대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 17, No. 3, 377 ~ 390. Sep 2015

삼각배열 문제해결과 관련된 초등영재의 수학적 사고와 태도

임 영 빈* · 홍 진 곤**

본 연구는 수학적 문제해결과 관련한 수학화 과정에서 나타나는 학생들의 수학적 사고 및 태도를 분석하고 이러한 사고 및 태도를 유발시키는 교사의 역할에 대한 시사점을 제공하기 위해 수행되었다. 이를 위해 삼각배열 문제를 해결하는 과정을 여러 단계로 나누어 수학적 사고 및 태도를 분석하였다. 그리고 단계별로 학생들에게 도움을 줄 수 있는 교사의 발문을 제안했다. 그 결과 하나의 문제를 해결함에 있어서도 학생들이 경험하는 수학화는 다양한 단계와 복합적인 수학적 사고 및 태도가 필요하다는 것을 알 수 있었다. 수업을 통해 수학화를 경험시키고자 하는 교사의 입장에서는 학생들이 어떤 수학적 사고를 하고 있으며 어떠한 수학적 태도를 취하고 있는지 자세히 관찰하고 분석할 필요가 있다. 다음 단계로 이행이 되지 않는 학생에게는 직접적으로 필요한 수학적 사고를 제시해주기보다 발문을 통해 학생 스스로 생각할 수 있는 기회를 주는 것이 바람직하다. 스스로 생각하는 경험을 통해 학생들은 문제해결의 희열을 느끼고 수학의 유용성을 깨달을 수 있을 것이다. 그리고 이러한 경험이 학생들의 수학적 태도를 형성시켜 수학적으로 사고할 수 있는 토대를 마련해줄 것이다.

Ⅰ. 들어가는 글

인간은 일상생활 속에서 많은 문제 상황에 부딪히게 된다. 이와 관련해서 학교는 수업을 통해 학생들이 부딪히게 되는 수많은 문제 상황을 해결할 수 있는 능력을 키워주고자 한다. 학교에서 가르치는 교과목이 수학만 있는 것이 아니듯, 학생들이 부딪히게 되는 문제들이 반드시 수학을 통해서만 해결 할 수 있는 것은 아니다. 그러나 수학을 가르치는 입장에서는 학생들이 수학을 활용함으로써 문제를 해결해 나가는데 많은 도움을 얻길 바랄 것이다.

수학적인 문제해결 능력의 신장은 수학교육의 주요 목적이라고 할 수 있다. 수학적으로 문제를 해결하게 되면 문제해결 방법을 일반화, 알고리즘화, 형식화하는 등의 과정에서 수학화가 이루어진다. 수학화가 이루어지게 되면 차후에 부딪히게 되는 유사한 문제 상황은 더욱 쉽게 헤쳐나갈 수 있다.

수학적으로 문제를 해결하는 과정에는 수학적 사고가 반드시 수반되어야 한다. 그리고 수학적으로 사고하기 위해서는 문제를 수학적으로 사고하고자 하는 태도를 가지고 있어야 한다. 이와 같은 수학적 사고와 태도는 단순하게 명제적 지식을 전수한다고 취할 수 있는 것이 아니다. 가벼워 보이는 수학적인 사고나 지나칠 수 있는 태도 하나에도 학생의 수학적 발견이 깃드는 것

* 인천해서초등학교, loveace-bin@hanmail.net (제1 저자)
** 건국대학교, dion@konkuk.ac.kr (교신저자)

이다. 학생이 이러한 방법적 지식을 습득하기 위해서는 실제적으로 경험해보고, 실천해보는 것이 중요하다. 그런데 학생들이 스스로의 힘으로 자연스럽게 방법적 지식을 습득하기란 어려운 일이다. 따라서 교사는 학생들이 자연스럽게 수학적 사고와 태도를 유발할 수 있는 방법을 연구해야 할 것이다. 우정호(1998, p 125)는 문제를 해결하는 능력은 교사의 질문과 권고를 통한 본보기의 모방이 중요하다고 했으며, Polya(1971, p. 3)는 교사가 학생의 마음속에서 무엇이 일어나고 있는가를 이해하려 노력하고 질문하며 학생에게 일어날 수도 있었던 사고 단계를 지적해주어야 한다고 이야기한다. 즉, 문제해결 능력 향상을 위한 교사의 역할이 매우 중요함을 알 수 있다.

이에 본 연구에서는 초등영재학생들의 삼각배열 문제해결 과정에 나타나는 수학적 사고 및 태도를 분석하고 이를 유발하는 교사의 역할에 대한 교육적 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 문제해결 과정의 수학화

Freudenthal은 인간 활동으로서의 현실주의적 수학교육 이념을 구현하고자 했으며 수학적 사고 활동의 본질은 수학화라고 생각했다(우정호, 2009, pp. 377-397). 그리고 이러한 활동의 핵심을 '수학화(mathematization)'라고 생각했다. 이러한 수학화는 '현상'을 '본질'로 조직하는 것, 다르게 표현하면 '현상'을 조직하는 '본질'을 구성하는 것이다. 즉, 수학적으로 문제를 해결한다는 것은 여러 가지 비본질적인 요소를 가지고 있는 '현상'에서 추상적 개념인 '본질'을 구성하는 것으로 볼 수 있다. 이와 같은 관점은 이미 존재하는 '본질'로 '현상'을 이해하고자 하는 Platon의 입장과는 반대되는 것이다.

