피타고라스 이론과 피보나치 이론을 융합하려는 많은 시도가 있었는데, 그 중에 Pythagoras meets Fibonacci[1], Fibonacci meets Pythagoras[11] 또한 Pythagoras meets Fibonacci[15]와 같이 호기심을 자극하는 제목의 연구가 다수 발표되었다. 1800년의 역사를 뛰어 넘어 피타고라스와 피보나치가 만난다는 생각은 수학사적 안목에서 흥미로운 상황이 아닐 수 없다.

4 피타고라스 수와 피보나치 수의 만남

부정방정식 $x^2+y^2=z^2$을 만족하는 양의 정수 해 a, b, c가 피타고라스 수이며, 특별히 $\gcd(a,b,c)=1$일 때 원시 피타고라스 수이다. 피타고라스 삼각형의 세 변은 피타고라스 수가 되며, 역으로 피타고라스 수는 피타고라스 삼각형을 만든다. 여기서 피타고라스 삼각형(Pythagorean triangle)이란 정수 값을 길이로 갖는 직각삼각형을 말한다. $(3,4,5)$는 가장 대표적인 피타고라스 수이며, 임의의 양의 정수 n에 대해 $(3n,4n,5n)$도 피타고라스 수이다. 그러므로 $(3n,4n,5n)$를 대표해서 원시 피타고라스 수 $(3,4,5)$를 말할 수 있게 된다. 피타고라스 수와 관련하여 교과서에 나오는 수는 $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(8,15,17)$, $(7,24,25)$ 등이 거의 전부이다. 학생들은 이 숫자들을 방정식에 대입하여 피타고라스 수라는 것을 확인하도록 지도하고 있다. 이에 대해 [12]는 간단히 계산하기위해 쉬운 예로 들은 것이겠지만 자칫 피타고라스 수들은 이것밖에 없다는 오해를 야기할 수도 있다고 지적했다.

피타고라스 수를 생성하는 데 피보나치 수가 사용되는 대표적인 정리이다.

정리 4.1: 연속하는 피보나치 수 $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $a=F_nF_{n+3}$, $b=2F_{n+1}F_{n+2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 인 (a,b,c)는 피타고라스 수이다.

(2) 만일 F_n 또는 F_{n+3}이 짝수이면 (a,b,c)는 비 원시 피타고라스 수이다.

(3) a,b,c를 변으로 하는 직각삼각형의 넓이는 피보나치 수의 곱 $F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}$ 이다.

위 정리의 증명은 매우 쉽다. 실제로 (1)에서 제시된 a,b,c를 관계식 $x^2+y^2=z^2$에 대입하여 c가 자연수임을 계산할 수 있으며, 또한 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}F_nF_{n+3}2F_{n+1}F_{n+2}=F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}$로부터 (3)에서 말하는 삼각형의 넓이를 간단히 계산할 수 있다. 그러나 단순한 증명이 아니라, 추론을 통해 결과를 발견해나가는 과정을 추적하는 것이 교육적 측면에서 의미 있는 일이 될 것이다. 특별히 피타고라스 수와 피보나치 수가 학교 수학에서 배우는 중요 주제임을 고려하여, 학생들이 발견학습을 할 수 있는 활동지를 구성하여 교수학습 자료로 사용할 수 있다.

4.1 피보나치 수로부터 피타고라스 수의 생성

피보나치 수 $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$는 고등학교 과정에서 소개되지만, 앞의 두 항을 더해 다음 항을 생성하는 것은 어렵지 않으므로, Table 1 활동지는 중학교에서 피타고라스 수를 배운 후에 충분히 적용할 수 있다. 피보나치 수를 $1,1,2,3$으로 택하면 $X=6$이며 $a=3$, $b=4$, $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$이다. 다른 피보나치 수 $1,2,3,5$를 택하면 $X=304$, $a=5$, $b=12$, $c=13$이 된다. 이와 같이 피보나치 수를 네 개씩 연속하도록 $2,3,5,8$ 또는 $3,5,8,13$ 혹은 $5,8,13,21$로 차례로 택해 수학적 발견을 유도한다. Table 2 결과지에서 보듯이 학생들은 교과서에 나오는 $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(8,15,17)$을 생성할 수 있을 뿐만

