Journal for History of Mathematics
Vol. 28 No. 4 (Aug. 2015), 191–204
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2015.28.4.191

Didactical Issues Related to Necessary Condition and Sufficient Condition

필요조건, 충분조건 개념의 학습과 관련한 문제들

Hong Jin-Kon 홍진곤 Kong Jung-Taek 공정택

The reason of the confusion of learners about the logic concepts such as implication, necessary condition and sufficient condition can be analyzed from the point of view of history of logic, discrepancy between ordinary language and formal logic, and reification which occurs in the process of cognition of discursive object and also indicates the necessity of a research. This study analysed the difficulties related to study and implication concept and attempted to the reflection of textbook and curriculum. Not that ordinary language makes the introduction of formal language easier, but that this study discussed the possibilities ordinary language intervenes the learning of formal language. This study additionally intended to understand learning difficulties of concrete subjects, abstract subjects and the gap between primary object and discursive object by understanding the process of sagging, encapsulating and reifying.

Keywords: implication, formal language, reification; 함의, 형식적 언어, 물화.

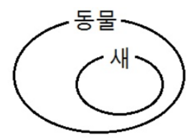
MSC: 97D70 ZDM: C54

1 서론

Pirie [9, p. 8]는 수학적 의사소통의 수단을 6가지로 분류한다. 일상 언어, 수학적 구두 언어 (mathematical verbal language), 기호적 언어(symbolic language), 시각적 표현 (visual representation), 준 수학적 언어(quasi-mathematical language)가 그것이다. 6가지로 분류된 이러한 언어들은 궁극적으로 수학적 개념과 그 개념의 형식화된 용어에 대해 의사소통하기 위한 수단이다. 본고에서는 필요조건, 충분조건이라는 형식화된 수학적 개념을 학생들이 학습함에 있어서 '필요'와 '충분'이라는 일상 언어와 '⇒'와 같은 기호적 언어가 간섭되어 있는 상황을 분석하고 이로 인한 몇몇 문제들을 고찰하고자 한다.

이 논문은 2015학년도 건국대학교의 연구년교원 지원에 의하여 연구되었음.
Hong Jin-Kon: Dept. of Math. Edu., Konkuk Univ. E-mail: dion@konkuk.ac.kr
Kong Jung-Taek: Dept. of Math. Edu., Konkuk Univ. E-mail: ball002@hanmail.net
Received on July 21, 2015, revised on Aug. 14, 2015, accepted on Aug. 20, 2015.

현재 우리나라 대부분의 교과서에서는 다음 예와 같이 필요조건, 충분조건이라는 개념을 도입하기 위해 '필요'와 '충분'이라는 일상 언어를 먼저 언급하고 이로부터 기호적 언어인 '⇒'와 '필요조건', '충분조건'이라는 형식 용어를 도입한다.



> 오른쪽 그림은 새와 동물 사이의 관계를 벤 다이어그램으로 나타낸 것이다. 까치는 동물에 속한다고 판단하기에 충분한지, 어떤 생물이 동물에 속하면 그 생물이 새라고 판단하기에 충분한지 말해 보자. 새라는 조건은 동물이기에 충분한 것이고, 새이기 위해서는 최소한 동물에 속할 필요가 있음을 알 수 있다.
> 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로 $p \Rightarrow q$와 같이 나타낸다.
> 이 때, p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다. [7, p. 39]

그런데 학생들에게는 '새가 동물이기에 충분'하다든가, '새이기 위해서는 동물에 속할 필요'가 있다든가 하는 설명이 그렇게 자연스럽지 않은데, 그것은 일상 언어에서 사용하는 '필요'와 '충분'이라는 단어가 이런 식으로는 잘 쓰이지 않기 때문이다. 이는 학생들로 하여금 '$p \Rightarrow q$가 주어지면 p는 충분조건이고 q는 필요조건'과 같이 무조건 암기하게 하고, 암기가 잘 이루어지지 않는 경우 'p는 q이기 위한 필요조건, q는 p이기 위한 충분조건'이라고 반대로 말하거나 $p \rightarrow q$와 그 역의 참 거짓을 잘 판별하면서도 충분조건, 필요조건이라는 형식화된 언어는 잘 사용하지 못하는 상황이 일어나게 하는 원인이 될 수 있다.

한편, 학생들은 교과서에 제시되어 있는 '∼이기 위한'이라는 정확한 용어가 아닌 '∼의', '∼에 대한', '∼가 되기에', '∼일 때'와 같은 용어도 흔하게 사용하는 것을 관찰할 수 있는데, 이와 같은 용어 사용의 '느슨함'도 수학 교과에서 보면 필요조건, 충분조건이라는 개념과 관련되어 나타나는 특이한 상황이라고 할 수 있다.

본고에서는 필요조건, 충분조건 개념과 관련하여, 이러한 용어 사용의 느슨함과 용어 사용의 오류, 용어 학습의 어려움이 어떤 형태로 나타나는지 분석하고 그 원인은 무엇으로부터 기인하는 것인지 찾아보려 했다. 그 분석 결과로, 이러한 어려움은 필요조건, 충분조건의 의미를 진리집합의 포함관계로 설명할 때 그 포함관계의 의미에 대한 혼란, 그리고 형식 언어에 대한 일상 언어의 간섭이 주요한 원인 요소가 됨을 밝힐 것이다. 이와 더불어, 필요조건과 충분조건이라는 용어의 학습과 관련된 학생들의 어려움을 그 개념에 대한 '물화(reification)'라는 관점으로 분석하여 설명하고자 한다.

2 필요, 충분조건 용어 사용 유형과 오류 형태

고등학교의 명제 단원에서 다루는 개념에는 명제, 진리집합, 역, 이, 대우, 필요조건, 충분조건 등이 있다. 이 개념들을 모두 배운 서울 소재 A고등학교 1학년 430명의 학생들에게

다음과 같은 문제를 제시하고 그 응답을 검토하였다.

[문제] '필요조건', '충분조건' 을 명제 $p \to q$와 그 역을 가지고 설명하여라.

