판형 압전 진동자의 굽힘변형 모드에 따른 전압발생 특성에 관한 해석적 연구

Numerical Analysis of Deformation Mode of Flexible Plate-Type Piezoelectric Module for Evaluating Characteristics of Electrical-Energy Generation

박정현 ¹, 박상후 ²⊠ Jeong-Hyun Park¹ and Sang-Hu Park^{2,⊠}

1 부산대학교 기계공학부 대학원 (Graduate School of Mechanical Engineering, Pusan National University) 2 부산대학교 기계공학부 / 정밀정형 및 금형가공연구소 (School of Mechanical Engineering, ERC/NSDM, Pusan National University) ⊠ Corresponding author: sanghu@pusan.ac.kr, Tel: +82-51-510-1011

Manuscript received: 2015.3.10. / Revised: 2015.6.17. / Accepted: 2015.6.30.

Piezoelectric materials are well-utilized for transforming mechanical vibrations into electrical energy that can be stored and used to power a diversity of devices. In this work, these materials have been studied to improve the efficiency of a piezoelectric system, whereby the shape and vibration mode of a piezoelectric module was changed. The basic shape of the piezoelectric module used in this work comprises a width of 10 mm, a length of 30 mm, and a thickness of 0.2 mm. The structural design of the piezoelectric module is optimized using a Taguchi method to increase the corresponding electrical-energy generation. The maximum terminal voltage was defined as a characteristic value to evaluate the optimal design parameters. Through this work, we propose an optimal structure with an eccentric and centric mass; furthermore, the voltage increase of approximately 26% was obtained by comparing a general plate-vibrating piezosystem.

KEYWORDS: Piezoelectric material (피에조 물질), Electrical energy generation (전기발전), Optimal structure (최적형상), Vibration modes (진동모드)

기호설명

S = strain T = stress D = density of line electricity E = electrical field $s^E = \text{compliance}$ d = piezoelectric constant ε^{T} = permittivity V = voltage Q = quantity of electric charge E = electrical energy **1.** 서론

Copyright © The Korean Society for Precision Engineering

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

meenamear systems		
Systems	$a (m/s^2)$	f(peak, Hz)
Car engine	12	200
Car outer panel	3	13
3-axis machining system	10	70
Compact disc driver	0.6	75
Hair dryer	3.5	121
Microwave oven	2.5	121

Table 1 Peak acceleration and frequency in various mechanical systems

최근 지구환경의 변화로 인하여 에너지 효율이 높은 시스템이나 버려지는 에너지를 재활용하는 시 스템에 대한 관심이 고조되고 있다. 자동차, 선박, 비행기를 비롯한 회전기계장치들은 외부환경조건 또는 편심에 의한 진동이 주기적으로 발생한다. 예 를 들면, 자동차 엔진에서는 최대 약 12 m/s²의 가속 도로 진동을 하고 3축 선반의 경우 약 10 m/s²의 가 속도로 진동을 한다.^{1,2} 또한 소형 전자제품, 유체기 계 등에서도 Table 1과 같이 다양한 크기의 진동이 발생함을 알 수 있다. 이러한 버려지는 진동에너지 원을 이용하여 전기에너지로 활용을 하게 되면 웨 어러블 장비 (wearable devices), 소형 에너지 저장장 치 등에 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

진동에너지를 전기에너지로 변환하는 방법으로 압전소자 (piezoelectric material)가 많이 활용된다. 압전소자는 에너지 전환뿐만 아니라 초정밀 스테 이지 등 다양한 장치에 활용되고 있다. 현재까지 진행된 압전소자를 이용한 전기에너지 수집장치에 대한 연구를 살펴보면 다음과 같다. Kim³ 등은 악 기로 쓰이는 심벌의 형상을 본 따서 원형 평판의 압전 소자의 양 면에 심벌을 부착하여 양 면에 기 계적인 외력 또는 진동이 발생할 때 압전 소자로 부터 전기에너지를 수집하는 연구를 진행하였고, Xu⁴ 등은 기존까지 주로 연구 되었던 보 형상이 아닌 수직방향의 추가적인 보를 달고 그 끝에 자 유단 질량을 추가하여 상하 방향과 수평방향의 진 동 모두를 이용할 수 있는 에너지 수집장치 시스 템을 제안 하였다. Liu⁵ 등은 직선 형태가 아닌 S 자 형태를 이용하여 MEMS 에너지 수집장치 시스 템을 제안하였다. Miller⁶ 등은 압전 에너지 수집장 치를 이용하여 컴프레서에 적용하였고, Tang⁷ 등은 에너지 수집장치의 고유 진동수를 튜닝하는 방법 을 제안하였다. Yao⁸ 등은 사각형 압전 모듈에 기 질의 길이를 더 연장하여 자유단에 질량을 추가하 는 방식으로 연구를 진행 하였다.