선택한 네 개의 피보나치 수를 모두 곱해 X로 하자.	X
맨 끝의 두 수를 곱한 값을 a로 하자.	$a =$
가운데 두 수를 곱해 두 배 한 값을 b로 하자.	$b =$
a의 제곱과 b의 제곱을 더한 값의 양의 제곱근을 c로 하자.	$c =$
1. (a, b, c) 의 값은 무엇인가?	
2. X와 a, b, c 사이의 관계를 설명해보자.	
3. 피보나치 수 네 개를 새로 택해 위 단계를 반복한다.	예:$1, 2, 3, 5$

Table 1. Activity: Choose sequential four Fibonacci numbers. (e.g. 1,1,2,3); 활동지: 연속하는 피보나치 수 네 개를 임의로 선택한다. (예: 1,1,2,3)

연속하는 피보나치 수	X	a	b	c	X와 a, b, c의 관계
$1, 1, 2, 3$	6	3	4	5	$6 = (3 \cdot 4)/2$
$1, 2, 3, 5$	30	5	12	13	$30 = (5 \cdot 12)/2$
$2, 3, 5, 8$	240	16	30	34	$240 = (16 \cdot 30)/2$
$3, 5, 8, 13$	1560	39	80	89	$1560 = (39 \cdot 80)/2$

Table 2. Result; 결과지

아니라, 피보나치 수를 바꿔 택할 때마다 새로운 피타고라스 수를 만들 수 있다. 피보나치 수는 무한수열이므로 그에 따라 피타고라스 수도 무한히 많이 구현할 수 있다. 피타고라스 수로 만들어진 삼각형의 넓이는 처음에 선택한 네 수들의 곱 X가 되는 것도 자연스럽게 터득하게 된다. 또한 피보나치 수 $2, 3, 5, 8$로부터 만들어진 삼각형은 변의 길이가 $16, 30, 34$가 되어, 변의 길이가 $8, 15, 17$인 삼각형과 닮은 꼴임을 설명할 수 있다. 그러므로 언제 비원시 피타고라스 수가 되는지, 또한 어떻게 원시 피타고라스 수로 변형할 수 있는지도 발견할 수 있다. 이러한 발견 활동이 모티브가 되어, 연속하는 네 개의 피보나치 수로부터 발견된 순서 쌍 (a, b, c)가 피타고라스 수가 된다는 정리 4.1을 만들 수 있다. 이러한 수학적 경험을 토대로 일반화된 발견과 정리를 유도할 수 있는 발문을 한다.

질문 (1)은 $a = F_n F_{n+3}$과 $b = 2F_{n+1}F_{n+2}$이므로 당연히 $\frac{1}{2}ab = F_n F_{n+1} F_{n+1} F_{n+2}$

(1) 피보나치 수로 생성된 삼각형의 넓이가 피보나치 수들의 곱이 되는 이유?
(2) $a^2 + b^2$은 항상 제곱수인가? 다시 말해서 $a^2 + b^2$의 제곱근 c는 자연수인가?

Table 3. Activity; 활동지

가 성립한다. 그러나 선택한 수가 피보나치 수가 아니라 네 개의 임의의 자연수 x, y, z, w라고 하더라도, 만일 $a = xw$, $b = 2yz$라고 하면 $\frac{1}{2}ab = xyzw$는 항상 성립한다. 질문 (2)의 답이 바로 피타고라스 수를 만드는 데 피보나치 수가 결정적으로 필요한 근거가 되며, 피보나치 수의 수학적 관계식을 발견하는 단계가 된다.

정리 4.2: 피보나치 수 $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$ 에 대해 $a = F_nF_{n+3}$, $b = 2F_{n+1}F_{n+2}$ 라고 하면 $a^2 + b^2$ 은 항상 완전제곱수이다.

피보나치 점화식 $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$ 을 $a^2 + b^2 = (F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2$ 에 대입하는 간단한 계산으로 $a^2 + b^2 = (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2$ 이 제곱수임을 알 수 있다. 그 후 새로운 발견을 유도하기 위해 결과지를 재분석하는 반추의 과정을 밟아가게 한다.

피보나치 수로 c를 표현하는 다양한 추측이 가능하다. 실제로 (1)에서 $2 + 3 = 5$로 쉽게

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
피보나치 수	1,1,2,3	1,2,3,5	2,3,5,8	3,5,8,13	5,8,13,21
피타고라스 수	(3,4,5)	(5,12,13)	(16,30,34)	(39,80,89)	(105,208,233)
질문. 피타고라스 수 (a, b, c)의 처음 두 수는 $a = F_nF_{n+3}$, $b = 2F_{n+1}F_{n+2}$ 와 같이 피보나치 수로 표현된다. c도 피보나치 수로 표현될 수 있는지 알아보자.					