검토 결과 모두 195명의 학생들이 응답하였으며, 그 응답은 5가지 유형으로 분류되었다. 첫째, 'p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건' 이라고 정확하게 표현한 경우, 둘째, '～이기 위한' 이라는 표현 없이 'p는 충분조건, q는 필요조건' 이라고 다소 부족하게 표현한 경우, 셋째, 교과서에 진술되어 있는 '～이기 위한' 이라는 표현 대신 'p는 q의 충분조건', 'p는 q에 대한 충분조건', 'p는 q가 되기에 충분조건', 'p는 q일 때 충분조건' 등과 같이 유사한 표현을 사용한 경우, 넷째, 'p는 q이기 위한 필요조건' 과 같이 오류를 보인 경우, 다섯째, 위의 어느 것에도 속하지 않는 경우. 각 응답의 인원수와 비율은 Table 1과 같다.

코드	유형	설명	인원 수	비율(%)
1	정확한 표현	p는 q이기 위한 충분조건	42	21.5
2	부족한 표현	p는 충분조건	46	23.6
3	유사 표현	p는 q의(q에 대한, q가 되기에, q일 때)충분조건	64	32.8
4	오류	p는 q이기 위한 필요조건	14	7.2
5	기타		29	14.9

Table 1. Students' term use type ; 학생들의 용어 사용 유형 및 비율

교과서에 진술된 것과 같이 'p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건' 이라고 정확하게 표현한 학생은 21.5%에 불과했으며, 'p는 q의 충분조건', 'p는 q에 대한 충분조건', 'p 는 q가 되기에 충분조건', 'p는 q일 때 충분조건' 등과 같이 유사한 표현을 사용한 학생이 32.8%로 가장 많았다. 교과서 정의대로가 아닌 이와 같은 유사 표현을 사용하는 것이 어느 정도 허용될 수 있는지에 대해서는 교사들도 분명하게 판단하기 어려울 것으로 짐작되는 바, 이러한 유사 표현의 사용 문제는 3절에서 다루기로 한다.

다음으로 높은 비율의 응답은 'p는 충분조건, q는 필요조건' 이라고만 표현한 경우인데, 이는 Pirie [9, p. 8]의 분류에 의하면 준 수학적 언어(quasi-mathematical language), 즉 학생들에게는 수학적 의미를 갖지만 교사와 같은 외부 관찰자에게 항상 명확한 수학적 의미를 준다고는 할 수 없는 언어로 볼 수 있다.[1)] 김영옥 [5, p. 274]에 의하면 이와 같은 표현은 고등학생뿐만 아니라 대학생에게서도 많이 관찰되는 것으로, 학생들이 그 의미를

1) 준 수학적 언어의 한 예는 그림과 같이 동위각을 F각이라고 하는 경우이다. 교과서나 교사도 설명을 위해 이와 같은 준 수학적 언어를 사용하는 경우가 있는데, 이 그림의 경우는 SMP(school math project)의 교과서(4–5)에서 발췌한 것이다. 우리나라의 교사용 지도서 [8, p. 95]에서도 다음과 같이 기호 ⇒의 의미를 '어떤 방향으로 무엇인가를 준다' 는 식으로 설명하는 사례를 볼 수 있는데, 이는 일종의 준 수학적 용어라고 할 수 있다.

충분하게 이해하기 보다는 문제의 주어가 p로 주어질 때는 충분조건, q로 주어질 때는 필요조건이라고 기계적으로 암기하는 것과 관련이 있는 것으로 파악된다.

주목할 것은 충분조건과 필요조건이라는 용어의 의미를 반대로 인식하고 있는 7.2%(14명)의 경우이다. 이들 중에는 단순 착각 때문이 아니라 어느 정도 논리 정연한 응답을 하고 있는 상위권 학생들이 많이 포함되어 있었는데, 예를 들면 한 학생은 "$P=\{1,2,3,4\}, Q=\{1,2,3\}$일 때 p($x$는 P의 원소)는 q(x는 Q의 원소)가 되기에 충분하다" 와 같은 설명을 하였다. P가 Q보다 4라는 원소를 하나 더 갖고 있기 때문에 P는 Q가 되기에 충분하다는 것이다. 이 학생의 경우 '충분' 이라는 용어를 '더 많이 가지고 있어서 충분하다' 의 의미로 인식하고 있음을 알 수 있다. 이와 유사하게 "$P=\{1,2\}, Q=\{1,2,3\}$일 때 p(x는 P의 원소)는 q(x는 Q의 원소)가 되기 위해 무엇인가 필요하다" 와 같이 '필요' 라는 용어를 '무엇인가를 필요로 한다' 는 의미로 사용하는 경우도 관찰된다. 이와 같은 현상이 나타난 배경에는 (각주 1)에서 언급한 교사용 지도서의 준 수학적 언어와 같은 설명 방식도 영향을 끼쳤을 수 있다. 즉 "p는 '충분' 하므로 q에게 주었고, q는 '필요' 하므로 받았다고 생각" 하라는, 수학적 언어를 일상 언어로부터 설명한 방식이 오히려 학생들의 개념 이해에 혼란을 가져온 것이다. 이에 대한 보다 자세한 논의는 4절에서 다룰 것이다.

한편, 위의 조사에서는 수학적 기호 $\rightarrow$와 $\Rightarrow$의 구별을 잘 하지 못하는 학생이 56%의 높은 비율로 나타났는데, 이는 이미 이영하와 정은아 [6, p. 45]가 기호 $\rightarrow$와 $\Rightarrow$를 구별하는 것 자체가 혼란의 원인이 될 수 있음을 지적한 바와 부합되는 결과이다. 이 문제에 대해서도 다음 절에서 검토해 보기로 한다.