압전소자를 이용한 에너지 발생장치의 응용연 구를 살펴보면 Kymissis⁹ 등은 세라믹이 아닌 폴리 머 압전 물질을 이용하여 신발 밑창에 곡률을 가 지는 압전 소자를 부착하여 변형이 일어나면서 에 너지를 수집하는 방법을 제안하였다. Granstrom¹⁰ 등은 압전체를 배낭에 부착하여 외력이 가해질 때 전기에너지를 수집하는 방법에 대하여 연구하였다. 그 외에도 다양한 방식으로 에너지를 발생 관련 연구가 진행되었다.¹¹⁻¹⁴

본 연구에서는 판형 압전물질을 이용하여 전기 에너지를 발생할 수 있는 장치를 개발하기 위한 압전 진동판의 형상설계에 대하여 연구하였다. 특 히 압전 진동판 자유단에 질량을 부착하여 굽힘변 형 모드를 다양하게 발생시켜서 전압이 최대로 발 생하는 변형모드와 구조 최적안을 해석적으로 연 구하였다.

2. 기초이론

2.1 압전체 분류

압전 물질은 기계 에너지를 전기에너지로 변환 할 수 있고 (압전 정효과) 그 반대 또한 가능하다 (압전 역효과). 1880년 압전물질의 발견 이후 많은 연구가 진행 되면서 압전체의 기능을 이용하는 다 양한 방법이 오늘날에 다양하게 적용되고 있다. 예를 들면, 현대인들이 사용하는 전자식 바늘 손 목시계에도 압전체가 적용되어 시간을 맞춰주고 있으며 각종 센서나 액츄에이터, 초음파 진동자, 레이더, 탐지기, 스피커, 펌프, 모터 같은 곳에도 사용되며 의료장비나 컴퓨터 시스템에도 이용되고 있다.

압전 물질은 세라믹과 같은 수정, 로셀 염, 티 탄산바륨 (BaTiO3), PZT(Pb(ZrTi)O3) 등이 있으며, PVDF (Polyvinylidene fluoride) 같은 폴리머 재질의 압전 물질도 있다. 세라믹 재질의 압전 물질은 압 전효과가 뛰어나다는 장점이 있지만 그만큼 취성 이 강해 쉽게 부서지는 단점이 있으며, 폴리머 재 질은 압전 효과는 상대적으로 떨어지지만 세라믹 에 비해 더 유연하다는 장점이 있다. 이러한 특성 을 이용하여 목적에 맞는 압전 물질을 선정하는 것이 중요하다. 압전체는 외력에 대한 전기 에너 지를 만들거나 전기 에너지에 대한 기계적 변형을 만들어 내지만, 이를 활용하기 위해서는 전기적 특성에 대한 이해가 필요하다. 압전체에서 만들어 내는 전기 에너지를 활용하기 위해서는 전기가 형 성되는 영역에 전극을 입혀서 전기 에너지가 모이 도록 해야 하는데, 압전체는 이 때에 전자 부품인 캐패시터 (capacity)와 같이 유전체 역할을 하게 된 다. 따라서 압전체의 전기적 분석도 캐패시터와 같은 개념으로 생각할 수 있다.

2.2 전기적 특성

압전체의 구성방정식을 살펴보면 식(1), 식(2)와 같다.

$$S = s^E T + d^T E \tag{1}$$

$$D = dT + \varepsilon^T E \tag{2}$$

여기서, *S*, *T*, *D*, *E*, *s^E*, *d*, *ε^T* 는 각각 변형률, 응력, 전 기 선속밀도, 전기장, 컴플라이언스, 압전상수, 유 전율을 나타낸다. 대문자는 외부조건에 따른 변수 를 나타내고, 소문자는 압전물질에 따라 결정되는 재료상수를 나타낸다.