Table 4. Activity; 활동지

생각할 수 있다. 그러나 이 추측을 (2)에 적용하면 $3+5 \neq 13 = c$를 확인하면서 오류 수정 단계를 거쳐 $2 \cdot 5 + 3 = 13$을 알게 된다. 이 패턴을 전 단계로 되돌아가 (1)에 적용하면 $1{\cdot}3+2 = 5$가 되어 타당한 추측이라고 생각할 수 있다. 그러나 (3)에 적용하면 $3{\cdot}8+5 \neq 34$가 되어 재수정의 필요를 인지하게 된다. 결과적으로 (3)에서 $3 \cdot 8 + 5 \cdot 13 = 88$임은 물론 $3 \cdot 13 - 3 \cdot 5 = 89$, 또한 $6^2 + 13^2 = 89$의 관계식을 발견할 수 있다. 이러한 발견이 (4)에서도 역시 $5 \cdot 13 + 8 \cdot 21 = 13 \cdot 21 - 5 \cdot 8 = 8^2 + 13^2 = 233$이 성립함을 알 수 있다. 이러한 교수법은 교과서나 교사에 의해 제시된 숫자를 단순히 대입해보아 어떤 성질을 확인하는 것이 아니라 학생들의 수학적 사고활동을 통해 발견과 재발견의 과정을 안내하는 것으로서 Freudenthal[6]의 수학화과정이 된다. 활동으로부터 다음 정리를 자연스럽게 유도할 수 있다.

정리 4.3: $a = F_nF_{n+3}$, $b = 2F_{n+1}F_{n+2}$, $c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$ 라고 하면 $a^2 + b^2 = c^2$ 이 성립한다. 즉 $F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = F_nF_{n+2} + F_{n+1}F_{n+3} = F_{n+2}F_{n+3} - F_nF_{n+1}$ 이다.

정리 4.3의 식은 정수론 교재[3]에서 볼 수 있으며, 수학적 귀납법으로 쉽게 증명된다. 이 관계식을 대수적으로만 볼 때 그 의미를 생각하기 쉽지 않으나, 기하영역의 직각삼각형의 빗변의 길이를 표현하는 다양한 대수적 표현으로 이해하면 도움이 된다.

4.2 피보나치 수의 일반화와 피타고라스 수의 발전

임의의 n, $n + 1$번째 피보나치 수를 알면 그 다음의 피보나치 수를 만들 수 있고, 그로부터 피타고라스 수가 생성된다. 예를 들어서 n, $n + 1$번째 피보나치 수를 각각 x와 y라고 하면 연속하는 네 개의 수 $x, y, x + y, x + 2y$를 만들게 된다. 양 끝의 두 수를 곱해서

$a = x(x+2y)$라 하고, 가운데 두 수를 곱해 두 배한 값을 $b = 2y(x+y)$라고 하자. 그러면 중학교 수학의 간단한 다항식 전개와 인수분해를 사용하여 $a^2 + b^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2)^2$, 즉 $a^2 + b^2$이 완전제곱수임을 알 수 있다.

정리 4.4: 임의의 자연수 x와 y에 대해 $a = x(x + 2y)$, $b = 2y(x + y)$라고 하면 $a^2 + b^2$은 완전제곱수 $(x^2 + 2xy + 2y^2)^2$ 가 된다. 더욱이 다음 관계식이 성립한다.
$x^2 + 2xy + 2y^2 = y^2 + (x + y)^2 = x(x + y) + y(x + 2y) = (x + y)(x + 2y) - xy.$

정리 4.4는 빗변 c를 표현하는 다양한 방법을 보여주는데, c는 네 개의 수중에서 가운데 두 수의 제곱의 합으로 표현된다. 또한 첫째와 셋째 수의 곱에 둘째와 넷째 수의 곱을 더한 것과도 같다. 한편 셋째와 넷째 수의 곱에서 첫째와 둘째 수의 곱을 뺀 것과도 같다. 이 정리에서 더 중요한 발견은 피타고라스 수를 만들기 위해 반드시 피보나치 수가 필요한 것이 아니라는 것이다. 실제로 피보나치형태(Fibonacci type) 수의 점화식으로 생성되는 수들로 충분하다. 예를 들어서 $x = 7$, $y = 4$라고 하자. 여기서 7과 4는 피보나치 수가 아니며, 더욱이 $x < y$도 아니다. 피보나치 점화식으로 네 개의 수 $7, 4, 11, 15$를 생성하여 $a = 105$, $b = 88$, $c = 137$라고 하면 $105^2 + 88^2 = 137^2$이 된다. 따라서 $(105, 88, 137)$도 피타고라스 수이며, 이 때 삼각형의 넓이는 네 수의 곱 $7 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 15$이다. 이와 같이 임의의 두 수를 초깃값으로하여 피보나치 점화식으로 정의되는 수를 피보나치형태 수라고 말한다.