3 논리학에서 살펴 본 함의관계

현재 우리의 고등학교 교과서에는 "명제 p→q가 참일 때, p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다" 는 정의만 제시되기 때문에, 'p는 q의 충분조건', 'p는 q에 대한 충분조건', 'p는 q가 되기에 충분조건', 'p는 q일 때 충분조건' 등과 같은 표현을 어디까지 허용할 수 있는지 다소 모호하다. 이러한 유사 표현들에 대하여, 논리학 교과서들은 어떻게 언급하고 있는지 살펴보자. Carney & Scheer [1, p. 408]의 '논리학 입문(Fundamental to Logic)' 과 Kleene [4, p. 80]의 '수리 논리학(Mathematical Logic)' 은 명제 'p→q' 를 다음과 같이 표현할 수 있다고 밝히고 있다.

p only if q (p는 q일 때에만 성립한다)

"p⇒q에서 화살표의 방향은 p에서 q이므로 p가 q에게 무엇인가를 준 것이다. 즉 p는 '충분' 하므로 q에게 주었고, q는 '필요' 하므로 받았다고 생각하여 그 개념을 이해할 수 있게 한다."

q if p (만약 p이면 q이다)
q provides that p (q는 p가 성립한다는 것을 의미한다)
q in case p (p의 경우, q이다)
p is sufficient for q (p는 q가 되기에 충분하다)
p is a sufficient condition for q (p는 q를 위한 충분조건이다)
q is necessary for p (q는 p가 되기 위해 필요하다)
q is a necessary condition for p (q는 p를 위한 필요조건이다)
q when p (p일 때 q이다)
p implies q (p는 q를 함의한다)

학생들이 사용한 다양한 유사 표현, 즉 'p는 q의 충분조건', 'p는 q에 대한 충분조건', 'p는 q가 되기에 충분조건', 'p는 q일 때 충분조건' 등과 같은 표현은 논리학 교과서에서 다양하게 사용하는 위와 같은 표현들에 비추어 볼 때 충분히 사용 가능한 표현이라 여겨진다. 오히려 영어의 위와 같은 다양한 표현 방식은 충분조건, 필요조건의 의미를 이해하는 데 더 도움을 줄 수도 있다. 학생들이 응답한 유사 표현이 그러한 표현을 융통성 있게 사용한 교사들로부터 기인한 것일 수도 있는데, 사실 교과서에는 이러한 유사 표현이 잘 나타나지 않는다. 교육과정에는 '충분조건' 과 '필요조건' 만이 도입해야 하는 용어로 규정되어 있기 때문에, 교과서에서는 학생들의 이해를 도울 수 있는 다양한 유사 표현을 제시하는 것도 시도해 볼 여지가 있을 것으로 보인다.

한편, 충분조건과 필요조건의 의미를 학습하기 위해서 위와 같이 일상 언어의 맥락으로부터 도움을 받아야 하는 측면에 반하여, 일상 언어의 문법이 그 학습을 어렵게 만드는 측면이 존재한다. 다음 두 문장을 비교해 보자.

(1) 정삼각형은 이등변삼각형이다.

(2) △ABC가 정삼각형이면 △ABC는 이등변삼각형이다.

명제 '$p \to q$' 를 'p이면 q이다' 로 읽을 때, 학생들은 p와 q가 명제나 조건, 즉 문장이어야 함을 종종 잊어버리기 때문에, 명제 (1)이 (2)와 같은 의미라는 것을 혼란스러워 할 때가 많다. 영어 표현에서도 이는 크게 다르지 않은데, 문장 'p implies q' 는 주어와 목적어가 모두 명사로 여겨지기 때문에 p와 q가 문장이라는 사실, 즉 조건문은 문장을 접속한다 [4, p. 15]는 사실을 학생들이 혼란스럽게 여기는 것이 자연스럽다. 게다가, 사실상 정확하지는 않은 표현이기는 하지만, '정삼각형은 이등변삼각형이 되기 위한 무슨 조건인가?' 라거나 '2의 배수는 4의 배수가 되기 위한 무슨 조건인가?' 등과 같은 표현을 교사가 사용한다면 이러한 혼란은 더욱 가중될 것이다.

논리학이나 수학에서 다루는 '함의(implication)'가 일상 언어에서의 의미와 일치하지 않는다는 점은 관련 학습에서 나타나는 근본적인 어려움 중의 하나이다. 아리스토텔레스 이후의 고전 논리학에서부터 이러한 어려움은 이미 논의된 바 있을 정도인데, 기원전 2～3세기 경의 인물로 알려진 섹스투스 엠피리쿠스(Sextus Empiricus)의 '피론주의(Pyrrhonism) 개요'에 등장하는 다음 인용문이 그러한 예이다.

> '제안'에 의거해 판단하는 사람들은 후건[2)]이 사실상 전건에 포함되어 있을 경우에 조건문이 참이라고 선언한다. 그들에 따르면 '낮이면 낮이다'와 같은 모든 반복적 조건문이 개연적으로 거짓일 것이다. 왜냐하면 한 사물이 자기 자신 안에 포함되는 것은 불가능하기 때문이다. [2, II. 110]

여기에서 '후건이 전건에 포함된다'는 말의 의미를 이해하는 것이 우선 필요한데, 이를 '정삼각형은 이등변삼각형'이라는 명제를 예로 하여 설명해 보자. △ABC가 정삼각형이라는 것은 세 변 AB, BC, CA의 길이가 모두 같고 세 각 A, B, C의 크기가 모두 같음을 뜻한다. 이에 비하여 △ABC가 이등변삼각형이라는 것은 세 변 AB, BC, CA 중의 두 변만 길이가 같고, 세 각 A, B, C 중 두 각의 크기만 같을 것을 요구한다. 따라서 이등변삼각형의 성질은 정삼각형의 성질의 일부만을 가지고 있는 것이다. 즉, 전건이 가져야 하는 성질 중 일부만 후건이 가지고 있으면('후건이 전건에 포함되면') 조건문 'p이면 q이다'는 참이라고 할 수 있다. 그리고 이와 같이 조건문의 참, 거짓을 판단하는 관점에서 보면 Russell과 Whitehead가 'p이면 q이다'를 기호 'p⊃q'로 표현한 것도 이해할 수 있다.