이러한 수학화 활동에는 형식화, 국소적 조직화, 공리화, 관찰, 실험, 귀납, 유추, 시행착오, 추측, 일반화, 도식화, 추상화, 기호화, 정의, 알고리즘화, 패턴화, 구조화, 추론, 분석, 증명, 반성적 사고, 관점의 전환, 재구조화, 구체화, 모델링 등의 활동도 모두 포함되는데 이와 같은 활동의 상당수가 片桐重男[1](2004)의 수학적 사고와 일치한다. 그리고 이러한 수학화 활동의 원동력은 사고수준의 비약을 위한 전제가 되는 반성적 태도이다. 즉, 실행된 수학을 반성하는 것이 중요한 수학적 태도인 것이다(우정호, 2009). 따라서 수학화 과정에는 수학적 사고와 태도가 수반되는 것이 자연스럽다.

2. 수학적 사고와 태도

片桐重男(2004)는 문제해결 과정을 토대로 각 단계에서 어떤 '수학적 태도'가 쓰이는 일이 많은지 보고 있다. 그리고 이들 각 태도가 어떤 '방법에 관련된 수학적 사고'와 '내용에 관련된 수학적 사고'를 발동시켰는지 설명하고 있다. 이를 구조화시킨 것이 <표 II-1>이다. 이 표의 문제해결 과정은 Polya의 문제해결을 위한 4단계 과정을 바탕으로 하고 있다.

'수학적 태도'를 이와 같은 의미로 규정해도 이는 눈으로 직접 관찰할 수 있는 것이 아니다. 그러나 학생의 수학적 사고는 수업이나 문제해결 상황에서 발문이나 활동을 통해 분석할 수 있다. 그리고 이런 수학적 사고와 구조적으로 연결된 수학적 태도를 확인할 수 있을 것이다.

1) 가타기리 시게오

<표 II-1> 수학적 사고・태도의 구조 (片桐重男, 2004)

문제해결 과정	수학적 태도	수학적 사고	
		방법에 관련된 사고	내용에 관련된 사고
문제 형성・파악	・스스로 자신의 문제나 목적, 내용을 명확히 파악하려는 태도 ・내용을 간결 명확히 나타내려는 태도	추상화 단순화 수량화 기호화 도형화	함수적 사고
해결방안 구상	・이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도	유추 특수화 수량화 도형화	단위의 사고 개괄적 파악의 사고
해결실행	・이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도 ・내용을 간결 명확히 나타내려는 태도	귀납 연역 유추 단순화 특수화 기호화 구체화	단위의 사고 표현의 사고 조작의 사고 개괄적 파악의 사고 함수적 사고 식에 관한 사고
논리적 검증 및 발전	・이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도 ・내용을 간결 명확히 나타내려는 태도 ・보다 나은 것을 구하려는 태도	일반화 연역 귀납 통합 발전	단위의 사고 표현의 사고 조작의 사고 알고리즘의 사고 기본 성질의 사고 함수적 사고 식에 관한 사고

Ⅲ. 연구 방법

본 연구의 첫 번째 목적은 초등학교 6학년 영재들의 문제해결 과정에서 이루어지는 수학화의 양상을 관찰하고 어떤 수학적 사고 및 태도가 이와 관련되는지 확인하는 데 있다. 이에 다음과 같이 연구대상을 선정했고, 자료를 수집했으며 그에 따른 연구 결과를 분석하였다.

1. 연구 대상

본 연구가 관찰하고자 하는 수학적 사고 및 태도를 분석하기 위해서는 자신의 수학적 사고를 언어나 기호로 표현하는 것에 숙달이 된 영재학급 학생들이 용이하다. 이에 인천의 지역교육청 영재원에서 7년간 수업하면서 200여명의 학생들이 보인 반응을 토대로 오류경향을 분석한 뒤 이를 바탕으로 문제해결의 단계를 설정하였다. 학생들이 보인 오류는 각 단계에서 추가적으로 설명하고자 한다.

설정된 단계를 바탕으로 인천의 단위학교 영재학급 6학년 학생 20명이 보인 문제해결 과정을 집중 분석 했다. 이 학생들은 4학년부터 2년 이상 영재학급 과정을 수료하면서 자신의 문제해결 과정을 말, 글, 그림 등으로 표현하는 경험을 많이 해본 학생들이다.

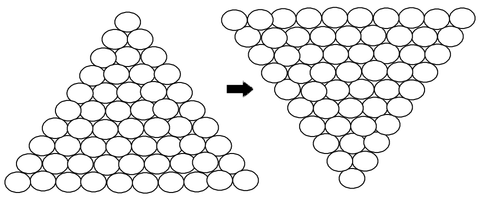
2. 과제의 설계

본 연구에서 학생들에게 제시한 문제는 다음과 같다. 이와 같은 삼각배열 뒤집기 문제를 연구과제로 선택한 이유는 본 과제가 학생들의 수학적 사고 및 태도를 관찰하기에 적합하기 때문

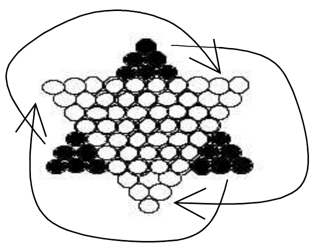
이다. 우선 본 과제에서 사용하는 교구인 바둑알은 학생들에게 매우 친숙한 사물이기 때문에 학생들이 교구에 대해 따로 탐색할 필요가 없다. 그리고 문제의 상황 자체에서 비본질적인 요소를 최대한 배제했기 때문에 상대적으로 수준이 낮은 학생의 경우에도 문제를 이해하고 계획을 실행하는 단계에 도달하는데 무리가 없다.