압전물질을 이용한 에너지 수집장치는 일반적 으로 Figs. 1(a)와 1(b)와 같이 두 가지의 변형모드 (3-1모드, 3-3모드)가 사용된다. 3-1모드는 압전 물질 에 가하는 응력의 방향과 압전 물질의 분극 방향 이 서로 직각일 때 이며, 3-3모드는 응력의 방향과 분극의 방향이 같을 때를 나타낸다.

3-1모드에 대한 구성방정식은 식(3), 식(4)와 같 으며 3-3모드의 구성방정식은 식(5), 식(6)과 같다. 구성 방정식으로부터 알 수 있는 것은 유도되는 전 하량은 3-1모드에서는 상수 d₃₁ 과 3-3모드에서는 d₃₃ 에 비례한다는 것을 할 수 있다. 일반적으로 대 부분의 압전상수는 d₃₁ 보다 d₃₃ 이 더 크기 때문에 3-3모드가 더 효율적이다. 그러나 3-3모드의 경우 외력을 가할 수 있는 방법이 쉽지 않기에 직접적인 응용이 어려우며, 일반적으로 3-1모드를 이용하며 본 연구에서도 3-1모드에 대한 최적화를 하였다.

 $S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3 \tag{3}$

$$D_{3} = d_{31}T_{1} + \varepsilon_{33}^{T}E_{3}$$
(4)

$$S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \tag{5}$$

$$D_3 = d_{33}T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3 \tag{6}$$

전기에너지 수집효율을 올리기 위해서는 압전 상수가 높은 재료를 사용하는 것이 중요하다. 그



(b) Parallel direction of external force (3-3 mode)

Fig. 1 Piezoelectric polarization on acting force

러나 본 연구에서는 압전소자의 형상설계에 초점 을 두고 있어 다양한 압전 재료에 대해서는 고려 하지 않았다.

3-1모드에서 응력이 가하질 때의 순간 발생하 는 전압을 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{31} = \sigma_1 g_{31} t \tag{7}$$

여기서 σ₁, g₃₁, t는 각각 외력에 의해 발생된 응력, 압전 전압계수, 그리고 압전체의 전극간의 간격 또는 두께를 나타낸다. 또한 압전물질의 전극에 충전되는 전하량 (Q)은 식(8)과 같이 표현된다.

$$Q = \sigma_1 d_{31} l W \tag{8}$$

$$E = \frac{1}{2}QV_{31} = \frac{1}{2}d_{31}g_{31}\sigma_{1}^{2}lWt$$
(9)

여기서 *I*, *W*는 압전체의 길이와 폭을 나타낸다. 그 리고 전압과 전하량 선도의 면적은 발생되는 전기 에너지 (*E*)로 볼 수 있다. 식(7)-식(9)을 통해서 전 압과 전하량을 증가시키기 위해서는 응력을 증가 시키고, 압전체의 크기를 증가시킬수록 증가됨을 알 수 있다. 그러나 압전물질의 크기를 무조건 증 가시키는 것은 무의미할 수 있기 때문에 본 연구 에서는 압전물질의 형상크기가 동일한 조건에서 변형모드를 다르게 할 때 발생되는 전압의 크기 변화를 알아 보도록 하였다.

3. 판형 압전 진동자 설계

3.1 압전물질

본 연구에서 사용할 압전물질은 회티타늄석으 로 페로브스카이트 (perovskite) 구조를 가진 압전 체이다. 이는 6면체 격자의 모서리에 1/8 원자가 8 개 존재하고, 면심에 1/2 원자가 6개 존재하며, 체 심에 1 원자가 1개 존재하는 구조이다. 여기서 면 심에 존재하는 1개의 원자가 중심에서 벗어나면서 자발 분극이 형성되는 원리이다. 이를 분자식으로 표현하면 Pb(Zr_{0.52}/Ti_{0.48})O₃ 이며, 이는 체심에 티타 늄 또는 지르코늄을 가지고 있는데, 지르코늄 52% 와 티타늄 48% 의 몰 비율로 혼합되어 있다.