사용자	부정	논리합	논리곱	함의	동치
Russell	$\sim p$	$p \vee q$	$p \cdot q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
Hilbert	$\neg p$	$p \vee q$	$p \& q$	$p \rightarrow q$	$p \sim q$
Kemeny	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$

Table 2. Various signs to express logical connectives; 논리 연산을 나타내는 다양한 기호

고대의 논리학에서 집합의 포함관계는 현재와 같이 논리적으로 개념화되지 않았고, 이는 '낮이면 낮이다'와 같은 동어반복을 '후건이 전건에 포함되는' 것으로 간주하지 않았다는 것은 위의 인용문으로부터 드러난다.

사실 형식논리학에서 정의되는 논리 연산이 직관적인 일상 언어와는 어느 정도 차이를 가질 수밖에 없다는 것이 여기서도 드러나는데, 함의 'p→q'는 현대의 학생들이 그 개념을 학습할 때에도 직관적으로는 잘 납득되지 않는 대표적인 형식논리의 개념일 것이다.

2) '만일 ～이면 ～이다(if～, then～)'에서 '만일'과 '～이면' 사이에 놓여 있는 명제를 전건(前件; antecedent)이라 부르고, '～이면' 다음에 나타나는 명제를 후건(後件; consequent)이라 부른다.

게다가 우리의 교과서에서 기호 → 와 ⇒ 를 구별해서 사용하는 상황은 학습의 어려움을 더욱 가중시키는데, 이영하와 정은아 [6, p. 45] 는 수학에서 사용하는 모든 기호가 기본적으로 참임을 가정하므로 이 두 기호의 구별이 불필요함을 이미 지적한 바 있다. 많은 경우에, 기술되어 있는 명제 'p' 를 독자가 '읽는다는' 것은 사실상 필자가 '명제 p가 참임을 주장' 하고 있다고 이해해야 하는 상황이 될 수 있다. 이렇게 보면, 즉 명제 '$p \to q$' 가 기술되어 있다는 것은 필자가 '명제 $p \to q$가 참임을 주장' 하고 있는 상황으로 이해될 수 있다면, 명제 '$p \Rightarrow q$' 가 기술되어 있다는 것은 필자가 '명제 $p \to q$가 참이라는 것이 참임을 주장' 하고 있는 상황으로 이해될 수도 있는 것이다. 학생들에게 이와 같은 메타적인 논리적 이해의 문제가 혼란을 가져올 수 있다는 점은 충분히 짐작 가능한 일이며, II장에서 언급한 바와 같이 학생들의 과반수가 이를 혼동했다는 조사 결과는 이 문제를 실증한다.

앞서 살펴 본 논리학 교과서들의 경우에는, 이 두 기호를 특별히 구별하여 사용하고 있지 않음을 확인할 수 있다. 우리의 수학 교과서에서 기호 → 와 ⇒ 를 구별하여 도입하는 교육적 의미에 대해 근본적인 검토가 필요한 것으로 보인다.

4 일상 언어와의 혼란

논리학은 일상 언어의 모호함을 배제하고 의미의 엄밀함을 최대한으로 확보하기 위하여 기호를 사용한다. Eves[3] 는 다음과 같이 말한다.

> 통상적인 언어만을 사용해서 논리학에 대한 현대적인 고찰을 논의하는 것은 거의 가능성이 없는 작업이 될 수 있다. 이 주제를 다루기 위해서는 엄밀하고 과학적인 취급이 요구되기 때문에, 기호적인 언어가 절대적으로 필요하다. ... 논리학에서 명제와 집합 및 그 이외의 대상 사이의 여러 가지 관계는 공식으로 표현된다. 이런 공식들은 통상적인 언어에서는 매우 일상적인 모호한 의미로부터 해방된다. ... 통상적인 언어에 대한 기호적인 언어의 우월성은 대단히 크다.

기호논리학에서는 진리값이 주어져 있는 단순명제를 p, q, r, ... 과 같은 문자를 사용하여 나타내고, 단순명제를 연결하여 합성명제를 구성하는 다음 다섯 가지의 연결사 (connectives) 를 정의한다.

∼(부정, negation), ∧(논리곱, conjunction), ∨(논리합, disjunction), →(함의, implication), ↔(동치, equivalence).

그리고 현재 우리의 고등학교 교육과정에서는 이들 중 ∼와 → 를 도입하고 있으며 '$p \to q$ 가 참' 이라는 의미로 $p \Rightarrow q$를, '$p \leftrightarrow q$가 참' 이라는 의미로 $p \Leftrightarrow q$를 도입하고 있다.

논리곱과 논리합을 나타내는 기호 ∧ 와 ∨ 는, 5차 교육과정 이후의 교과서에서는 도입되지 않지만 수학 교과서에서 사용되는 '그리고' 와 '또는' 은 사실상 ∧ 와 ∨ 의 의미이다. 문제는

기호 ∧와 ∨ 대신에 사용되는 '그리고' 와 '또는' 이 일상 언어에서 사용되는 것과는 약간 다른 의미를 가지고 있다는 것이다.

예를 들면 일상 언어에서 "나는 오늘 점심식사로 육개장 또는 비빔밥을 먹을 것이다" 와 같은 문장은 보통 육개장과 비빔밥 둘 다를 먹는 상황을 의미하지는 않는다. 이와 같은 말을 하고 둘 다를 먹는 상황도 있을 수 없는 일은 아니겠지만, 그런 경우에는 보통 "육개장과 비빔밥 둘 다 먹을 것이다" 라고 말을 하지 "육개장 또는 비빔밥을 먹을 것이다" 와 같이 말하지는 않는다. 이와 같은 의미에서의 'A 또는 B' 는, A와 B 둘 다 가능한 경우를 배제하는 '배타적인 또는 (exclusive disjunction, 라틴어로 aut)' 의 의미이다.

이에 비하여 기호논리학의 p∨q에서 ∨의 의미는 p와 q 둘 다 성립하는 경우를 포함하는 '포괄적인 또는(inclusive disjunction, 라틴어로 vel[3])' 의 의미이다. ∨라는 기호를 쓰지 않는 수학 교과서에서 '또는' 이라는 말이 사용된다면 이것을 이와 같은 'vel' 의 의미로 이해해야 한다. 예를 들어 "$x > 0$ 또는 $y > 0$" 과 같은 문장이 그러하다.[4] 이처럼 수학 교과서에서 '∨' 와 같은 형식화된 언어가 아닌 일상 언어 '또는' 을 사용하는 것이 개념 학습에 혼란을 일으킬 여지가 없는지는 면밀히 검토할 필요가 있다.

