韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.3.301
제 29집 제 3호, 2015. 9. 301-311

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 29, No. 3, Sep. 2015. 301-311

수학으로 이야기 만들기와 사례

이 규 봉 (배재대학교)

스토리텔링 수학이 수학의 내용을 이야기로 꾸며 수학을 교육하는데 그 목적이 있다면, 본 논문은 수학으로 이야기를 만들 수 있는 여러 사례를 제시하여 수학에 대해 알고 있는 자(또는 교사)가 자신의 관심 분야에 대한 주장을 펼칠 때 수학의 결과를 이용할 수 있다는 것을 보여준다. 따라서 본 논문은 수학을 공부하는 학생은 물론 일반인에게도 수학의 유용성을 알려줄 수 있어 수학의 대중화에 도움을 줄 수 있다.

I. 서론

교육과학기술부는 2011년 우리나라 수학교육과정의 목표를 다음과 같이 설정하였다. “생활 주변이나 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 기본적인 기능과 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력과, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러 생활 주변이나 사회 및 자연의 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다.”(교육과학기술부, 2011, 3쪽). 또한 2012년에 기존 수학교육의 문제점으로 다양하고 실질적인 수학교육에 대한 관심과 투자가 부족하여 체험 탐구 실생활 연계 등 다채로운 수학교육을 위한 투자가 미흡했음을 지적하며 수학교육 선진화 방안으로 쉽게 이해하고 재미있게 배우는 수학을 강조하고 이에 대한 실천 방안 중 하나로 요약된 설명과 공식 그리고 문제 위주로 구성되어 있는 기존 교과서에 수학적 의미와 역사적 맥락 및 실생활 사례 등을 스토리텔링 방식을 통해 유기적으로 연계하여 수학에 대한 이해와 흥미를 높여야 한다고 하였다.

이렇게 된 배경에는 “국제학업성취도비교연구(Trend in International Mathematics and Science Study)에서 우리나라 학생들의 수학에 대한 학업성취도는 상위수준을 차지하지만 수학이 자신 있다거나 수학을 좋아한다는 정의적 측면에서의 성취는 하위 수준에 머물고 있고, 학업성취도 국제비교연구(Programme for International Student Assessment)에서 재생하는 능력을 요구하는 문항에 대해서는 매우 높은 성취 수준을 보이지만 반성적 사고나 연결적 사고를 요구하는 문항에 대해서는 상대적으로 낮은 수준에 보이는 것으로 나타났다.”(권오남 외, 2013, 249쪽에서 재인용)고 한 것처럼, 그동안의 수학교육이 공식을 암기하고 문제를 통한 반복적인 훈련으로 이루어져 학생들의 학업성취도는 비록 높지만 수학에 대한 학습 동기는 낮다는 현실에서 비롯되었다고 할 수 있다(김유정 외, 2013, 180쪽). 즉 기존 교과서는 공식과 문제 중심으로 구성되어 있어 학습내용의 이해가 부족해 수학에 대한 관심과 학습동기를 유발하는데 한계가 있어 이야기로 내용을 전달하는 ‘스토리텔링’이라는 새로운 움직임이 반영된 교과서를 요구하고 있다는 것이다.

스토리텔링은 ‘스토리(story)’와 ‘텔링(telling)’의 합성어로 이야기를 만들어서 이를 남에게 전달하는 행위를 의미한다. 즉 스토리텔링은 이야기를 말하는 사람과 듣는 사람이 함께 똑같은 상황을 공유하고 소통한다는 의미를 지니고 있다.

---

* 접수일(2015년 5월 5일), 심사(수정)일(1차: 2015년 6월 18일, 2차: 2015년 6월 30일), 게재확정일(2015년 7월 1일)
* ZDM 분류 : F90
* MSC 2000 분류 : 97
* 주제어 : 수학의 대중화, 수학으로 이야기 만들기, 스토리텔링, 스토리메이킹

스토리텔링은 학생들에게 수학적으로 경험적으로 의미 있는 실세계를 반영하는 이야기를 바탕으로 수학 과제를 도입하여 수학개념을 인식하고 과제 탐구에 몰입하는 상황을 제공할 수 있고, 학생들이 어렵게 느끼는 개념을 기억에 남는 방식으로 소개하고 설명할 수 있다(권오남 외, 2013, 251쪽). 미국에서 1994년 무렵부터 국제학업성취도 평가 결과를 개선하기 위한 노력의 일환으로 스토리텔링이 제기 되었는데, 이는 스토리텔링이 수학의 성취도가 낮게 보이는 학생들의 수학에 대한 불안과 두려움을 해소할 수 있도록 돕고 수학 지식을 전달하는 방법으로 이야기를 사용하여 가르치는 것이 가능하다는 인식에 기인한 것이다(이재학 외, 2013, 303쪽에서 재인용).

이건(Kieran Egan)은 스토리의 목적을 첫째, 기억 가능한 형태로 정보를 전달해야 하며, 둘째, 전달된 정보에 대해 듣는 자의 감정을 불러일으켜야 한다고 했고, 헤븐(Haven)은 교육적 수단으로써 열 가지의 스토리텔링의 좋은 점을 말했다(리나 자스키스 외, 2013, 7쪽과 46쪽).

그러나 이야기를 통해서 수학을 가르치는 것은 언뜻 매우 매력적으로 보이기는 하지만 그 방대한 수학을 모두 다 이야기로 이해시킬 수는 없다. 단지 처음 수학을 대하는 초등이나 중등에서 수학의 특정 분야에 한해 도입하여 효과를 발휘할 수 있다. 스토리텔링 수학의 기본은 이야기를 통해 수학을 이해하게 만드는 것이니 수학적 지식은 물론 '작가적 자질'도 필요하다. 특히 '동화'를 쓸 수 있는 자질이 있으면 더욱 좋다.