<삼각배열 뒤집기>

아래와 같이 삼각형 모양으로 놓인 바둑알들을 가장 적은 개수만 움직여서 모양을 거꾸로 만들어 보세요. 몇 개의 바둑알을 움직이면 될까요? 만약 바둑알이 20줄로 놓여 있다면 몇 개를 움직여야 할까요?



위 문제는 Baroody, A. & Wilkins, J.(2004, p307)가 제시한 Inverting a 36 Penny Triangular Array 라는 문제를 55개의 바둑돌로 재구성한 것이다. 55개의 바둑돌 문제는 뛰어난 직관력이 있다면 [그림 III-1]과 같은 모양을 생각하여 해결할 수 있다.



[그림 III-1] 직관적 해결

그러나 6학년 학생들은 영재학급 학생들도 위와 같은 방법을 쉽게 생각하지 못한다. 대부분의 학생들은 배열을 단순화하여 귀납적인 방법으로 문제를 해결한다. 그런데 10줄의 삼각배열을 뒤집는 과정에서 몇 가지 일관된 오류가 관찰되며, 삼각배열을 20줄로 확장하게 되면 특이한 귀납적 오류가 관찰된다. 이에 본 연구에서는 이와 같은 삼각배열 뒤집기 문제를 해결하기 위한 학생들의 문제해결 단계를 나누어 보고, 각 수준에서 범하는 오류 경향을 통해 수학화가 이루어지기 위한 수학적 사고와 태도를 분석하고자 한다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 삼각배열 뒤집기 문제의 해결과정 단계 설정

박은정(2006, pp92-94)은 능력별 집단에 따른 수학영재들의 패턴을 연구하면서 본 연구의 과제와 동일한 삼각배열 문제의 일반화 과정에 대해 분석했다. 본 연구와는 달리 일반화 과정을 일반화 전략, 정당화, 일반식의 표현 등을 바탕으로 분석했으며 수학영재들의 일반화 과정에서 나타나는 특징을 다음과 같이 정리하였다.

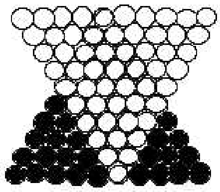
- 수학적 능력에 따라 일반화 과정에서 타당한 일반식을 구하기 위하여 서로 다른 수준의 일반화 전략을 사용한다.
- ‘상황적 구조를 인식하고 이를 일반적인 수치적 관계를 구하는데 적절히 사용할 수 있는가’의 문제는 일반화와 관련하여 학생들의 수학적 사고 수준을 구분하는 요인이 될 수 있다.
- 일반화 전략 이외에 수학적 대상에 대한 기호적 표상의 차이는 일반화 결과에 주요한 영향을 미친다.
- 상황적 구조 인식은 연역적인 정당화를 수반

하며 수학영재들은 일반화 과정에서 서로 다른 정당화 유형을 보인다.

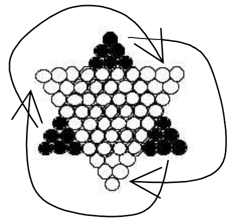
위와 같이 박은정(2006, pp 92-94)은 삼각배열 문제해결의 일반화 과정이 능력별로 어떻게 차이가 나는지 관찰하였다. 본 연구에서는 그 능력별 차이를 참고하여 인천의 지역교육청 영재학급2)에서 7년간 수업하면서 200여명의 학생들이 보인 반응을 토대로 오류경향을 분석한 결과, 이를 바탕으로 다음과 같이 문제해결의 단계를 설정할 수 있었다.

<단계 1>

대부분의 학생들은 [그림 IV-1]과 같이 생각하여 문제를 해결하고자 한다. 자신의 해답에 의구심을 가지게 되면 <단계 2-1>나 <단계 2-2>로 넘어가게 된다.



[그림 IV-1]



[그림 IV-2]

<단계 2-1>

[그림 IV-2]와 같이 더 많이 겹치는 경우를 생각하여 더 적게 바둑알을 이동시키는 방법을 알아낸다. 그러나 [그림 IV-2]와 같은 경우를 생각해내는 학생은 많지 않다. [그림 IV-2]와 같이 생각해서 문제를 해결했어도 배열을 20줄로 확장하게