함의(→)의 경우는 일상 언어와의 부합성이 '또는' 보다 더 낮은 편이다. 예를 들어 "철수의 수학 성적이 높다면 그는 수학 공부를 했을 것이다" 와 같은 문장을 생각해 보자. "철수의 수학 성적이 높다" 를 가정 p, "그는 수학 공부를 했을 것이다" 를 결론 q라고 하면, p가 참이고 q가 참일 때 'p이면 q이다' 는 당연히 참이다. 만약 철수의 수학 성적이 높았는데도 그가 수학 공부를 하지 않았었다면, 다시 말해 p가 참인데 q가 거짓이면 'p이면 q이다' 는 거짓이라고 말하는 것이 자연스럽다.

그런데 가정 p가 거짓일 때에는 'p이면 q이다' 의 참, 거짓을 말하는 것이 그렇게 자연스럽지 않다. 철수의 수학 성적이 낮은 경우라면, 그는 수학 공부를 했을 수도 있고 안 했을 수도 있다. 일상 언어에서는 철수의 수학 성적이 낮고 그가 수학 공부를 하지 않은 경우 "철수의 수학 성적이 높다면 그는 수학 공부를 했을 것이다" 와 같은 문장을 참이라고 하지는 않을 것이며, 철수의 수학 성적이 낮고 그가 수학 공부를 한 경우라면 "철수의 수학 성적이 높다면 그는 수학 공부를 했을 것이다" 와 같은 문장을 거짓이라고 말하지는 않겠지만 또 굳이 그것을 참이라고 말할 필요도 없을 것이다.

이와 같이 가정 p가 거짓인 경우에 함의 'p이면 q이다' 를 생각하는 것은 매우 부자연스러운데도 이와 같은 형태의 명제를 생각하는 것은 가정 p가 참인지 거짓인지 모르는 경우에

3) 논리합 기호인 ∨는 'vel' 의 'v' 에서 유래하였다.

4) "$x < 0$ 또는 $x > 1$" 과 같은 문장에서 사용된 '또는' 은 '배타적인 또는' 의 의미라고 생각할 수도 있다. 그러나 이 경우에는 "$x < 0$이고 $x > 1$" 인 상황을 이 문장이 포함한다 하더라도 어차피 불가능한 경우이기 때문에 의미 전달상으로는 크게 상관이 없다. 이런 점을 모두 고려하여, 본고에서는 "수학 교과서의 '또는' 은 '포괄적인 또는' 의 의미이다" 라고 서술하였다.

유용하다. 예를 들어 자연수가 적힌 종이쪽지가 주머니 속에 있는데 그 숫자를 모른다고 하면, “만약 그 수 n이 홀수이면 $x^n + y^n$은 인수분해 된다” 라고 말할 수 있다. 이 명제는 n이 홀수가 아닌 경우에는 $x^n + y^n$이 인수분해 되는지의 여부에 대하여 아무 것도 말하지 않는다. 그렇다면 p가 거짓인 경우에 p와 q의 합성명제 p→q는 그 진리값이 어떻게 정의되는 것이 자연스러운가? p가 참이고 q가 참인 경우, 그리고 p가 참이고 q가 거짓인 경우는 p→q의 진리값을 각각 참과 거짓으로 정의하는 것이 일상 언어와도 잘 들어맞는다. 그런데 p가 거짓이고 q가 참인 경우, 그리고 p가 거짓이고 q가 거짓인 경우 p→q의 진리값을 모두 거짓이라고 정의한다면 Table 3에서 볼 수 있듯이 이는 논리곱 p∧q와 같아진다. 또 p와 q가 모두 거짓일 때 p→q의 진리값을 거짓이라 하면 그 대우명제 ∼q→ ∼p도 거짓이어야 하는데 이는 모순이다. 따라서 p와 q가 모두 거짓일 때 p→q는 참이라고 하는 것이 자연스러운데, 이 때 p가 거짓이고 q가 참인 경우 p→q를 거짓이라고 정의하면 다시 Table 3에서 보듯이 p→q의 진리값이 동치 p↔q와 같아진다. 이러한 모든 상황을 종합하면 p가 거짓인 경우에는 q의 진리값에 관계없이 p→q의 진리값을 참으로 정의하는 것이 자연스러운 것이다.

p	q	p→q	p∧q	p↔q
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	T

Table 3. Truth value of compound statements; 합성명제의 진리값

형식 논리에서의 함의는 이와 같이 논리적 정합성에 근거하여 ‘정의’ 된 것이기 때문에 일상 언어에서 사용하는 “... 이면 ... 이다” 의 용법과 정확하게 부합하지 않는다. 예를 들어 가정 p를 “사람은 죽지 않는다” 라고 하고 결론 q를 “$1+1=3$” 이라고 하면 명제 p→q는 참이다. 마 찬가지로 결론 q를 “$1+1=2$” 라고 해도 명제 p→q는 참이다. 가정 p가 거짓인 경우에는 명제 p→q의 진리값이 결론 q와 관계가 전혀 없기 때문에 이 상황은 어떻게 보면 역설적이라고까지 할 수 있다. Poincaré는 시험을 치르는 학생이 잘못된 방정식에서 시작해 참된 결론을 이끌어내는 경우를 인용하며 이와 같은 함의를 조롱하기까지 했다 [4, p. 188]. 또 Lewis 는 이런 역설이 발생하는 것을 막기 위해, 결론이 가정으로부터 유도될 수 있는 상황만으로 한정하여 엄밀한 함의(strict implication)라고 부르는 개념을 도입하기도 했다 [3, p. 246]. 일상 언어에서 사용하는 “... 이면 ... 이다” 형식의 문장에는 다른 용법도 있다. 첫번째는 가정 p가 불가능하다는 사실을 강조하기 위한 경우로, 예를 들면 “철수가 1등을 한다면 해가 서쪽에서 뜰 것이다” 와 같은 문장이 그러하다. 이 문장은 ‘p이면 q이다’ 의 형식을 갖고 있지만 단지 철수가 1등을 하지 못한다는 사실을 강조할 뿐, 그 참과 거짓은 판단할 수 없다. 두 번째는 역사적 사실에 반하는 가정법으로, 예를 들면 “닉슨이 1972년에 낙선했더라면 그는 워터게이트의