본 논문에서 알리고 싶은 것은 이야기를 통해 수학을 가르치는 스토리텔링 수학과는 달리 수학의 결과를 이야기로 만들 수 있다는 것이다. 다시 말하면 교사나 수학에 대해 지식이 있는 자가 수학 이외의 자신의 관심분야에서 자신의 주장을 펴는 데 수학의 결과가 도움을 줄 수 있다는 것이다. 따라서 본 논문의 목적은 수학을 가르치기보다는 수학의 결과를 어떻게 이용할 수 있는지, 또는 어떻게 해석해서 사회현상을 설명할 수 있는 지를 보여주는 데 있다. 이는 스토리텔링 수학의 쌍대(dual) 개념이라 볼 수 있어 저자는 영문으로 스토리메이킹(storymaking)으로 표현하고자 한다.

스토리텔링을 통해 수학 수업에 인문학적 접근법을 접목하여 수학이 문명 발전 및 실생활과 밀접하게 연관됨을 인식시키고 관련 수학적 내용 및 수학 생성과정을 토론함으로써 학생들의 통합적 시각 및 이해와 흥미를 제고하는 데 기여하게 된다고 한다(권오남 외, 2012, 223쪽). 그러나 수학으로 이야기를 만드는 것은 수학의 결과가 어떻게 나왔는지 설명해주기보다는 그 결과의 뜻만 알려주고 인문사회학 분야에 접목해 창의적인 주장을 펼치는데 수학이 매우 중요한 도구가 될 수 있음을 보여준다.

스토리텔링 수학의 내용을 만들기 위해서는 작가적 자질이 분명 필요하기에 스토리텔링 수학의 집필자는 작가적 능력을 갖춘 수학교사가 가장 적임자일 것이다. 아니면 수학을 이해할 수 있는 작가와 수학교사의 협동작업으로 이루어질 수도 있다. 하지만 수학으로 이야기를 만들기는 수학교사가 이야기를 만들 수 있는 능력보다는 칼럼 정도 쓸 수 있는 능력이면 충분하다. 따라서 수학교사가 다양한 분야에 대한 경험과 지식이 많으면 많을수록 더욱 효과적으로 수학의 유용성을 알릴 수 있다. 그럼으로써 수학을 배우는 것은 시간을 낭비하는 것이 아니며, 비록 전공을 하지는 않더라도 미래에 자기가 하고 싶은 일에 대한 투자라는 인식을 심어 줄 수 있어 학생은 물론 일반인에게 수학의 숨은 가치를 알려 수학의 대중화에 이바지 할 수 있다.

본론에서는 구체적인 수학을 설명하지 않고 오직 수학의 결과만 알려주고 이 결과를 이용하여 어떻게 사회 여러 분야의 현상을 설명할 수 있는지 저자의 관심 분야에 대한 여러 사례를 통해 보이고자 한다. 따라서 수학으로 이야기 만들기는 수학을 가르치는 것이 아니라 수학의 결과를 창의적으로 해석해 인문사회학적인 관심 분야를 설명할 수 있다는 것을 보이는 것이다. 즉 자신이 내세우는 주장의 정당성에 대해 상대를 설득하는 데 수학의 결과가 도움이 된다는 것이다. 따라서 주어진 가정 아래에서 수학의 결과를 이끌어내듯이 매우 정확한 논증으로 설명하는 것은 아님을 강조한다.

결론에서는 2년간 매 학기마다 대학의 교양수업을 통해 수학으로 이야기를 만들 수 있다는 것을 가르치면서 얻은 학생들의 반응을 수록했다. 이는 자신의 주장을 펼치는데 상당히 설득력이 있으며, 2015년 3월에 보도한 제2차 수학교육종합계획(교육부, 2015)의 목표에도 부합될 뿐 아니라 수학의 대중화에도 도움이 될 수 있음을 강

조한다.

II. 본론

수학으로 이야기를 만들기 위해서는 세 가지 내용을 연결해야 한다. 하나는 수학의 특정 개념 또는 결과, 둘째는 교사의 취미생활과 경험, 그리고 셋째는 특정 인문사회학 분야에 대한 교사의 관심과 지식이다. 특히 이중 가장 필요한 것은 수학에 대한 지식은 기본이고 수학적인 의미를 해석하기 위해서는 무엇보다도 다른 어떤 분야에 대한 교사의 깊이 있는 관심과 지식이다. 따라서 전공이 서로 다른 사람과 융합하는 것이 아니라 교사 혼자서 수학이 아닌 다른 분야에 수학을 융합시키는 것이다. 이에 대한 사례들은 다음과 같이 들 수 있다(이규봉, 2013). 다음에 제시하는 여러 사례처럼 각자 주장하는 바를 말로서 아니면 이야기 또는 칼럼으로 구성해서 상대방의 이해를 구하는데 수학의 결과가 도움을 줄 수 있다.

1. 수의 덧셈과 노동조합의 당위성

수의 덧셈에서는 결합법칙이 성립한다. 그러나 유한한 자리수의 계산에서는 이것이 성립하지 않을 수도 있다는 것을 컴퓨터의 예를 들어 설명한다. 컴퓨터의 기억장치는 유한하여 태생적으로 컴퓨터 연산은 마무리오차를 지니고 있다. 그 결과 컴퓨터에서는 아주 큰 수와 상대적으로 매우 작은 수의 연산에서는 결합법칙이 성립하지 않을 수도 있다(이규봉, 2007).