정리 4.5: 연속하는 네 개의 피보나치형태 수는 피타고라스 수를 생성한다.

교과서는 피타고라스의 수와 관련하여 다음의 두 가지 방법을 제시하고 학생들이 몇 개의 피타고라스 수를 찾아보게 하는 수행평가를 하고 있다.
(1) 고대 그리스의 철학자 플라톤은 피타고라스의 수를 구하는데 $a = n^2 - 1$, $b = 2n$, $c = n^2 + 1$ ($n > 1$ 인 자연수)를 사용했다. 확인하여라.
(2) $a' = 2n + 1$, $b' = 2n^2 + 2n$, $c' = 2n^2 + 2n + 1$ (n 자연수)를 사용해도 피타고라스의 수를 구할 수 있다고 한다. 확인하여라.

(1)과 (2)는 서로 다른 방법인 것처럼 보이지만, 모두 피보나치형태 수로 생성되는 피타고라스 수이다. $n - 1 > 0$과 1을 초깃값으로 하는 피보나치형태 수 $n - 1, 1, n, n + 1$로부터 $a = (n - 1)(n + 1)$, $b = 2n$, $c = n^2 + 1$이 피타고라스 수라는 것이 플라톤의 방법 (1)이다. 한편 초깃값을 1과 n으로 한 피보나치형태 수 $1, n, n + 1, 2n + 1$로부터 생성된 $a = 2n + 1$, $b = 2n(n + 1)$, $c = n^2 + (n + 1)^2$이 (2)에서 말한 피타고라스 수이다.

학생들이 피타고라스 수에 대한 제한적인 사고를 형성할까를 우려하면서 [12]는 임의의 자연수 m과 n에 대해 $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$인 (a, b, c)가 피타고라스 수라는 유클리드 방법의 소개를 제안했다. 그러나 이것 역시, $m - n$과 n (단 $m > n > 0$)으로 시작되는 피보나치형태 수 $m - n, n, m, m + n$으로 부터 생성된 피타고라스 수이다.

피타고라스 수를 가르칠 때 수학사적 가치를 고려하여 플라톤이나 유클리드 등의 발견을 다루는 교수법이 권장된다. 그러나 이런 것들의 통합을 보여주지 않는다면 학생들 입장에서는 각각 새로운 것들 혹은 서로 다른 것을 배우는 것처럼 느끼면서 학습 분량이 많다고 어려움을 토로할 수 있다. 피타고라스 수는 피보나치 수와의 통합적 교수학습의 체계 내에서 통일된 구조로 제시하는 교수법이 제안된다.

4.3 뤼카 수과 피타고라스 수

뤼카(Lucas) 수는 가장 대표적인 피보나치형태 수이다. 프랑스 수학자 뤼카(F. E. Lucas, 1842–1891)는 피보나치 수와 그 일반화인 뤼카 수의 연구로 잘 알려져 있다. 불과 15세인 1857년에 손으로 $2^{127}-1$을 인수분해하기 시작하여 무려 19년이 지난 1876년에 결국 그 수가 소수임을 증명해 냄으로써, 당시 가장 큰 메르센 소수를 발견하는 성과를 올렸다. 뤼카는 하노이탑(Tower of Hanoi) 문제를 만든 사람으로도 유명한데, 왕성한 연구를 하던 49세에 전혀 예기치 못한 사고로 사망하였다. 프랑스 과학진흥회 연례회의 식사 도중에 웨이터가 도자기 그릇을 떨어뜨렸는데 그 한 조각이 튀면서 그의 얼굴을 찔렀다. 그 며칠 뒤 사망했는데, 패혈증으로 비롯된 염증이 원인이었다고 한다.

뤼카 수란 초깃값을 1과 3으로 하여 피보나치 점화식으로 정의되는 수이므로 처음 몇 개의 수는 $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \cdots$ 이다. 이는 피보나치형태 수이므로 역시 무한히 많은 피타고라스 수를 생성하게 된다.

빗변 c를 표현하는 관계식으로부터 뤼카 수의 잘 알려진 정리[3]를 유추할 수 있다. 관찰을 통해 수학적 사실을 먼저 발견하면, 그 후에 수학적 귀납법으로 증명하는 일은 어렵지 않다.