곤욕을 치르지 않았을 것이다" 와 같은 문장이 그러하다. 이 문장은 역사적 사실에 비추어 본다면 거짓인 것으로 생각하는 것이 자연스럽지만, 그것을 함의 $p \to q$의 구조에 비추어 판단하려면 "닉슨이 1972년 낙선했다(p)" 는 참, "그는 워터게이트의 곤욕을 치르지 않았다(q)" 는 거짓이어야 한다. 따라서 이 문장의 경우에도 참과 거짓을 판단하는 것은 자연스럽지 않다. 이러한 문장들과 같이 현실적으로 가능성이 없는 상황에 대한 가정법적인 표현을 반사실적 조건문(contrary-to-fact conditional)이라고 부른다 [1, p. 360].

가정이 거짓이라면 어떤 종류의 결론도 함의 가능한 상황이라든지, 불가능한 상황을 가정하거나 강조하는 조건문과 같은 예들은, 함의 $p \to q$가 일상 언어의 "... 이면 ... 이다" 와는 꽤 다른 논리 형식임을 잘 보여 준다. 그리고 이는 학생들이 함의 $p \to q$의 개념을 학습할 때 일상 언어가 혼란을 줄 수 있음을 시사한다. 이 혼란은 특히 형식화된 기호 $p \to q$의 의미로 'p이면 q이다' 라는 일상 언어와 같은 표현을 사용할 때 더 가중될 수 있다. 기호 $\vee$의 의미로 '또는' 이라는 일상 언어의 용어를, 그리고 그 용어만을, 사용하는 상황도 마찬가지이다. 필요조건, 충분조건이라는 용어 또한 수학적으로 형식화된 용어이고, 이는 일상생활에서 사용하는 '필요', '충분' 이라는 용어와는 그 의미가 잘 들어맞지 않는다. 앞장에서도 살펴보았듯이, '△ABC가 정삼각형' 이라는 것이 '△ABC가 이등변삼각형' 이기 위한 무슨 조건인지 생각할 때, '△ABC가 정삼각형이기 위해 가져야 하는 성질들' 과 '△ABC가 이등변삼각형이기 위해 가져야 하는 성질들' 의 포함관계를 생각해 보면 '정삼각형들의 집합' 과 '이등변삼각형들의 집합' 사이에 성립하는 포함관계와 서로 반대의 관계라는 점이 학생들에게 혼란을 제공하는 원인이 될 수 있다. 그리고 그 혼란은, '필요' 와 '충분' 이라는 용어의 일상적인 사용에서 갖는 의미와 관련된다.

예를 들면 일상 언어에서 '충분' 은 다음과 같이 쓰인다. "이 음식은 10명이 먹기에 충분하다." 이 문장은 음식이 충분히 많아서 10명이 먹고 난 뒤에도 남는다, 즉 10명이 먹는 음식보다 '많다' 는 의미가 내포되어 있다. 이와 같은 일상적인 의미가 '충분조건' 이라는 형식화된 수학 용어와 관련하여, p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 p를 만족하는 대상이 q를 만족하는 대상보다 더 많아야 할 것이라는 오개념을 갖게 되는 것이다.

'필요' 라는 단어의 일상적인 쓰임에도, 위와 같은 '대상 집합' 과 '성질 집합' 사이의 혼동을 일으키게 하는 경우가 많이 있다. 그 밖에도, "금연은 건강을 위해 필요하다" 와 같은 문장에서 사용되는 '필요' 의 의미도 혼동의 원인이 될 수 있는데, 이 경우 '필요' 의 의미는 수학에서 말하는 '필연성' 의 의미가 아니라 (건강한 사람 중에도 담배를 피우는 사람이 있다는 점 등을 고려한다면) '권고' 또는 '확률적인 요구' 의 의미를 담고 있기 때문이다. 이와 같은 '필요' 에 대한 일상적인 의미는 '필요조건' 이라는 수학적 개념과 관련한 오개념을 가지게 하는 원인이 될 수 있다.

기호논리학의 학습 상황에서 학생들이 갖는 어려움은 이러한 일상 언어와의 혼란에 상당 부분 기인한다. 특히, 논리합이나 함의는 일상 언어의 '또는' 이나 '... 이면 ... 이다' 와 정확하게 부합되는 의미가 아니라는 것을 학생들이 납득하는 것은 중요하다. 이 문제는 $\vee$ 이나 $\rightarrow$ 와 같은 형식화된 기호를 사용하지 않고 일상 언어의 '또는' 이나 '... 이면 ... 이다' 만으로 진술된 교과서를 읽을 때 더 커질 수도 있다. 비슷한 상황을 필요조건이나 충분조건과 같은 용어를 학습할 때에도 고려해 볼 수 있다. 새롭게 도입되는 용어를 설명하기 위해 이미 알고 있는 일상 언어로부터 출발하는 것이 자연스러운 수학화를 이끌지 못하고 오히려 일상 언어가 인식론적 단절을 방해하는 장애로 기능할 수 있다는 점을 교사는 염두에 둘 필요가 있다.

5 물화의 어려움

Sfard[10]는 담론적인 대상이 구성되는 과정을 설명하기 위해 대상(object)을 구체적인 대상과 추상적인 대상으로 나누는 대신, 일차 대상(primary object, p-object)과 담론적 대상(discursive object, d-object)으로 나누었다.