유효숫자 3자리의 경우로 예를 들어 보자. 유효숫자 3자리의 연산에서는 네 번째 자리의 수가 반올림 되므로 $4560+2=4560$이 되나 $4560+6=4570$이 된다. 따라서 다음과 같이 결합법칙이 성립하지 않는다.

$$\begin{aligned}((4560+2)+2)+2 &= (4560+2)+2 \\ &= 4560+2 = 4560\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4560+(2+(2+2)) &= 4560+(2+4) \\ &= 4560+6 = 4570\end{aligned}$$

정확한 값은 4566이지만 3자리의 연산만 가능하므로 마무리오차(반올림)에 의해 더하는 순서에 따라 그 결과가 다르다.

이러한 수학적인 결과를 응용하면 사회에 왜 노동조합이 필요한 지, 또한 민주주의 국가라면 왜 노동삼권이 헌법에 의해 존중받아야 하는 지 다음과 같이 해석하여 설명할 수 있다.

큰 수를 사용자로 보고 상대적으로 아주 작은 수를 노동자로 보자. 큰 수에 작은 수를 더하면 전혀 큰 수에 영향을 주지 않듯이, 사용자에게 노동자 개개인의 의견은 대체로 그 효과를 제대로 반영할 수 없다. 그러나 작은 수끼리 먼저 합하고 그 결과를 큰 수에 더하면 큰 수가 조금 변하듯이, 작은 수에 해당하는 노동자끼리 먼저 의견을 모아 힘을 합하여 단체로 의견을 전달하면 큰 수에 해당하는 사용자는 완벽하게 받아들이지는 않을망정 조금이나마 받아들일 수 있다는 것이다.

수학적인 결과의 이러한 해석으로 민주주의 사회에서 노동자의 인간다운 삶을 보장하기 위해서는 작은 수끼리 먼저 합해야 큰 수를 변화시킬 수 있듯이, 약자인 노동자들이 함께 행동할 수 있는 노동조합이 반드시 필요하다는 주장이 설득력을 지닐 수 있다. 즉 노동조합은 고용주와의 평등을 실현하기 위한 최소의 조건이 됨을 설명할 수 있다. 그래서 모든 민주주의 국가에서는 헌법에 노동자의 권리가 포함되어 있다는 것을 알려줄 수 있다. 교사의 관심과 지식의 깊이에 따라 각 나라의 노동탄압 사례를 보여줄 수 있고, 사회가 안정을 꾀하려면 소수에 의한 부의 독점보다는 약자에 대한 배려와 함께 더불어 사는 사회가 필요하다는 것을 주장할 수 있다.

2. 로지스틱 함수와 인구증가 예측

미분방정식을 배우면 반드시 나오는 아래 방정식의 해를 살펴보자(Zill, 2005).

$$\frac{dp}{dt} = kp,\ p(0) = p_0 \text{의 해는 } p(t) = p_0 e^{kt}$$

$$\frac{dp}{dt} = p(a - bp),\ p(0) = p_0 \text{의 해는 } p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-at}}$$

첫 번째 방정식은 일차선형방정식이고 둘째 방정식은 첫 번째 방정식에 조건 하나를 추가하여 나온 비선형방정식이다. 위 두 방정식을 응용하면 인구 증가와 그에 따른 가족계획, 그리고 핵발전의 치명적인 오류를 설명하는 데 도움이 된다.

첫 번째 방정식은 인구 증가에 있어 맬서스의 법칙을 설명할 수 있다. “인구는 기하급수적으로 증가하는 반면 식량은 산술적으로 증가한다.”고 알려진 이 법칙으로 인해 전 세계에서는 산아제한을 하는 가족계획이 실시되었다는 것을 설명하면 수학의 사회적 영향력이 매우 큼을 알려줄 수 있다. 또한 상수 k가 음수이면 이 방정식은 방사선이 어떠한 속도로 붕괴되는지 설명해 줄 수 있다. 아울러 이 방정식은 탄소연대 측정을 통해 오래된 물건의 나이를 파악할 수 있어 고고학적인 분야에 응용할 수 있음을 설명할 수 있다. 또한 방사선은 비록 그 양이 시간이 지남에 따라 줄어들기는 하나 그 반감기가 매우 길어 오래도록 없어지지 않고 지속되어 잘못되어 방사능에 노출되면 환경과 인류생존에 미치는 영향이 지대하여 핵발전에 의존해 전기를 생산하는 것이 얼마나 위험한 발상인지를 설명하는데 도움을 준다.

두 번째 방정식을 베르훌스트(Verhulst) 모델이라 하며 이 방정식의 해를 로지스틱(logistic) 함수라 한다. 이 함수는 맬서스가 예견한 것과는 전혀 다른 인구 증가를 보여주어 맬서스의 법칙과 비교할 수 있다. 통계청의 자료와 멜서스 그리고 베르훌스트의 결과를 서로 비교함으로써 수학은 미래를 예측하는 학문이고 그 정확성은 한 나라의 정책을 올바르게 세우는데 매우 중요한 자료라는 것을 설명할 수 있다.