뤼카 수	X	a	b	c	뤼카 수	X	a	b	c
$1,3,4,7$	84	7	24	25	$4,7,11,18$	5544	72	154	170
$3,4,7,11$	924	33	56	65	$7,11,18,29$	40194	203	396	445

Table 5. Find relationships between X and a, b, c; 활동지: X와 a, b, c의 관계를 조사하여라.

정리 4.6: $L_{n+1}^2 + L_{n+2}^2 = L_n L_{n+2} + L_{n+1} L_{n+3} = L_{n+2} L_{n+3} - L_n L_{n+1}$

발견된 결과들은 그것을 재분석하는 과정에서 새로운 발견을 탐구하는 디딤돌이 되어 수학화와 발견학습의 초석이 된다. Table 3과 Table 5의 결과를 사용하여 Table 6 활동지를 구성한다. i번째 F_i로 시작되는 네 개의 피보나치 수로 생성된 피타고라스 수를 (a_i, b_i, c_i), i번째 L_i로 시작되는 네 개의 뤼카 수로 만들어진 피타고라스 수를 (a'_i, b'_i, c'_i)라고 하자.

i	피보나치 수	(a_i, b_i, c_i)	뤼카 수	(a'_i, b'_i, c'_i)
1	1,1,2,3	(3,4,5)	1,3,4,7	(7,24,25)
2	1,2,3,5	(5,12,13)	3,4,7,11	(33,56,65)
3	2,3,5,8	(16,30,34)	4,7,11,18	(72,154,170)

Table 6. Find relationships between (a_i, b_i, c_i) and (a'_i, b'_i, c'_i); 활동지: (a_i, b_i, c_i) 와 (a'_i, b'_i, c'_i) 의 관계를 조사하여라.

Table 6으로부터 $5c_i = c'_i$ $(1 \le i \le 6)$을 쉽게 확인하면서, 따라서 $5(a_i, b_i, c_i)$와 (a'_i, b'_i, c'_i)를 비교하는 Table 7로부터 새로운 발견을 유도할 수 있다.

i	$5(a_i, b_i, c_i)$	(a'_i, b'_i, c'_i)	i	$5(a_i, b_i, c_i)$	(a'_i, b'_i, c'_i)
1	(15,20,25)	(7,24,25)	3	(80,150,170)	(72,154,170)
2	(25,60,65)	(33,56,65)	4	(195,400,445)	(203,396,445)

Table 7. Find relationships between $5(a_i, b_i, c_i)$ and (a'_i, b'_i, c'_i); 활동지: $5(a_i, b_i, c_i)$ 와 (a'_i, b'_i, c'_i) 의 관계를 조사하여라.

정리 4.7: 피보나치 수 F_i와 뤼카 수 L_i 로 시작되는 네 개의 수로 생성된 피타고라스 수를 각각 (a_i, b_i, c_i)와 (a'_i, b'_i, c'_i) 라고 하자. 그러면 $5c_i - c'_i = 0$, $5a_i - a'_i = (-1)^{i-1}8$, $5b_i - b'_i = (-1)^i 4$이다. 즉, $5(F_{i+1}^2 + F_{i+2}^2) = L_{i+1}^2 + L_{i+2}^2$, $5(F_iF_{i+3}) - (L_iL_{i+3}) = (-1)^{i-1}8$ 이며 $5(F_{i+1}F_{i+2}) - (L_{i+1}L_{i+2}) = (-1)^i 2$이다.

이 관계식 역시 [3]등에서 찾아 볼 수 있다. 그러나 이러한 대수식만으로는 의미를 파악하기 어려울 뿐만 아니라 학생들은 수학적 발견을 경험할 수 있는 기회를 잃게 된다. 피타고라스의 정리는 기하 영역의 대표 주제이며 피보나치 수는 대수 수열 영역으로 분류되는 주제이다. 대수와 기하는 별개 분야가 아닌 밀접한 상관관계가 있으므로 어느 한쪽을 떼어버린 채 대수 혹은 기하 단독으로 설명되지 않아야 하는데, 본 연구의 통합적 교수학습법을 사용하여 기하와 대수의 상호 보완적인 역할을 제시할 수 있다고 생각한다.