> 일차 대상(p-object)은 아직 의미화 되지 않은 실세계의 지각되는(tangible) 존재로, 의사소통의 대상이 되지 않은 상태이다. 담론적 대상(d-object)이 구성되는 과정은 다음과 같이 재귀적인 것으로 설명할 수 있을 것이다. 어떤 일차 대상들의 집합이 '의미화(signifying)' 됨으로써 담론적 대상이 나타날 수도 있고, 단일한 일차 대상으로부터 생성된 담론적 대상들의 어떤 집합이 의미화 되어서 다른 담론적 대상이 나타날 수도 있다. 이 의미화는 일차 대상 또는 담론적 대상의 어떤 집합을 의사소통을 위해 다시 하나의 일차 대상으로 대치하는 것이다. [10, p. 169]

Sfard에 따르면, 담론적 대상은 다시 단순 d-대상(simple discursive object)과 복합 d-대상(compound discursive object)으로 나누어진다. 단순 d-대상은 특정한 일차 대상에 적당한 이름을 부여하는 (명사를 할당하거나 명사의 역할을 하는 기호를 할당하는) 과정에서 만들어진다. 즉, 이 과정에서 만들어지는 것은 <명사 또는 대명사, 특정 일차 대상> 이라는 쌍이 다. 여기서 명사는 짝을 이루는 일차 대상에 대해 의사소통하기 위해 사용되는 시니피앙이며, 짝이 되는 일차 대상은 그 시니피앙이 구현하는 실체로 간주될 수 있다.

복합 d-대상은 명사가 일차 대상 또는 담론적 대상에 다음과 같은 방식으로 관련됨으로써 만들어진다 [10, p. 170].

(1) 동일화(saming). 지금까지는 어떤 식으로든 '같은' 것으로 간주되지 않았지만 어떤 닫힌 내러티브 안에서는 상호 교환될 수 있는 그런 대상들에게 하나의 이름(시니피앙)을 부여하는 것.

(2) 집약화(encapsulating). 어떤 대상들의 집합에 하나의 시니피앙을 부여하고, 그 집합의 모든 구성원이 함께 가지고 있는 성질을 말할 때 이 시니피앙을 단수형으로 사용하는 것.

(3) 물화(reifying). 어떤 대상들의 과정에 대한 내러티브가 대상들 사이의 관계에 대한 변함없는 이야기로 말해질 수 있게 되어서, 즉 과정에 대한 이야기가 대상에 대한 이야기로 대치될 수 있게 되어서, 그것을 명사나 대명사로 나타내는 것.

예를 들면, $1/2, 5/4, 2/3$ 등과 같이 a/b(a, b는 정수) 꼴로 주어진 모든 기호(대상)를 '분수'라는 이름으로 부르는 것은 동일화라고 할 수 있다. 그리고 '어떤 $2/3$들' 보다도 '$3/4$들' 이 크다는 생각을 표현할 때 '$3/4$들' 을 단수형인 $3/4$으로 일컫는다면 그것은 집약화이다.

또, "내가 전체를 7개로 나누고 그 중 5개를 가졌다" 라고 표현하는 것이 "내가 전체의 $5/7$를 가졌다" 라는 표현으로 바뀌게 되는 경우, 이 때 도입되는 $5/7$라는 시니피앙이 물화에 의한 것이라고 말할 수 있다.

어떤 대상이 구체적인 것인가 추상적인 것인가의 문제, 그리고 그것이 인식론적 주체에 의해서 어떻게 형성되는가의 문제는 전통적인 인식론에서 오랫동안 다루어져 왔던 문제이지만, Sfard는 이 대상들이 '담론적 과정(discursive process)' 내에서 어떻게 간주되어야 하는가를 논의하였다. 즉, 지각(perception)에 의해 얻게 되는 일차 대상(p-object)과, 동일화와 집약화에 의해 얻게 되는 담론적 대상(d-object)이 구체적인 대상이고, 물화에 의해 얻게 되는 담론적 대상이 추상적인 대상인 것이다. 이를 정리하면 Table 4와 같다.

전통적 구분	구체적인 대상		추상적인 대상
Sfard의 구분	p-object	구체적인 d-object	추상적인 d-object
발생 기제	지각	동일화, 집약화	물화

Table 4. Genetic mechanism of objects; 대상들과 그 발생 기제

함의와 관련한 형식 논리의 학습 과정에서 학생들이 구성해야 하는 담론적 대상을 이러한 관점에서 생각해 볼 수 있다. 명제 p→q의 참, 거짓을 판단하는 규칙을 이해하기 위해 학생들은 계속해서 동일화와 집약화의 과정을 거쳐야 조건 또는 명제인 p, q, 명제 p→q의 형태를 담론적 대상으로 파악할 수 있고, "명제 p→q가 참" 이라는 의미가 물화된 연후에 "p는 q 의 충분조건" 또는 "q는 p의 필요조건" 과 같은 표현을 할 수 있게 되는 것이다.

II장의 조사에서는 명제 p→q와 그 역의 참, 거짓을 잘 판단하면서도 '충분조건', '필요조건' 이라는 형식화된 용어를 잘 사용하지 못하는 학생들도 다수 관찰되었는데, 이 학생들의 경우 명제 p→q의 참, 거짓을 판단하는 과정이 충분히 물화되지 못한 것으로 파악할 수 있다.

앞서 논의한, 필요조건, 충분조건 개념의 학습에서 어려움을 야기하는 많은 문제들과 함께, 학생들이 추상적인 담론적 대상을 어떻게 물화하는가에 대한 연구도 이러한 시각에서 이루어질 필요가 있는 것으로 보인다.

6 요약 및 결론

본고에서는 학생들이 필요조건, 충분조건이라는 용어를 어떻게 이해하며 사용하고 있는지 살펴보았다. 많은 학생들이 이 개념을 기계적으로 암기하고 있었으며, 필요조건과 충분조건의 의미를 반대로 말하는 몇몇 학생들은 오히려 기계적으로 암기한 결과가 아니라 나름대로의 이유를 가지고 있었다. 그러한 개념상의 혼란은 논리학의 역사, 일상 언어와 형식 논리의 괴리, 담론적 대상의 인식 과정에서 일어나는 물화 등의 관점에서 그 원인이 분석되고 탐구될 만한 필요성을 가지고 있는 것으로 보인다.