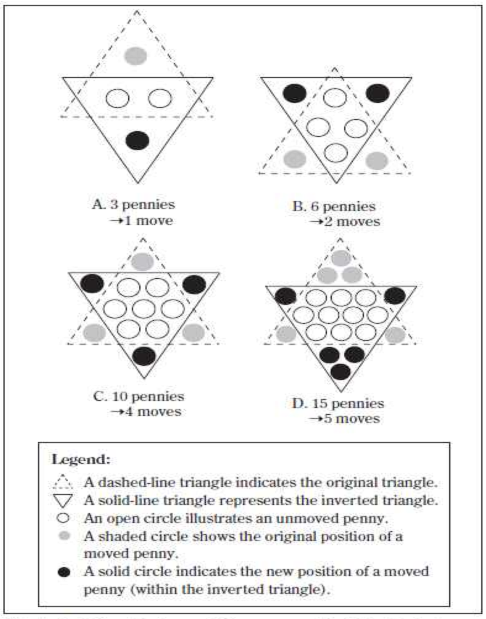


Fig. 3 Solutions that result from a more flexible strategy

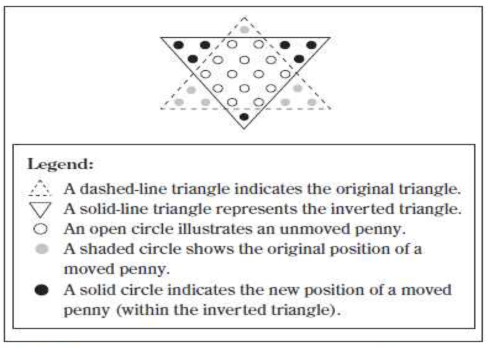


Fig. 4 A solution for inverting a triangular array of 21 pennies

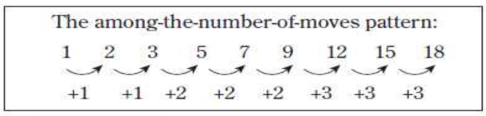


Fig. 5 A growing pattern

[그림 IV-3] ‘36개의 동전 뒤집기’의 풀이법칙(Baroody & Wilkins, 2004, pp. 308-309)

2) 단계 설정을 위해 연구대상으로 택한 지역교육청 영재학급에는 다양한 수준의 영재 학생들이 소속되어 있었다. 박은정(2006)의 연구는 능력별로 학생들의 집단을 나눈 뒤, 일반화를 분석했지만, 본 연구에서는 ‘삼각배열문제’자체를 해결하는 과정 자체를 분석했기 때문에 능력별로 집단을 나누지 않았다.

되면 또다시 난관에 봉착하게 된다.[3] 결국 귀납적 방법을 통해 대수적 패턴을 찾아 문제를 해결하면서 <단계 2-2>나 <단계 3>으로 넘어가게 된다.

<단계 2-2>

대부분의 학생들은 삼각배열이 2줄일 때부터 3줄, 4줄, 5줄, … 등의 순서로 단순화하여 문제를 해결하고자 한다. Baroody(2004, pp.308-309)도 제시했듯이 이와 같은 귀납적 방법은 삼각배열 문제를 해결하는데 결정적인 역할을 하게 된다. 다음은 Baroody가 제시한 문제의 해결 방법이다.

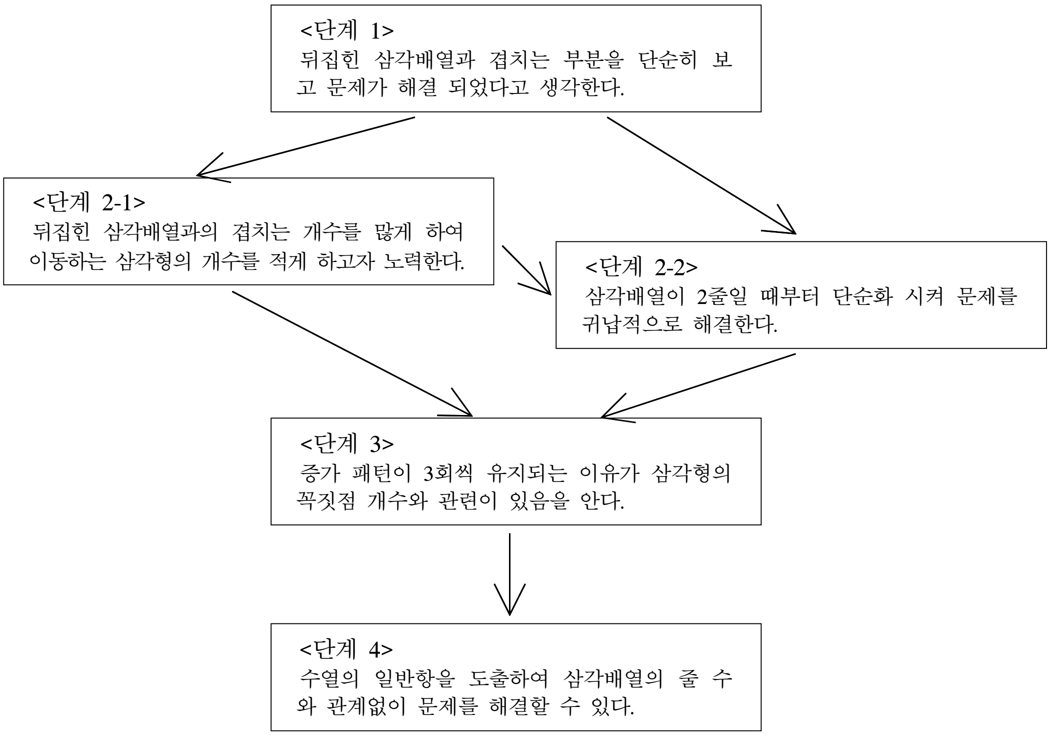
위와 같이 바둑알[4]의 개수를 단순화시켜서 패턴을 찾으면 문제를 해결 할 수 있다. 그러나 증가 패턴이 3회씩 유지되는 까닭을 알지 못하여 20줄로 배열을 확장할 경우에는 문제해결에 오류를 범한다.