5 STEAM 교육에서 적용

학문의 통합, 융합 그리고 통섭은 우리 교육계의 화두이며, 오늘날 STEAM 창의 융합 인재교육으로 가속화되고 있다. STEAM 교육 이전의 STEM은 과학-기술-공학-수학을 뜻하며, stem의 사전적 의미인 '줄기, 계통, 축' 처럼 현대사회의 산업의 축을 만드는 교육 모형이라는 뜻을 함축하였다. 이는 1990년대 미국에서 공학교육을 개혁하기위한 융합모델로서, 수학 과학의 기본 원리를 바탕으로 공학교육을 실현하여 학생들의 학습 동기와

흥미, 그리고 성취를 높이자는 취지였다. 여기에 2006년에 Yakman이 예술영역을 포함시켜 창의적 설계를 비롯하여 모델 개발, 시연 및 시각화, 정보 관리, 의사 소통능력 등이 창의적 융합인재의 역량으로 부상되었다. Yakman은 Science & Technology interpreted through Engineering and the Arts, all based in Mathematical elements로 STEAM을 표현하면서 다섯 영역의 융합이지만 이 모든 것은 수학적 소재를 기반으로 한다고 했다.

수학과 예술영역의 융합을 소개할 때 피타고라스의 정리는 자주 사용되는 주제이다. 피타고라스가 조화로운 망치소리를 듣고, 망치의 크기 사이에 간단한 정수비율이 있음을 발견했다는 이야기는 잘 알려져 있으며, 그렇게 찾아낸 7음계는 수학적 조화에 의해 지배되는 우주의 모형을 나타낸다고 했다. 피보나치 수 역시 수학과 예술, 과학, 기술, 또한 금융에 이르기까지 융합을 소개하는 대표 소재 중 하나이다. 이와 관련된 황금비율이야말로 예술과 건축의 심미를 설명하며, 피보나치 수와 음악, 악기의 배치 등의 관계도 잘 알려져 있다.

이러한 이유로 인해 이 두 주제는 1983년에 미국 캘리포니아 주립대학 시스템(CSU)에 속한 전체 학생들이 졸업필수과목으로 수강해야하는 융복합적 수학교과의 내용으로 선택되었다. 당시 캘리포니아 주립대학은 19개 대학으로 구성된 미국에서 가장 큰 공립대학시스템이었다. 전공에 상관없이 모든 학생들이 필수로 수강해야 하는 수학과목의 개발을 맡았던 Marchisotto는 이러한 통합 교과목의 개발이 얼마나 중요한지, 또한 운영이 얼마나 어려운지를 논의했다[10]. 인문사회예술계열 학생을 위한 수학강의에서 교사들은 솔방울이나 화석에 숨어있는 피보나치 수를 보여주면서 학생들이 신기하고 놀라운 표정으로 '와!' 하도록 이끄는 것이 전형적인 모습이라고 했다. 이는 피보나치 수가 실세계에서 얼마나 신비로운 모습으로 드러나는지를 보여주고자 하는 것이다. 그러나 이러한 방법이 학생들을 수학 세계로 이끄는 데, 혹은 적어도 수학의 유용성을 인식시켜 호감을 높이는 데 도움이 되는가를 질문하지 않을 수 없다고 했다. 아울러 교과 간 통합으로서 수학을 가르칠 때 교사들은 수학이 얼마나 중요한지에 대해 지나치게 강조하는 경향이 있다 했다. 수학이 수학 밖의 영역에서 어떻게 사용되는지를 알려주기 위해, 학생들에게는 서로 연결되어 보이지 않는 주제들을 혼합하여 설명하곤 한다고 지적했다. 이러한 방법은 통합과 융합을 통해 각 영역 간의 어떤 연결고리를 발견해보고자 하는 흥미를 유발시키는 데 오히려 실패를 자초한다고 했다.

이와 같이 융합교육의 필요성에 충분히 공감하더라도, 그것을 실현할 수 있는 방법적 문제가 남게 된다. 무엇을 무엇과 통합할 것인지 또한 어떤 방식으로 융합할 것인지의 문제인데, 통합학습프로그램에 대한 연구에서 이론적 근거를 찾아 볼 수 있다. Fogarty[5]는 교과통합의 종류를 (단일)교과 내(within single), (여러)교과 간(across several), 또한 학습자(들) 간(with and across)통합으로 구분했다. Marchisotto는 학생들이 그동안