논리학의 역사에서도 함의관계는 일상 언어와 잘 일치하지 않는다는 점에 기인한 혼란이 꾸준히 관찰되는 만큼, 이를 학습하는 학생들의 어려움도 같은 관점에서 이해될 수 있다. 특히 완전히 형식화된 논리학에서 함의 ‘$p \to q$’ 의 의미는 일상 언어에서 ‘p이면 q이다’ 라는 문장의 의미와 정확하게 부합되지 않는데 그것은 명제를 문장에 진리값을 부여하는 함수로 간주하면서 함의를 정의하게 된 형식 논리학의 발달 과정을 살펴보면 납득할 수 있다.

그러나 학생들에게 형식 논리를 지도하면서 함의 ‘$p \to q$’ 나 논리합 ‘$p \vee q$’ 를 일상 언어인 ‘p이면 q이다’ 와 ‘p 또는 q이다’ 로 표현하게 될 때에는 일상 언어가 형식적 용어의 도입을 쉽게 만드는 것이 아니라 오히려 형식적 용어의 학습에 일상 언어가 혼란스러운 개입을 하게 될 가능성이 생긴다는 점을 유의해야 한다.

충분조건과 필요조건이라는 용어 또한, 그 의미는 ‘충분’ 과 ‘필요’ 라는 일상적인 언어의 용법에 비추어 볼 때 혼란을 일으킬 여지가 충분히 있다. 교과서에서는 충분조건과 필요조건이라는 용어를 도입하기 위해 일상 언어의 ‘충분’ 과 ‘필요’ 라는 단어로부터 그 의미를 설명하려는 시도가 많이 있는데, 그런 설명 방식으로 인해 오히려 학생들의 올바른 개념 형성에 방해가 된 사례도 발견되었다.

한편으로, 현재 고등학교 교육과정에서 충분조건과 필요조건이라는 용어를 굳이 학습해야 하는가도 검토될 필요가 있다. 수학 교과의 다른 내용과 관련지어 생각하더라도, 현재 학생들에게 필요한 것은 명제 ‘$p \to q$’ 의 참과 거짓을 정확하게 판단할 수 있는 능력인 것이며, 명제 $p \to q$가 참이 될 경우에 p를 ‘충분조건’ 이라고 부르고 q를 ‘필요조건’ 이라고 부른다는 사실은 그 부차적인 내용일 뿐이다. 이와 관련하여 교과서에 등장하는 문제들 또한, “p는 q이기 위한 무슨 조건인가?” 와 같은 형식이 주를 이루는데, 이러한 문제들은 사실, “$p \to q$는 참인가? 또 그 역은 참인가?” 를 질문함으로써 평가하고자 하는 내용을 충분히 확인할 수 있는 것들이라고 할 수 있다.

충분조건, 필요조건이라는 용어의 사용이 필수적인 것인가의 문제가 현재 교육과정에서 검토될 필요가 있다는 점과는 또 반대로, 논리합의 기호 $\vee$를 도입하지 않는 배경과 그 교육상의 효과에 대해서도 반성해 볼 필요가 있다. 현재 우리 교육과정에서는 학습 부담 경감을 이유로 기호 $\vee$를 도입하지 않지만, 수학 교과서에서는 일상 언어 ‘또는’ 을 사실상 $\vee$의 의미로

사용하고 있다는 점은 주목할 만하다. 일상 언어와 형식화되고 추상적인 언어 사이의 괴리는 인식 작용에서도 여러 단계의 추상화, 대상화, 물화 등의 과정을 통해 극복되는 것이며 그 과정은 그렇게 매끄럽게 이루어지지 않는다. 인식 주체에게는 구체적인 대상과 추상적인 대상이 서로 다르고 일차 대상과 담론적 대상이 서로 다르다. 그리고 다양한 대상의 공통성을 파악하여 동일화를 이루어내고, 복수의 대상을 단수의 대상처럼 인식할 수 있게 되어 집약화를 이루어내며, 과정에 대한 내러티브를 대상화, 물화하는 것은 학습자에게는 일종의 비약적인 과정이며 인식론적인 단절의 과정이다. 그 과정의 곳곳에 있는 수준의 차이와 학습의 어려움을 이해하는 것은 수학 학습을 위한 인식론에서 가장 중요한 문제 중의 하나일 것이다.

References

1. J. D. Carney, R. K.Scheer , *Fundamental to Logic*, New York: Macmillan, 1980. 「논리학 입문」, 전영삼 역, 간디서원.
2. Sextus Empricus, *Outlines of Pyrrhonism*, Oxford University Press, 1996.
3. H. Eves, *The Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, 1997. 「수학의 기초와 기본개념」, 허민, 오혜영 역, 경문사.
4. S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, 1952. 「수리논리학」, 박한식 편역, 교학연구사.
5. Kim Young Ok, First-year Undergraduate Students' Understanding about Statements, *in School Mathematics* 11(2) (2009), 261–280. 김영옥, 대학 신입생들의 명제에 대한 이해, 학교수학 11(2) (2009), 대한수학교육학회.
6. Lee Young Ha, Jung Eun Ah, A Study of Middle and High School Set and Proposition Unit Analysis And Alternative, *in Research of Curriculum and Instruction* 7(2), 23–63, 2003. 이영하, 정은아, 중등학교 집합과 명제단원 분석 및 개선방안 연구, 교과교육학연구 7(2) (2003), 이화여자대학교 교과교육연구소.
7. Lew Hee-Chan et al, *Highschool Mathematics*, Mirae N Co., 2009. 유희찬 외 8인, 고등학교 수학, (주) 미래엔, 2009.
8. Lew Hee-Chan et al, *Highschool Mathematics Instruction Guide*, Mirae N Co., 2009. 유희찬 외 8인, 고등학교 수학 교사용 지도서, (주) 미래엔, 2009.
9. S. Pirie, *Crossing the gulf between thought and symbol: language as (slippery) steppingstones*, In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi & A. Sierpinska(Eds.), Language and communication in the mathematics classroom, 7–29. Reston, VA: NCTM, 1998. 10.
10. A. Sfard, *Thinking as Communicating*, Cambridge University Press, 2008.