3.2 기본 형상구조

본 연구에서는 에너지 수집장치를 설계 및 제작 하기 위하여 사각 형태를 기본으로 하고 3-1모드를 사용하는 압전 모듈을 설계하고자 한다. 설계 기본 형상에 대한 구속 조건은 다음과 같다. ① 압전체 면적은 300 mm² 로 일정. ② 압전체의 두께는 0.2 mm 로 균일. ③ 압전체 면에 증착된 전극의 영향은 무시. 또한, 각 압전 모듈에 이용되는 압전 물질의 양은 일정하도록 한다. 압전물질이 부착될 기질 (substrate)은 SUS304 재질로 두께 0.2 mm로 정하였 다. 이러한 기지가 없이 순수 압전체만 이용할 경우, 압전체의 큰 취성에 의해 쉽게 파손이 일어나서 문 제가 된다. 따라서 원하는 용도나 목적에 맞게 기지 재료를 정하는 것은 중요한 점이라고 할 수 있다.

기질에 압전 물질을 어느 면, 어떤 방향으로 부 착을 할 것인지는 중요한 부분이다. 기지의 단면에 만 압전체를 부착할 수도 있고 (unimorph), 기지의 양면에 압전 물질을 부착할 수 있다 (bimorph). 각 방식의 장단점이 있으며, 본 연구에서는 단면에만 부착한 것으로 정하였다. 압전 물질은 각각의 고유 한 극성이 존재하며 인장 또는 압축을 받을 때 발 생하는 전하의 집적, 전위가 발생하는 극성이 있기 때문에 이러한 방향성을 잘 고려하여 압전 모듈을 제작 하여야 한다. Figs. 2(a)와 2(b)에는 압전 물질 의 방향에 따른 전압거동을 비교하여 나타내었다.

이상에서 기술한 내용을 정리하면 기본 형상구 조는 Fig. 3과 같이 설정하였다: ① 길이 x 폭: 30



(b) Opposite poling direction





Fig. 3 Fundamental shape and structure of a piezovibrating plate

mm x 10 mm, ② 두께: 0.2 mm, ③ 단면 (Unimorph) 타입 반극성방향 압모듈.

3.3 판형 압전진동자 설계 요인효과 분석

본 연구의 목표는 앞서 기술한 바와 같이 판형 압전모듈의 상하 진동을 입력조건에서 최대 전압을 발생시키는 형상 최적화이다. 해석에 사용된 소프트 웨어는 COMSOL Multyphysics를 이용하였다.¹⁵ 구조 및 압전 해석을 수행하여 최적형상을 도출하도록 하였다. 해석에서 압전체의 물성은 소프트웨어에 있 는 PZT-5J를 사용하였으며, 이것은 3.1절에 제시한 물질과 유사한 물성을 가진다.

형상 설계변수는 Fig. 4에 나타낸 것처럼 기본형 상 구조에 하중을 부착하여 다양한 변형모드가 발생 하도록 하였다. 설계인자의 요인효과 분석을 위하여 L9다구찌 직교배열표 (Taguchi's orthogonal matrix)를 이용하였다.

다구찌의 직교배열표에 의해 9가지 해석경우 를 정리하여 Figs. 5(a)와 5(b)에 나타내었다. 구조



Fig. 4 Variables for optimization of structure and mass position of a piezoelectric plate



Fig. 5 (a), (b) Analysis models of nine cases; the bracket shows design parameters and their levels

해석 및 압전해석을 실시한 결과를 정리하면 Table 3과 같으며, 평가특성치는 최대전압으로 하 였다. 가로 10 mm 세로 30 mm의 크기를 가지는 기본 압전체 형상에서 두 질량의 위치에 대한 설 계변수(A)와 기질의 길이에 대한 변수(B)로 구분

	. –	-		
	A(D1)	B(D2)	C(m1)	D(m2)
1-level	0 mm	0 mm	0.0 g	0.0 g
2-level	15 mm	15 mm	0.5 g	0.5 g
3-level	30 mm	30 mm	1.0 g	1.0 g

Table 3 Orthogonal array and analysis results





Fig. 6 Sensitivity of design parameters

하고 질량의 크기를 각각 변수(C), 변수(D)로 두 었다. 이러한 질량의 분포를 통하여 단순 굽힘모 드 뿐만 아니라 비틀림 변형모드도 같이 발생하 도록 유도하였다. 설계변수에 대한 수준을 Table 2에 나타내었다.