3. 디락 델타 함수와 사형제 그리고 이웃사랑

디락 델타(Dirac delta) 함수는 한 점을 제외한 모든 곳에서 그 값이 0이고 적분한 값은 1이 된다. 즉

$$\delta_a(t - t_0) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, t \in (t_0 - a, t_0 + a) \\ 0, \quad t \notin (t_0 - a, t_0 + a) \end{cases}$$

와 같이 정의하면 t_0에서 디락 델타 함수는 $\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0)$와 같이 정의된다. 따라서 t_0에서 디락 델타 함수는 t_0을 제외한 모든 곳에서는 0이 되나 t_0에서는 그 값이 존재하지 않는다. 그러나 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$이 된다. 또한 디락 델타 함수는 t_0에서 그 값이 유한이고 연속인 함수 $g(t)$와 만나면 $g(t_0)$이 된다(Zill, 2005). 즉

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)g(t)dt=g(t_0)$$

이와 같은 디락 델타 함수의 성질을 응용하면 사형제도의 불필요성과 종교에서 진실된 믿음은 자신의 이웃에 대한 사랑임을 설명할 수 있다.

디락 델타 함수의 성질로 볼 때 사형수가 겪는 고통을 $y=\delta(t)$에 비유할 수 있음을 설명한다. 왜냐하면 사형수는 사형당할 때까지는 큰 고통 없이 지내다 사형 당하는 그 순간 표현할 수 없을 정도의 엄청난 고통을 받는다는 가정 아래 디락 델타 함수가 사형수의 고통을 잘 나타내는 함수일 수 있기 때문이다.

사형제를 존속시키는 가장 큰 이유 중 하나는 피해자가 받은 고통에 대한 감정적인 보복이다. 즉 피해자가 원하는 것은 가해자가 아주 큰 고통을 받는 것이다. 이러한 관점에서도 사형보다는 장기노역형에 처해지는 것이 더 큰 고통을 줄 수 있다는 것을 적분의 개념을 이용해 설명할 수 있다. 사형수가 죽을 때까지 겪는 고통은 디락 델타 함수의 적분값 1로 볼 수 있다. 사형에 처하지 않고 장기노역형에 처하면 가해자는 죽을 때까지 계속 고통을 겪게 된다. 죽을 때까지 겪는 고통을 1보다 크게 노동의 강도를 조절할 수 있다면 가해자를 사형시키는 것보다는 장기노역형에 처하는 것이 가해자에게 더 큰 고통을 줄 수도 있다. 피해자의 격한 감정을 잠시 누그러뜨리고 이성적으로 판단하면 사형보다는 장기노역형이 보다 더 피해자의 마음에 위로가 된다는 것을 설명할 수 있다는 것이다.

이 내용으로 학생들에게 사형제도에 대한 국제적인 흐름과 인권의 보편성에 대해 설명할 수 있다. 또한 사형제도가 있으므로 인해 악용되는 여러 가지 역사적인 사례를 들 수 있고 또한 종교적인 이유와 함께 사형제도 폐지의 당위성을 주장할 수 있다.

디락 델타 함수는 또 종교에 응용할 수 있다. $\delta(t-t_0)$의 값은 t_0를 제외한 모든 수에서는 0이고 t_0에서는 정의되지 않아 그 실체는 볼 수가 없지만, 적분한 값(에너지, 또는 기)은 항상 존재하므로 그 존재감은 분명히 느낄 수 있다. 따라서 디락 델타 함수를 이 세상 어느 곳에서나 존재하는 절대자로 생각해 본다. 또한 연속함수 $g(t)$는 그 값이 유한하므로 사람이 어느 곳(또는 때)에서 하는 자신의 행동을 나타낸다고 하자. 사람이 참다운 신앙을 가졌다는 것은 자기가 믿는 절대자를 믿고 마음에 품어 행동을 하는 것이므로 그 사람 $g(t)$가 어떤 곳(또는 때) t_0에서 신자로서 보여주는 언행은 절대자와 함께 하는 마음과 언행으로 $\int\delta(t-t_0)g(t)dt$로 나타낼 수 있다. 그런데

$$\int\delta(t-t_0)g(t)dt=g(t_0)$$

이므로 절대자의 실체는 보이지 않고 자신의 언행 $g(t_0)$만 보여진다. 즉 절대자는 자신을 믿는 그 사람을 통해 우리에게 자신의 모습을 보여준다. 절대자는 변하지 않는다. 다만 믿는 사람과 장소가 다를 뿐이다. 각자의 언행이 자신이 믿는 종교의 내면을 보여주는 것이다. 따라서 자신의 언행이 올바르지 못 하면 자신이 믿는 종교를 욕되게 하는 것이다. 그러나 자신이 올바른 행동을 하면 다른 사람은 그러한 행동을 보고 그 종교를 믿게 되는 것이다. 이와 같이 디락 델타 함수의 성질을 이용해 디락 델타 함수를 절대자와 비교하여 믿음을 가진 자들의 언행은 바로 자신들이 믿는 절대자를 나타내는 것이라고 설명할 수 있다.

이와 같은 사형제나 종교의 문제는 개인의 사회적 관습적인 측면에서 매우 민감할 수 있어 이러한 문제를 제기할 때는 여러 가지 상반된 사례를 고루 보여 반드시 가치중립적으로 설명하는 것이 필요하다.

4. $\sqrt{2}$ 와 닮음꼴 그리고 환경보존

일반적인 직사각형의 용지는 반으로 접으면 그 모양이 바뀐다. 반으로 접어도 그 모양이 바뀌지 않으려면 가로 대 세로의 비가 얼마일까? 이에 대한 답은 무리수 $\sqrt{2}$ 에 있다. 편의상 직사각형의 두 변 중 짧은 변을 세로라 하고 그 길이를 1이라 하자. 가로의 길이를 x 라 하면 반으로 접은 직사각형의 길이의 비는 $\frac{x}{2}:1$ 이다. 원래의 직사각형과 닮은꼴이므로 $1:\frac{x}{2}=x:1$ 이 된다. 따라서 $x=\sqrt{2}$ 가 된다. 이 $\sqrt{2}$ 는 현재 복사용지의 가로 대 세로의 비다.