배워 온 수학내용들이 수학 영역 안에서 어떻게 관계되며 서로 응용되는지를 보여줄 수 있을까? 라는 질문을 제기하면서 수학 교과 내 통합프로그램 개발의 필요성을 주장했다. 학생들을 수학의 세계로 인도하여 수학의 유용성을 알게 하는 한 방법으로서 수학의 각 주제들 사이의 놀라운 관계를 알아가고, 스스로 발견하도록 유도하는 것이다. 이러한 시도는 Fogarty의 분류 중에서 (단일)교과 내 통합으로 볼 수 있다. 그러나 단일교과 내에서의 통합은 통합 요소의 범위가 다른 유형, 예를 들어서 (여러)교과 간 통합이나 간학문적 통합보다 협소하다는 점에서 통합교과내용 연구에서 활발히 논의되지 못한 것이 사실이다. 그러나 Marchisotto에 따르면 수학은 수학 내부에서 구성되는데, 이는 다른 과학에서는 잘 드러나지 않는 특별한 현상이라고 설명했다.

Marchisotto[10]는 피보나치와 피타고라스의 주제를 융합하여 본 연구와 유사한 활동을하는 교과목을 CSU에서 운영했다. 지난 20년 동안 두 주제를 연결하는 흥미로운 제목의 논문들이 다수 발표되었다. Pythagoras meets Fibonacci[1]는 피보나치 수와 피타고라스의 수, 그리고 황금비의 상관관계를 다루었다. 반대의 제목으로 Fibonacci meets Pythagoras[11]가 발표되었으며 연이어 A further Pythagorean variation on a Fibonacci theme[4]가 나왔다. 다시금 Boulger의 논문과 동일한 제목으로 Pythagoras Meets Fibonacci[15]가 출판되었다. 더 나아가 피보나치와 피타고라스를 융합한 주제는 수학, 예술, 음악, 과학 그리고 건축학의 방대한 분야를 하나로 묶는다는 연구[13]도 있었다. 이러한 방향은 Fogarty의 분류에 비추어 교과 내 통합으로 볼 수 있으며, STEAM 융합교육에서 추구하는 수학과 과학, 수학과 예술을 연합시키는 의미있는 연구가 될 것이다.

6 결론

융합과 통합이라는 목적으로 수학과 타 영역과의 교수학습 자료가 다수 연구되었다. 본 논문에서는 이러한 방향을 교과 내 통합이라는 관점에서, 수학을 기반으로 한 융합교육 주제로 자주 소개되는 피타고라스 수와 피보나치 수의 통합을 논의했다. 교과 내 통합은 하나의 교과 테두리 안에 머물므로 보통 생각하는 통합으로 보기 어렵다는 의견도 있지만, 타 학문과는 달리, 수학은 수학 내부에서 구성된다는 고유의 성질을 되새길 때, 기하-대수의 주제 통합을 다룬 본 연구의 결론을 다음과 같이 기술할 수 있다.

1. 통합교수학습 자료 - 피타고라스 수의 생성을 단발적으로 소개하는 여러 이론들을 피보나치 수로 통합하여 설명함으로써 학생들이 겪을 수 있는 혼돈을 줄이고 학습량을 감소시킬 수 있다. 그 뿐만 아니라 기하와 대수영역이 서로 분리된 분야가 아니라 대수식이 의미를 갖기 위해 기하적 설명이 동반될 때 효과적임을 시사했다. 마찬가지로 기하의 중요한 요소인 증명 교육이 약화된 가운데, 기하의 중요한 소재인 피타고라스 정리를 다룰 때 대수적 접근을 통합하는 방안을 논의했다. 미국에서도 피타고라스의 정리는 8∼10학

년에서 다루는 중요한 주제이며, 피보나치 수는 황금비율과 함께 6∼8학년에서 다루도록 권고되어 있다. 미국에서는 피타고라스의 정리를 넓이와 길이라는 기하적 요소로 설명하는 한편, 대수분야와 융합하려는 많은 시도가 있다[1]. 교과 내 통합은 타 학문 영역과의 통합이 아니라는 점에서 큰 주목을 받지 못했지만, 수학의 고유한 성질을 감안할 때 암시적으로 교사가 내용을 재조직하는 통합이 될 수 있다.