Fig. 6의 결과에서 최적안을 구하게 되면 A는 2 수준, B는 1 또는 2 수준, C는 2 또는 3 수준, D는 3 수준일 때 최적안으로 나타났다. 특히 설계변수 D(m2)의 경우 직접적인 굽힘변형을 유발하게 되어 전압발생에 가장 큰 영향을 주는 것으로 나타났다. 또한 변수 C(m1)는 편심 하중으로 굽힘과 비틀림 을 동시에 유발하는 것으로 분석되며 2수준과 3수 준이 거의 유사하게 나타났다.

4. 결과 및 토의

다구찌 요인효과분석을 통하여 최적안을 2가지 로 도출하였다; Optimum-1(A2,B1,C2,D3), Optimum-



Fig. 7 Selected optimum design cases; Optimum-1 and Optimum-2

2(A2,B2,C3,D3). 2가지 최적안에 대한 해석결과 최 대전압이 각각 34.9, 33.9 V로 나타났다. 따라서 2가 지 최적안 중에서 Optimum-1이 더 좋은 안으로 평 가되었다(Fig. 7 참조).

Optimum-1 안을 보면 Optimum-2 안에 비하여 압전물질에 바로 붙어서 굽힘변형을 가하기 때문 에 압전물질에 걸리는 인장 변형률(S)에 직접적으 로 영향을 주어서 보다 효과가 높은 것으로 사료 된다. 또한 편심에 의한 비틀림 효과도 전압을 올 리는데 도움이 되는 것으로 판단된다. 다만 편심 유발을 위한 질량(m1)도 비틀림 변형과 동시에 굽 힘을 유발하기에 압전체의 3-1변형모드에 기여할 것으로 판단되어 향후 보다 자세한 실험을 통하여 비교할 필요가 있을 것으로 판단된다.

요인효과 분석결과에서 또 다른 최적안으로 (A2, B2, C2, D3)를 선정할 수 있다. 해석결과 예상 과 달리 최대 전압이 약 31.73 V으로 나타났다. 이 것은 변형모드에 대한 교호작용에 의해 최대 전압 이 다소 줄어든 것으로 사료되며, 향후 추가적인 고찰이 필요한 부분이다.

B변수에 대한 영향분석을 엄밀하게 확인해 보기 위하여 Fig. 8과 같이 PZT재료 앞에 SUS 15mm를 두 고 질량을 부착한 경우와 PZT에 이어서 질량이 부 착된 경우에 대하여 가진 주파수별로 변위를 측정 하였다. 변위측정에는 레이저 변위센서(CP24MHT80, Freecon)를 각 측정점에 위치하여 측정하였다.

Figs. 9(a)와 9(b)에 나타낸 결과처럼 PZT 재료 와 질량을 붙인 경우가 변형거동이 안정되게 나타 나고 PZT 재료와 질량 사이에 간격 15 mm를 둔 경우에는 상대적으로 강성이 약한 SUS 판재가 가 진 주파수에 따라서 변형모드의 변화로 인해 국부 적인 변형량(②과 ③)이 서로 차이가 남을 알 수 있다. 따라서 질량이 직접적으로 PZT에 변형률이 부가되기 보다는 PZT 판재는 변위만 발생하고 SUS판재에 변형률이 많이 발생하는 것으로 사료 된다. 결론적으로 질량이 PZT와 멀리 위치할수록







Fig. 9 Results of displacement measurement of two cases

전체적인 변경거동(변위)은 많지만 변형률 측면에 서는 오히려 PZT에 가깝게 질량을 위치시킨 모델 (short-model)이 더 효과적인 것으로 분석된다.

5. 결론

3-1변형모드를 가지는 압전체를 이용하여 최 대전압을 발생하는 구조에 대하여 다구찌 방법으 로 설계인자를 분석하고 다음과 같은 결론을 얻 었다.