모양이 같다는 것은 닮은꼴로 적당한 비율로 축소하고 확대하면 서로 다른 규격의 종이로 출력할 수 있는 아주 좋은 점이 있다. 그것은 종이의 쓸데없는 낭비를 막아줄 수 있는 것이다. 컴퓨터와 복사기의 발달로 축소와 확대가 자유로워진 오늘날 꼭 필요한 일이다. 종이를 반으로 접어도 그 모양이 변하지 않는다는 것은 확대와 축소를 통해 서로 다른 규격의 종이로 변환을 자유롭게 할 수 있음을 알려준다. 따라서 $\sqrt{2}$ 라는 수는 규격이 서로 달라 잘못 잘라져 나가는 종이의 낭비가 없도록 하는 아주 환경적인 수로 환경보존에 이바지한다는 것을 강조할 수 있다.

종이의 낭비는 나무의 벌채로 이어지며 이는 지구환경에 악영향을 끼칠 수 있음을 설명하면서 환경보존의 중요성을 설명할 수 있다. 따라서 국제적으로 사용되는 복사용지 A와 B 종이의 특징은 비록 크기가 다를지라도 모양이 같다는 것을 설명할 수 있다.

$\sqrt{2}$ 가 낭비를 막아주는 수임을 설명하면서 더불어 무게와 부피 그리고 길이에 대한 국제규격은 나라마다 다를 경우 발생하는 낭비와 혼란을 줄일 수 있다는 것 또한 설명할 수 있다. 더불어 $\sqrt{2}$ 는 정수의 비로 표현할 수 없는 무리수임을 이용해 무리수의 발견에 대한 피타고라스 학파의 일화도 설명할 수 있다.

5. 비유클리드 기하학과 역지사지

비유클리드 기하학과 그 결과물인 삼각형의 내각의 합 그리고 평행선의 존재성을 설명한다. 단 자세하게 설명하지 않고 그 결과만 제시한다. 지금까지 학교 교육을 통해 삼각형에 있는 세 내각의 합은 180도라고 배웠다. 한 바퀴를 균등하게 360등분한 한 각을 1도라 할 때 삼각형의 내각의 합은 180도라고 가르쳤고 그렇게 배워왔다. 그래서 '삼각형의 내각의 합이 180도'라는 것은 의심의 여지가 없는 진리로 알고 있다. 같은 이유에서 '주어진 직선에 있지 않은 한 점을 지나고 그 직선과 평행인 직선은 단 하나 있다'라는 것 역시 진리로 알고 있다.

이와 같이 지금까지 알고 있던 기하학과 비유클리드 기하학의 결과를 비교하면, 주어진 가정이 달라지면 그 결과도 달라질 수 있음을 설명할 수 있다. 즉 수학의 진리는 절대적이라기보다는 상대적임을 강조한다. 수학조차 상대적이니 세상살이인들 절대적으로 옳은 것은 없다고 가르치며 어려서 배운 황희 정승과 노비들과의 일화인 '너도 옳고 너도 옳고 당신도 옳다'를 다시 떠 올리게 한다. 따라서 상대방의 배경을 잘 알지 못하고 자신의 주장만 옳다고 하면 끊임없는 논쟁만 불러일으키고 해결은 되지 않아 다툼만 커지니 항상 상대방의 입장에서 생각하면(易地思之) 자존심도 상하지 않고 다툼 없이 잘 해결할 수 있다는 것을 가르칠 수 있다. 이에 대한 보조 교육자료로 같은 그림이지만 보는 사람에 따라 달라질 수 있는 그림을 보여주면 더욱 좋은 교육 효과를 낼 수 있다.

수학의 모든 결과가 상대적 진리라는 것을 알고 나면 내 주장 역시 절대적인 것이 될 수 없고 항상 남의 처지에서 한 번 더 생각해 보는 역지사지의 마음을 가질 때 다툼 없는 평화로운 가정과 사회를 만들 수 있다는

것을 강조할 수 있다.

6. 공집합과 0 그리고 무소유

모든 집합 X는 공집합을 포함한다. 즉 $\varnothing \subset X$이다. 또한 $X \cup \varnothing = X$이고, $X \cap \varnothing = \varnothing$이다. 0도 또한 비슷한 성질을 갖고 있다. 이러한 성질을 이용하면 법정이 주장한 무소유의 개념(법정, '무소유', 범우사, 2010)을 잘 설명할 수 있다.

$\varnothing \subset X$란 뜻은 공집합 $\varnothing$는 가진 것이 하나도 없기 때문에 모든 곳에 다 포함된다고 볼 수 있다. 즉 자신을 비우면 모든 것에 다 들어갈 수 있고 그 어떤 것도 자신을 배척하지 않는다는 뜻으로 해석할 수 있다. 또한 $X \cup \varnothing = X$이란 뜻은 공집합 $\varnothing$이 가진 것이 하나도 없기 때문에 어떤 것과 합해도 그것을 변화시키지 않는다는 것이다. 그러나 $X \cap \varnothing = \varnothing$처럼 아무 것도 없는 공집합에서 조차 무엇인가를 취하려고 한다면 공집합은 그것을 자기처럼 만들어 버린다. 즉 그가 갖고 있는 모든 것을 없애버릴 수 있는 힘이 있다고 해석할 수 있다. 이처럼 아무 것도 갖고 있지 않은 공집합은 어디에든 포함되어 있고 아무도 해치지 않지만 모든 것을 한 번에 날려버리는 매우 큰 힘도 갖고 있다. 이는 아무 것도 갖고 있는 것이 없기 때문에 가능한 것이다.