<단계 3>

증가 패턴이 3회씩 유지되는 이유가 삼각형의 꼭짓점 수가 3개라는 것과 관련이 있음을 깨닫게 된다. 그리고 이를 수기로 적어 20줄로 확장된 삼각배열 문제를 해결 할 수 있다.

<단계 4>

다양한 방법으로 일반항을 도출하여 아무리 삼각배열이 확장 되어도 답을 구할 수 있게 된다. 삼각배열의 줄 수에 따른 수열의 일반항을 구할 수 있으며 그 과정을 설명할 수 있다.



[그림 IV-4] 삼각배열 문제의 해결 단계

---

3) 10줄은 $3n+1$의 구조이므로 정육각형모양으로 겹치지만 20줄은 $3n+2$의 구조이므로 정육각형 모양으로 겹치게 할 수 없다.

4) Baroody의 문제에서는 동전을 사용했다.

각 단계를 도식화 하면 [그림Ⅳ-4]와 같이 나타낼 수 있다.

2. 문제해결에 필요한 수학적 사고와 태도

학생들의 문제해결 방법의 추상화 과정을 단계별로 나누어 수학적 사고 및 태도를 분석해본 결과 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었으며, 각 단계에 필요한 발문을 고안 할 수 있었다. 수학적 태도는 { }로, 수학적 사고는 [ ]로 나타내겠다.

가. 단계1에 필요한 수학적 사고와 태도

단계1은 문제를 이해하는 과정을 포함하여 본 문제를 해결하기 위한 탐색을 하는 단계이다. 문제를 직관적으로 잘 파악하게 되면 10줄 배열 문제의 경우에는 단번에 풀리기도 하지만 대부분의 학생들은 귀납적으로 문제를 해결하기 위한 실마리를 잡는 단계이다.

처음부터 [그림 IV-2]와 같이 생각한 학생은 20명중에 1명이었다. 대부분의 학생들은 [그림 IV-1]과 같이 겹치는 경우를 생각하는 것으로 문제해결을 시작한다. [그림 IV-1]과 같이 겹치는 모양에서 [그림 IV-2]와 같이 겹치는 모양으로 바꾼 아동도 15%(3명)있었다. 이처럼 4명의 학생이 직관적으로 10줄 배열 문제를 해결했다. 그러나 20줄 배열의 경우에는 그림을 그리거나 바둑알을 직접 배열하기 어렵기 때문에 위와 같이 해결한 학생은 없었다[5]. 이와 같이 도형의 모양을 조작하는 생각은 [도형화의 사고]에 의해 실행이 된다. 이러한 도형화의 사고는 {스스로 자신의 문제나 목적, 내용을 명확히 파악하려는 태도}에 의해 나타났다고 볼 수 있다. 학생들의 수학적 태도[6]에 따라서 [그림 IV-2]와 같이 더 나은 경우를 발견하기도 하며 다른 방법으로 자신의 답을 정당화하기 위해 노력하며 <단계 2>로 넘어가게 된다. 이때 필요한 수학적 태도가 바로 {보다 나은 것을 추구하는 태도}이며, [발전적 사고][7]를 유발하게 된다.

두 번째 수준으로 넘어가지 못하는 학생들은 20줄의 삼각배열 문제를 풀어볼 엄두를 못 내거나 10줄일 때와 동일한 실수를 반복하게 된다. 스스로의 힘으로 <단계 1>을 벗어나지 못하는 학생들에게 다음과 같은 발문[8]이 <단계 2>로 넘어 갈 수 있는데 도움이 되었다.

- 결과를 확신할 수 있습니까?
- 더 적은 횟수로 배열을 거꾸로 할 수 있는 방법을 없습니까?

<단계 1>에 필요한 수학적 사고와 태도를 간단히 정리하면 다음과 같다.

· 도형화의 사고 (←스스로 자신의 문제나 목적・내용을 명확히 파악하려는 태도)
· 발전적 사고(←보다 나은 것을 추구하는 태도)

나. 단계2-1에 필요한 수학적 사고와 태도

[그림 IV-2]와 같이 더 많이 겹치는 경우를 생각하여 더 적게 바둑알을 이동시키는 방법을 알아낸다. 그러나 [그림 IV-2]와 같은 경우를 생각

---

5) 본 연구에서는 20줄 배열을 한번에 직관적으로 해결한 학생이 없었지만 7년간의 수업과정에서는 1명이 있었다.
6) 더 나은 답을 찾기 위해 노력하는 태도 및 발전적 사고 (片桐重男, 2004)
7) 발전적 사고를 문제해결의 마무리 단계에서만 관찰할 수 있는 것이 아니라 문제해결의 실마리를 찾기 위한 단계에서도 관찰할 수 있다.
8) G.Polya(1971)의 문제해결을 위한 발문 참조

해내는 학생은 많지 않다. [그림 IV-2]와 같이 생각해서 문제를 해결했어도 배열을 20줄로 확장하게 되면 또다시 난관에 봉착하게 된다.9) 결국 귀납적 방법을 통해 대수적 패턴을 찾아 문제를 해결하면서 <단계 2-2>나 <단계 3>으로 넘어가게 된다. 이때 필요한 수학적 사고는 [단순화의 사고] 및 [귀납적 사고]이며 {내용을 간결 명확히 나타내려는 태도}로부터 비롯된다. 그리고 이와 같은 시도는 기존에 문제를 해결했던 경험을 이용하는 [유추적 사고]에서 시작이 된 것이다. 즉, 본격적인 문제해결의 시작은 이와 같은 유추적 사고를 유발하는 {스스로 자신의 문제나 목적, 내용을 명확히 파악하려는 태도}에서 비롯되는 것이다.