- (1) 판형 압전체의 기본형상을 고정하고 진동시 굽 힘변형을 극대화 하기 위한 미소 하중의 크기 와 위치를 설계변수로 두고 해석한 결과 Fig. 7 에 나타낸 최적안을 도출하였다.
- (2) 굽힘변형이 압전체의 전압발생에 가장 큰 기여 를 하며, 비틀림 변형도 어느 정도 기여를 하 는 것으로 판단된다. 이것은 비틀림 변형시에 도 인장과 압축이 발생하기 때문으로 사료되며, 비틀림 변형을 위한 질량(m1)도 실제로는 굽힘 변형을 동시에 유도하는 것으로 파악된다.
- (3) 따라서 향후 실험과 연계하여 굽힘과 비틀림 변 형이 어느정도 압전체 발전에 기여를 하는지에 대한 명확한 분석이 필요할 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 부산대학교 기본연구지원사업 (2년, 과제기간: 2015.3.1. ~ 2017.2.28.) 지원으로 수행되었 음을 알립니다.

REFERENCES

- Roundy, S. and Wright, P. K., "A Piezoelectric Vibration Based Generator for Wireless Electronics," Smart Materials and Structures, Vol. 13, No. 5, Paper No. 1131, 2004.
- Kim, H. W., Priya, S., Uchino, K., and Newnham, R. E., "Piezoelectric Energy Harvesting under High Pre-Stressed Cyclic Vibrations," Journal of Electroceramics, Vol. 15, No. 1, pp. 27-34, 2005.
- Xu, J. W., Shao, W. W., Kong, F. R., and Feng, Z. H., "Right-Angle Piezoelectric Cantilever with Improved Energy Harvesting Efficiency," Applied Physics Letters, Vol. 96, No. 15, Paper No. 152904, 2010.
- Liu, H., Lee, C., Kobayashi, T., Tay, C. J., and Quan, C., "A New S-Shaped Mems PZT Cantilever for Energy Harvesting from Low Frequency Vibrations Below 30 Hz," Microsystem Technologies, Vol. 18, No. 4, pp. 497-506, 2012.

- Miller, L. M., Halvorsen, E., Dong, T., and Wright, P. K., "Modeling and Experimental Verification of Low-Frequency Mems Energy Harvesting from Ambient Vibrations," Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 21, No. 4, Paper No. 045029, 2011.
- Tang, L., Yang, Y., and Soh, C. K., "Toward Broadband Vibration-Based Energy Harvesting," Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 21, No. 18, pp. 1867-1897, 2010.
- Yao, K. and Uchino, K., "Analysis on a Composite Cantilever Beam Coupling a Piezoelectric Bimorph to an Elastic Blade," Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 89, No. 3, pp. 215-221, 2001.
- Kymissis, J., Kendall, C., Paradiso, J., and Gershenfeld, N., "Parasitic Power Harvesting in Shoes," Proc. of the International 2nd Symposium on Wearable Computers, Digest of Papers, pp. 132-139, 1998.
- Granstrom, J., Feenstra, J., Sodano, H. A., and Farinholt, K., "Energy Harvesting from a Backpack Instrumented with Piezoelectric Shoulder Straps," Smart Materials and Structures, Vol. 16, No. 5, Paper No. 1810, 2007.
- Kim, H. S., Kim, J.-H., and Kim, J., "A Review of Piezoelectric Energy Harvesting Based on Vibration," Int. J. Precis. Eng. Manuf., Vol. 12, No. 6, pp. 1129-1141, 2011.
- Shin, B. H. and Park, Y. W., "Proof-of-Concept of Magnetic Wheel-Based Magnetostrictive Energy Harvester," J. Korean Soc. Precis. Eng., Vol. 32, No. 5, pp. 483-490, 2015.
- Pillai, M. A. and Deenadayalan, E., "A Review of Acoustic Energy Harvesting," J. Korean Soc. Precis. Eng., Vol. 15, No. 5, pp. 949-965, 2014.
- Truitt, A. and Mahmoodi, S. N., "A Review on Active Wind Energy Harvesting Designs," Int. J. Precis. Eng. Manuf., Vol. 14, No. 9, pp. 1667-1675, 2013.
- COMSOL, "The COMSOL Multiphysics 4.0, User Manual," 2012.