아무것도 갖고 있지 않은 공집합은 무척 자유롭고 어디에든 포함되어 있고 그 누구와도 잘 어울린다. 있어도 있는 둥 마는 둥이며 일체 간섭도 하지 않고 영향을 미치지 않는다. 하지만 상황이 바뀌면 모두를 없애 버릴 수 있는 막강한 힘이 있다.

수에 있어서 '0'도 무소유를 상징한다. 숫자 0도 공집합과 같은 성질을 가졌다. '0'이란 아무것도 없는 것이다. 즉 비어 있는 것이다. '0'은 아무것도 갖고 있지 않아 어느 수에 더해도 영향을 주지 않지만 곱하기($\times$)라는 연산자로 모든 수를 일순간에 날려버릴 수 있다.

바로 이 $\varnothing$과 0이 법정이 말하는 무소유 그 자체라고 설명할 수 있다. 우리가 행복함을 느끼는 것은 만족스러운 마음에서 나온다고 볼 수 있다. 그렇다면 만족은 어디서 나오는가? 자신이 원하는 것을 모두 갖고 있을 때 나올 것이다. 자신이 원하는 것이 많은데 갖고 있는 것이 없다면 그만큼 불만스러울 것이다. 이것을 수식으로 표현하면 다음과 나타낼 수 있다.

$$\text{만족} = \frac{\text{소유}}{\text{원함}}$$

이 등식을 이용하면 많이 가지려 하지 말고 적게 원하는 것이 만족도를 높여주고 아울러 행복의 지름길임을 알려준다. $\varnothing$과 0을 설명하면서 법정의 무소유 개념을 일깨워주며 학생들의 마음을 정화할 수 있다.

7. 정수비와 동서양 음계

수학과 음악은 전혀 다른 학문 분야로 생각할 수도 있겠지만 의외로 유사한 점이 많다. 수학에는 수많은 기호가 사용된다. 이 기호의 뜻을 모르면 수학을 이해하는 것은 불가능하다. 그러나 그 뜻을 명확히 알면 많은 내용을 간단하게 함축시킬 수 있어 논리 전개에 매우 큰 도움을 주어 내용을 알기가 쉽다. 마찬가지로 음악에도 수많은 기호인 음표가 이용된다. 수학과 마찬가지로 이 음표의 뜻을 모르면 전혀 악보를 읽을 수 없어 연주하기 어렵다.

서양이든 동양이든 음악의 기본이 되는 음계를 만드는 데에는 정수비가 매우 중요한 역할을 한다. 서양에서는 정수비가 작은 울림이 좋은 음 간격을 찾아서 조율을 했고, 옥타브 사이의 음들을 적당한 간격으로 나누어

다음 옥타브 위에 반복해 사용했다. 정수비는 중학교 정도이면 충분히 이해되는 내용이다. 이것을 음악에 응용할 수 있다.

서양에서 음계를 최초로 체계화 한 사람은 고대 그리스의 피타고라스이다. 피타고라스는 수학적 원칙을 기본으로 체계적인 조율을 했다. 중국에서는 삼분손익법(三分損益法)을 이용하여 음을 생성했다. 음을 생성하는 방법으로 피타고라스 방법이나 삼분손익법은 모두 인간이 인위적으로 만들었다고 보기보다는 자연의 법칙으로 소리가 발생하는 원리를 그대로 이용했다. 이 소리의 원리에 정수비가 포함되어 있다.

시대적으로 그리고 지리적으로 분명한 차이가 있음에도 서양의 피타고라스 조율이나 중국의 삼분손익법은 음계를 형성하는 논리가 같았다. 동서양 모두 주어진 줄의 길이를 $2:3$의 비율로 줄이거나 늘리는 방법으로 음을 만들었다. 이 방법에 의해 동서양 모두 12음계가 나왔다(이규봉, 2010).

이 음계를 만드는 방법을 이용하여 자와 컴퍼스만으로 기타와 같은 현악기를 만들 수 있다. 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용하여(유클리드 작도) 기타의 플랫과 같은 음계도를 작도하고 그 위에 팽팽한 줄을 올려 줄을 튕기면 비율에 따라 음이 만들어지는 것을 확인할 수 있다.

물리적으로 같은 장력의 현은 그 길이에 따라 소리가 달라진다. 장력이 같은 줄의 길이가 반으로 줄어들면 주파수는 두 배로 증가한다. 즉 줄의 길이의 비와 주파수의 비는 반비례 관계이다. 따라서 주어진 줄의 길이가 반으로 줄어들면 주파수가 두 배가 되어 한 옥타브 위의 높은 음이 나고, 줄의 길이가 두 배로 늘어나면 주파수가 반이 되어 한 옥타브 아래의 낮은 음이 난다. 따라서 정수비 $1:2$나 $\frac{1}{2}$ 또는 2는 음에 있어서 옥타브 관계를 나타낸다. 줄의 길이가 $\frac{2}{3}$으로 짧아지면 완전5도 위의 음이 나고 $\frac{3}{2}$으로 길어지면 완전5도 아래 음이 난다. 한편 $\frac{3}{4}$으로 짧아지면 완전4도 위의 음이 나고 $\frac{4}{3}$로 길어지면 완전4도 아래 음이 난다. 따라서 정수비 $2:3$과 $3:4$의 관계는 각각 완전5도와 완전4도의 관계를 나타내는 등 간단한 정수비가 음악에 있어서도 매우 중요한 역할을 함을 설명할 수 있다.