단계 2-2로 넘어가지 못하는 학생들에게는 다음과 같은 발문이 도움이 된다.

- 조건을 간단히 해볼 수 없을까?
- 한 번에 안 되면 어떻게 해야 할까?
- 간단한 경우로 바꾸어 볼 수 없을까?

<단계 2-1>에 필요한 수학적 사고와 태도를 간단히 정리하면 다음과 같다.

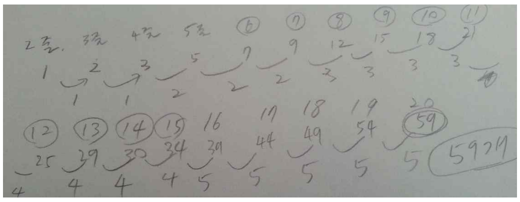
· 단순화의 사고, 귀납적 사고(←내용을 간결 명확히 나타내려는 태도)
· 유추적 사고(←스스로 자신의 문제나 목적·내용을 명확히 파악하려는 태도)

다. 단계2-2에 필요한 수학적 사고와 태도

대부분의 학생들은 삼각배열이 2줄일 때부터 3줄, 4줄, 5줄, … 등의 순서로 단순화하여 문제를 해결하고자 한다.

실제로 학업 성취도가 높은 대부분의 영재학생들은 위와 같이 패턴을 찾아 문제를 해결했다. 그런데 위와 같은 방법으로 패턴을 찾게 되면 오류를 범할 가능성이 높다.

10줄의 바둑알 삼각형을 거꾸로 만들기 위해서는 18개의 바둑알을 움직여야 한다는 것은 많은 학생들이 찾아내었다. 그러나 20줄의 바둑알 삼각형을 거꾸로 만드는 문제는 거의 대부분의 학생들이 오류를 범하였다.10) 대표적인 오류는 다음과 같다.



[그림 IV-5] 단순화하여 패턴을 찾을 때 범하는 대표적인 오류

실제로 옮겨야하는 바둑알의 증가 패턴은 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, … 등으로 같은 수가 3회씩 반복되어야 하지만 학생들은 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, … 와 같은 패턴으로 생각했다. 이와 같이 생각한 학생들은 바둑알이 1줄일 때를 간과했다는 공통점을 가지고 있다. 바둑알이 1줄일 때는 삼각형 모양으로 보기도 어려울 뿐만 아니라, 이동 횟수도 0이기 때문에 규칙이 시작된다고 생각하지 않은 것이다. 게다가 배열이 11줄일 때는 직접 손으로 조작하여 확인하기 어렵기 때문에 쉽게 포기하고 위와 같은 패턴의 오류를 정답으로 받아들이게 된다. 비록 오류를 범하기는 했지만 학

9) 10줄은 $3n+1$의 구조이므로 정육각형모양으로 겹치지만 20줄은 $3n+2$의 구조이므로 정육각형 모양으로 겹치게 할 수 없다.

10) 본 실험에서는 모든 학생(20명)이 오류를 범했다.

생들은 패턴이 가지는 규칙을 통해 기존에 해결한 문제와의 유사성을 발견하여 [유추적 사고]를 하고 있다. 이는 {이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도}에 의해 나타나는 사고이다. 결과적으로 본다면 이치에 닿은 행동은 아니지만 ‘이치에 닿게 하려는 태도’로 생각할 수 있을 것이다.

이와 같은 학생들에게는 다음과 같은 발문을 통해 <단계 3>으로 넘어갈 수 있게 도움을 줄 수 있다.

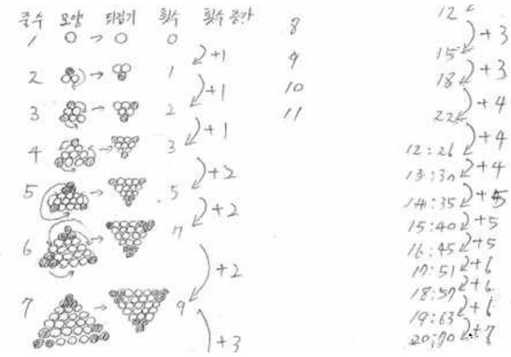
- 어째서 증가패턴이 +1에서 +2, +3으로 변화하는 것일까?
- 배열이 1일 때는 생각하지 않아도 될까?[11]

<단계2-2>에 필요한 수학적 사고와 태도를 간단히 정리하면 다음과 같다.

· 유추적 사고(←이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도)

라. 단계3에 필요한 수학적 사고와 태도

증가패턴이 3회씩 반복된다는 것을 깨우친다. 그리고 그 3회의 패턴은 다음과 같이 삼각배열의 꼭짓점의 수와 관련이 있다는 것을 깨닫게 된다.