2. 발견학습 활동 - 교과서에서 언급되는 $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(8,15,17)$ 등의 제한된 값이 아니라, 피보나치 수를 사용하여 무한히 많은 피타고라스 수를 학생들이 직접 발견하고 생성하도록 하는 발견학습 자료이다. 본 연구의 활동지를 사용하여 학생들 스스로 피타고라스 수를 찾는 경험은 수학화를 해 나가는 구성주의적 교수학습 자료로 의미가 있다. 실제로 2014년 3월부터 12월까지 D시의 과학고등학교에서 본 활동지로 발견학습을 실시하였을 때 대부분의 학생들이 성공적으로 수행할 수 있음을 확인하였다. 그로 인해 피타고라스 수를 외우는 것이 아니라, 피보나치 수를 사용하여 무수히 많은 피타고라스 수를 생성할 수 있게 되었다. 더 나아가 피보나치 수들의 대수적 항등식이 갖는 의미를 기하적 관점에서 이해할 수 있게 되었다. 피보나치 수의 개념이 어려운 것이 아니라는 점에서 일반 고등학교에서도 수학 활동으로 사용할 수 있을 것으로 기대한다. 한편 CSU 시스템의 사례에서 보았듯이, 대학 인문사회계열생들을 위한 수학 주제 중심의 통합 강좌에서도 탐구력과 발견을 경험하게 하는 자료로 활용될 수 있다.

3. 수학사적 가치 - 학교수학에서 수학사의 도입은 학생들의 흥미유발과 동기부여에 효과적이다. 직각삼각형을 구성하는 정수 길이의 탐구는 기원전 1700년경으로 추정되는 플림프톤 322로부터 시작하여, 기원전 400년경 고대 그리스의 피타고라스, 플라톤 그리고 유클리드로 이어졌다. 그러한 연구가 1200년경 중세시대의 피보나치 수를 사용하여 통합되는 과정을 봄으로써 수학은 끊임없이 발전하고 재해석된다는 가치를 보여줄 수 있다.

감사의 글 좋은 논문을 위해 성심어린 조언을 해주신 심사위원들께 감사드립니다.

References

1. W. Boulger, Pythagoras meets Fibonacci, *Mathematics Teacher* 82(4) (1989), 277–282.
2. B. A. Burns, Pre-service teachers' exposure to using the history of mathematics to enhance their teaching of high school mathematics, Issues in the undergraduate mathematics preparation of school teachers, *The Journal* 4 (2010).
3. D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill, 2010.
4. M. de Villiers, A further Pythagorean variation on a Fibonacci theme, *Mathematics in School* 31(5) (2002), 22.

1) How to solve Pythagorean theorem problems: geometry and algebra examples. http://calculus-geometry.hubpages.com/hub

5. R. Fogarty, Ten ways to integrate curriculum, *Educational Leadership* 49(2) (1991), 61–65.
6. H. Freudenthal, Revisiting mathematics education, China Lectures, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
7. U. T. Jankvist, A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71(3) (2009), 235–261.
8. D. Kalman, R. Mena, The Fibonacci numbers-exposed, *Math. Magazine* 76(3) (2003) 167–181.
9. Kim M. K., Review and interpretations of Plimpton 322, *The Korean Journal of History of Mathematics* 20(1) (2007), 45–56. 김민경, 고대 바빌로니아 Plimpton 322의 역사적 고찰, 한국수학사학회지 20(1) (2007), 45–56.
10. E. A. Marchisotto, Connections in mathematics: an introduction to Fibonacci via Pythagoras, *Fibo. Quart.* 31(1) (1993) 21–27.
11. D. Pagni, Fibonacci meets Pythagoras, *Mathematics in School* 30(4) (2001) 39–40.
12. Park W. B., Park, H. S, On the Pythagorean triple, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Edu.* 41(2) (2002), 227–231. 박웅배, 박혜숙 (2002). 피타고라스의 세 수, 한국수학교육학회, 수학교육 41(2) (2002), 227–231.
13. Paulano, Fibonacci and Pythagoras unite mathematicians, artists, musicians, naturalists, architects and beauticians, http://paulano.wordpress.com/2008/09/21/.
14. E. Robson, Words and pictures: new light on Plimpton 322, *The Amer. Math. Monthly* 109 (2002), 105–120.
15. D. Robinson, Pythagoras meets Fibonacci, *New Zealand Math. Magazine* 43(2) (2006), 44.
16. Roh M. G., Jung J. H., Kang J. G., On the general term of the recurrence relation $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Comm. Mathematical Edu.* 27(4) (2013), 357–367. 노문기, 정재훈, 강정기, 점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$의 일반항에 대하여, 수학교육논문집, 27(4) (2013), 357–367.
17. Yang Y. O., Kim T. H., A study on generalized Fibonacci sequence, *The Korean Journal of History of Mathematics* 21(4) (2008), 87–104. 양영오, 김태오, 피보나치 수열의 일반화에 관한 고찰, 한국수학사학회지 21(4) (2008), 87–104.