8. 무리수와 평균율 음계

피타고라스 음계의 가장 큰 문제점은 피타고라스 콤마가 생기는 것이다. 즉 음을 쌓아 만들 때 12번 째 음이 정확히 첫 음의 옥타브 위 음이 되지 않고 약간 더 높은 음이 나온다. 이 차이를 피타고라스 콤마라 한다. 따라서 조옮김을 할 때 음이 맞지 않아 화성에 문제가 생긴다. 피타고라스 방법을 개선한 순정율도 있으나 역시 이 문제를 극복하지 못했다. 이를 극복한 것이 평균율이다(신현용 2014).

평균율은 옥타브 사이에 있는 12개의 음의 비를 균등하게 나눈 것이다. 따라서 주파수가 1인 음과 주파수가 2인 옥타브 음 사이에 있는 12개의 음을 균등하게 나누려면 그 간격을 12번 곱해서 2가 되어야 한다. 즉 간격을 x라고 하면 $x^{12}=2$를 만족해야 한다. 그러므로 평균율은 각 이웃한 음정의 비를 인위적으로 $\sqrt[12]{2}$가 되게 만든 방법이다. 아처럼 정수비인 유리수는 피타고라스 방법과 순정률에 영향을 주고 무리수는 평균율에 영향을 주었음을 강조할 수 있다.

음 간격을 보다 정밀하게 분석하기 위해 한 옥타브를 1200칸으로 균등하게 나누면 각 음계의 차이를 비교할 수 있다(신현용 2014). 한 칸을 ‘센트(cent)’라고 하는데 반음의 간격은 100센트이고 온음의 차이는 200센트가 된다. 따라서 기준음의 주파수를 1로 보았을 때 어떤 음의 주파수가 f이면 그 음의 센트는 $1200\times\log_2 f$로 계산할 수 있어 수학이 음악에 미치는 영향을 설명할 수 있다.

III. 결론

사회의 여러 분야에 관심을 가지고 수학을 가르치다 보니 수학의 결과를 주요 관심 분야에 접목하여 설명하는 데 도움을 주는 것을 느꼈다. 수업 중에 가끔 수학의 결과를 나름대로 해석하여 시사문제라든가 사회현상을 학생들에게 설명해주었더니 반응이 좋았다. 아마도 학생들이 대체로 시사와 역사 그리고 사회문제에 대해 잘 모르다 보니 수업이 지루해질 때 정신 나게 해주어서 좋은 반응을 보여준 것 같다. 이러한 해석을 하나 둘씩 글로 표현하여 저장하며 수업마다 수정해서 사용했다.

2013년부터 전교생을 대상으로 하는 교양수학에서 수학의 결과를 이용한 사회문제의 해석에 대한 강의를 『수학의 여행』이라는 교과목 명으로 개설했다. 2013년 1학기에 47명, 2학기에 29명 그리고 2014년 1학기에 79명, 2학기에 64명의 다양한 전공을 가진 학생들을 대상으로 이러한 내용을 강의하면서 일부 주장에 대해 반응을 살펴보았다. 두 가지 주요 사회적인 관심분야인 노동조합과 사형제도에 관한 의견은 수업 전에 비해 수업 후에는 상당한 변화가 있었다.

노동조합의 경우 대부분의 학생이 노동삼권이 무엇인지도 모를 뿐 아니라 노동조합에 대한 의식도 대체로 부정적이었다. 사형제도 역시 과반수가 사형제 유지를 찬성하였다. 강의를 통해 수학적인 결과를 응용하여 설명해주고 역사적 그리고 사회적인 여러 사례를 보여주고 세계의 흐름을 알려주었다. 이와 관련해 의견을 묻는 질문에 대부분의 학생들은 노동조합이 평등하게 살기위해 반드시 필요한 제도이고 사형제도는 폐지해야 한다는 의견이 압도적으로 많이 나왔다.

수학은 단순히 계산 기술을 다루는 학문이 아니라 창의적인 사고를 통해 세계를 해석하는 새로운 관점과 사고의 틀을 탐색하는 학문이다(권오남 2012). 수학으로 이야기 만들기는 수학의 결과를 갖고 창의적으로 사고하여 사회를 새로운 관점에서 해석할 수 있다. 스토리텔링 수학은 수학을 흥미 있고 의미 있게 공부하기 위해 도움을 줄 수 있으나, 수학으로 이야기 만들기는 수학을 전공하지 않은 일반인에게도 수학의 가치를 심어줄 수 있다.

2015년 3월 교육부는 제2차 수학교육종합계획을 발표했다. 동년 3월 16일 보도된 교육부 자료에 따르면 제1차 수학교육종합계획(2012~2014)의 문제점을 '입시 위주의 학업 부담으로 학생들의 과목 흥미도 및 자신감이 저조하여, 이를 중점적으로 개선할 필요성이 있다'고 지적했다. 그리고 제2차 수학교육종합계획은 '배움을 즐기는 수학교육의 달성'을 목표로 하고 있다고 한다.

구체적으로 고등학교에 실용수학 과목을 신설할 예정이고, 수학 관련도서를 활용하여 수학에 대한 긍정적 태도 함양과 정의적 영역의 성취 향상을 도모한다는 것이다. 실생활 속의 수학, 역사, 예술, 건축 등 다양한 수학 관련 도서를 학교 도서관에 비치하여 학생들의 접근성을 강화하고, 또한 글쓰기와 협력적 문제해결 학습 등을 평가하며 수학에 대한 긍정적 인식을 확산하고자 한다는 것이다.