[그림 IV-5] 삼각배열 문제의 바둑알 이동

<단계 3>의 학생들은 자신이 도출한 답에 확신을 가지게 되지만 삼각배열이 매우 크게 확장되는 경우로 일반화 하지는 못한다. 아무리 영재학급 학생이어도 증가 패턴이 복잡하기 때문에 일반항을 찾는데 큰 어려움이 있다. 이 경우의 학생들에게는 움직이지 않는 바둑알이 정육각형 모양이 되는 $3n+1$(1줄, 4줄, 7줄, 10줄 등) 구조 배열의 일반항을 먼저 찾도록 하여 <단계 4>로 넘어가는데 도움을 준다.

<단계 3>의 학생들은 대수적으로 보였던 패턴과 기하적인 바둑알의 뒤집힘을 이산적인 상태로 두지 않고 넓은 관점에서 본질적인 공통성을 추상하는 [통합적 사고]를 하고 있다. 아울러 그 통합적인 상황의 연결을 정당화하기 위한 [연역적 사고]를 하고 있다. 이는 {이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도}에 의해 유발되었다고 볼 수 있다.

<단계 4>로 넘어가지 못하는 학생들에게는 다음과 같은 발문이 도움을 줄 수 있다.

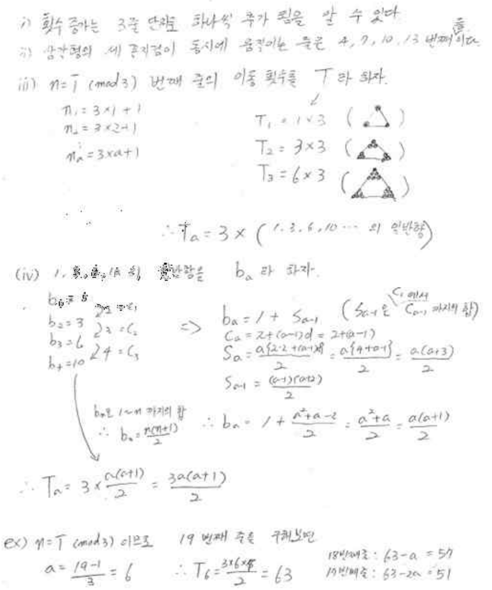
- 100줄 또는 500줄일 때는 어떻게 답을 구할 수 있을까?
- 지금까지의 풀이과정을 간단하게 나타낼 수 있을까?
- 답을 구하기 위한 식을 만들 수 있을까?

<단계 3>에 필요한 수학적 사고와 태도를 간단히 정리하면 다음과 같다.

· 통합적 사고, 연역적 사고(←이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도)

11) 이와 같은 발문은 매우 직접적인 발문이므로 최대한 자제한다.

마. 단계4에 필요한 수학적 사고와 태도



[그림 IV-6] 단계4의 학생이 삼각배열문제의 일반항을 구하는 과정

마지막 단계에서는 자신의 풀이 과정을 반성해 보고, 20줄 배열을 넘어 모든 배열 전체의 집합에서 성립하는 일반성을 구하기 위한 [일반화의 사고]와 [발전적 사고]를 하게 된다. 이를 통해 자신의 풀이과정을 기호와 알고리즘으로 나타내는 [기호화의 사고], [식에 대한 사고], [함수적 사고] 및 [알고리즘의 사고] 등을 하게 되는데 이는 {내용을 간결 명확히 나타내려는 태도}, {보다 나는 것을 구하려는 태도}에서 비롯된다.

초등학생의 수준에서 <단계 4>에 이르기는 매우 어려운 일이지만 바람직한 수학적 태도를 형성하여 필요한 수학적 사고를 하게 된다면 불가능한 일은 아니며 더 효율적인 방법이나 새로운 해결 방법을 구상할 수도 있다. 이 단계의 학생들에게는 다음과 같은 발문을 통해 자신의 풀이 과정을 점검하고 새로운 아이디어를 생각할 기회를 주는 것이 좋다.

- 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있습니까?
- 이 결과를 실제 생활이나 다른 문제들에 활용할 수 있습니까?

<단계 4>에 필요한 수학적 사고와 태도를 간단히 정리하면 다음과 같다.

· 기호화의 사고, 식에 대한 사고, 함수적 사고, 알고리즘의 사고
(←내용을 간결 명확히 나타내려는 태도)
· 일반화의 사고, 발전적 사고(←보다 나은 것을 구하려는 태도)

이와 같은 각 단계의 수학적 사고와 태도 및 제안한 교사 발문은 <표 IV-1>과 같다.

Ⅴ. 맺는 글

학생들은 문제를 해결하기 위한 수학적 활동을 함으로써 수학화를 경험할 수 있다. 이에 교사는 학생들이 수학 수업을 통해 충실하게 수학화를 경험해보고 수학적 지식을 스스로 재창조하길 바랄 수 있다. 그러나 모든 학생들이 수학 수업을 통해 동일한 수학화를 경험하는 것이 아니며 교사가 원하는 수준의 수학화를 할 수 있는 것도 아니다.