이와 같은 제2차 수학종합계획에 비추어 볼 때 수학으로 이야기 만들기는 바로 배움을 즐기는 수학으로 제2차 수학종합계획의 목표에 부합한다고 볼 수 있다. 자신이 주장하는 바를 수학의 도움을 얻어 주장하는 것은 글쓰기를 통해 '수학에 대한 긍정적 태도 함양 및 확산'을 전파할 수 있게 한다. 단 협력적 문제해결 보다는 자신이 여러 분야를 동시에 알아야 한다.

따라서 수학으로 이야기 만들기는 수학에 대해 학생들에게 흥미와 자신감을 키워줄 수 있고 수학을 통해 창의적인 인재를 양성할 수 있다. 또한 수학을 공부하는 것은 절대 시간 낭비가 아니라 삶의 질을 높이는데 매우 중요하다는 것을 인지시킬 수 있어 학생은 물론 일반인에 대한 수학의 대중화에도 큰 역할을 할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 교육과학기술부 고시 제 2011-365호 [별책 8] 수학과 교육과정. 서울: 교육과학기술부

The Ministry of Education, Science and Technology (2011). *[the extra number 8] Curriculum of Mathematics Department. Notification No. 2011-365 of the Ministry of Education*, Science and Technology

교육부 (2015). 제2차 수학교육종합계획(2015~2019), 서울 : 교육부

The Ministry of Education (2015). *The 2^{nd} Master Plan for Mathematical Education(2015~2019)*, Seoul : The Ministry of Education

권오남・주미경・박규홍・오혜미・박지현・조형미・이지은・박정숙 (2012). 고등학교 수학 교사의 스토리텔링 수학 교과서에 대한 이해, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 51(3), 223-246.

Oh, N.K.. Ju, M.K., Park, K.H., Oh, H.M., Park, J.H., Cho, H., Lee, J.E., & Park, J.S. (2012), High School Mathematics Teacher' Conception of Mathematics Textbooks Based on Storytelling, *J. of the Korean Society of Mathematical Education Series A <Math. Edu.>,* 51(3), 223-246.

권오남・주미경・박정숙・박지현・오혜미・조형미 (2013). 스토리텔링 수학 모델 교과서의 개발 원리와 현장적용 가능성에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 27(3), 249-266.

Oh, N.K.. Ju, M.K., Park, J.S., Park, J.H., Oh, H.M., & Jo, H.M., (2013), The Study on the Development principles for the Mathematics Textbook based on Storytelling and the Possibility of Implementation, *J. of the Korean Society of Mathematical Education Series E <Comm. Math. Edu.>*, 27(3), 249-266.

김유정・김지선・박상의・박규홍・이재성 (2013). 실생활 연계형 스토리텔링 수학 교과서 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 27(3), 179-203.

Kim, Y.. Kim, J,S., Park, S.E., Park, K.H., & Lee, J., (2013), Developing the mathematics model textbook based on storytelling with real-life context, *J. of the Korean Society of Mathematical Education Series E <Comm. Math. Edu.>*, 27(3), 179-203

신현용・신혜선・나준영・신기철 (2014). 수학 in 음악, 사울 : 교우사

Shin, H.Y., Shin, H.S., Na, J.Y., Shin, & K.C. (2014), *Mathematics in Music*, Seoul : Kyo Woo Sa

이규봉 (2007). Matlab으로 실습하는 수치해석학, 서울 : 경문사.

Lee, G.B. (2007), *Numerical Mathematics with Matlab*, Seoul : Kyung Moon Sa

이규봉 (2010), 동서양의 음의 생성을 통해본 정수비의 응용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(4), 923-937.

Lee, G.B. (2010), The application of Integer Ratio in making eastern and western notes, *J. of the Korean Society of Mathematical Education Series E <Comm. Math. Edu.>*, 24(4), 923-937.

이규봉 (2013). 수학의 창을 통해 보다, 서울 : 경문사.

Lee, G.B. (2013). *See through the Window of Mathematics*, Seoul : Kyung Moon Sa

이재학・도종훈・박윤범・박혜숙・신준국・김정자・허선희 (2013). 중학교 수학 ① 스토리텔링 모델교과서의 개발 및 적용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 27(3), 301-319.

Lee, J.H., Do, J., Park, Y.B., Partk, H.S., Shin, J.K., Kim, J.J., Heo, S.H., & (2013), Developing and Applying a Model Textbook based on Storytelling for the Middle School Mathematics Course ①, *J. of the Korean Society of Mathematical Education Series E <Comm. Math. Edu.>*, 27(3), 301-319.

리나 자스키스・피터 릴제달(2013). 스토리텔링으로 수학 가르치기, 서울 : 경문사.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2013). *Teaching Mathematics as Storytelling*, Seoul : Kyung Moon Sa

Dennis G. Zill(2005). A First Course in Differential Equations, 8ed. Brooks/Cole

Storymaking with Mathematics and its examples

Gyou Bong Lee
Dept. of Applied Math., Paichai University, Daejeon 302-175, Korea
E-mail : gblee@pcu.ac.kr

If the storytelling Mathematics is teaching Mathematics by making and telling stories on Mathematics, the storymaking with Mathematics is that teachers(or mathematicians) who wish to develop their opinions concerning about their interesting fields apply them into a real life. They can use mathematical consequences for their arguments. I'll call it 'storymaking'. It could let the general public know that studying Mathematics is useful. So this application is helpful to the popularization of Mathematics.

* ZDM Classification : F90
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97
* Key words : popularization of Mathematics, storymaking, storytelling