학생의 능력에 따라서 수학화의 정도가 다르지만 문제해결 과정에서 학생들이 밟아나가는 수학화의 과정은 공통된 단계를 거칠 수도 있다. 이 과정에서 수학화를 막는 원인이 수학적 사고와 태도의 입장에서 설명이나 해석 및 분석이 가능하다. 그리고 그러한 원인에 대해 깊은 고찰은

<표 IV-1> 삼각배열 문제를 해결하기 위한 단계별 수학적 사고・태도 및 교사 발문

단계	문제해결 과정	수학적 태도	수학적 사고	다음 단계로 넘어가는데 도움이 되는 발문
1	문제 형성・파악	스스로 자신의 문제나 목적・내용을 명확히 파악하려는 태도	도형화의 사고	- 결과를 확신할 수 있습니까? - 더 적은 횟수로 배열을 거꾸로 할 수 있는 방법을 없습니까?
		보다 나은 것을 추구하는 태도	발전적 사고	
2-1	문제 형성・파악	내용을 간결 명확히 나타내려는 태도	단순화의 사고 귀납적 사고	- 조건을 간단히 해볼 수 없을까? - 한 번에 안 되면 어떻게 해야 할까? - 간단한 경우로 바꾸어 볼 수 없을까?
		스스로 자신의 문제나 목적·내용을 명확히 파악하려는 태도	유추적 사고	
2-2	해결방안 구상	이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도	유추적 사고	- 어째서 증가패턴이 +1에서 +2, +3으로 변화하는 것일까? - 배열이 1일 때는 생각하지 않아도 될까?
3	해결실행	이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도	통합적 사고 연역적 사고	- 100줄 또는 500줄일 때는 어떻게 답을 구할 수 있을까? - 지금까지의 풀이과정을 간단하게 나타낼 수 있을까? - 답을 구하기 위한 식을 만들 수 있을까?
4	논리적 검증 및 발전	내용을 간결 명확히 나타내려는 태도	기호화의 사고 식에 대한 사고 함수적 사고 알고리즘의 사고	- 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있습니까? - 이 결과를 실제 생활이나 다른 문제들에 활용할 수 있습니까?
		보다 나은 것을 구하려는 태도	일반화의 사고 발전적 사고	

한 교사는 학생들의 사고과정에 도움을 줄 수 있는 발문을 할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 선행연구 및 실제 수업을 통해 삼각배열문제의 해결 과정을 단계별로 나누어보았다. 그리고 각 단계의 학생들이 다음 단계로 넘어가지 못하는 이유를 수학적 사고와 태도의 입장에서 분석을 했다. 그리고 다음 단계로 넘어가기 위해 필요한 수학적 사고와 태도[12]를 바탕으로 몇 가지 교사발문을 제안했다.

<단계 1>의 경우는 대부분의 학생이 문제를 이해하는 과정에서 거치는 단계이다. 10줄의 삼각배열문제를 단번에 해결하는 학생은 매우 극소수(5%)였다. 이 학생의 경우 평소 수업에서도 뛰어난 수학적 직관을 보여왔다. 그러나 직관적으로 문제를 해결했어도 20줄의 삼각배열문제를 해결하기 위한 규칙을 찾기 위해서 <단계 2>는 반드시 거쳐야 한다.[13] 이때 <단계 2>로 넘어가기 위해 필요한 수학적 태도는 {보다 나은 것을 추구하는 태도}이며 이러한 태도를 통해 [발전적 사고]를 하게 된다. 이러한 [발전적 사고]는 문제를 해결하기 위한 원동력이 되며, 지금의 수학 발전을 이루어낸 인간의 본성적인 사고라고 할 수 있다. 발전적 사고는 문제해결의 실마리를 찾아내기 위한 수학적 의지라고 볼 수도 있으며

12) 본 연구에서 관찰한 수학적 사고와 태도 이외에도 다양한 수학적 사고와 태도가 삼각배열 문제의 해결에 영향을 미칠 것이다. 그러나 본 연구에서는 대부분의 학생에게서 공통적으로 관찰할 수 있는 수학적 사고 및 태도만을 언급하고자한다.

13) 본 연구에서는 모든 학생이 <단계 2-2>를 거쳤으나 7년간의 수업 과정에서는 1명의 학생이 직관적으로 문제를 해결한 뒤, 바로 일반화된 식을 구했다. 이 학생의 풀이과정을 소개하자면 다음과 같다.

해결된 문제를 바탕으로 더욱 많은 수학적 활동을 이끌어낼 수 있는 창조적인 사고활동이다. 즉, 삼각배열 문제를 해결하는 과정에서 낮은 단계에 머물러있는 학생들에게는 더욱더 발전적인 사고를 할 수 있도록 교사가 질문 및 권고를 해야 할 것이다.

<단계 2-1>은 모든 학생들이 거치는 단계는 아니다. <단계 1>에서 문제가 다 해결되지 않음을 깨달은 학생들은 <단계 2-1> 또는 <단계 2-2>를 통해 문제를 해결하려고 한다. <단계 2-1>의 학생이 바로 <단계 2-2>로 넘어가지 못한 이유는 직관 및 경험과 연관지어 생각할 수 있다. 거꾸로 된 삼각배열과 가장 많이 겹치는 모양을 직관적으로 예측하지 못하는 것은 직관의 문제이다. 그리고 문제를 해결할 때 단순화해본 경험이 부족하기 때문에 <단계 2-2>로 바로 넘어가지 못했다고 생각할 수 있다. 이 경우 기존에 단순화하여 문제를 해결했던 경험을 떠올리게 하여 본격적으로 문제를 해결하도록 계획을 수립할 수 있는 [유추적 사고]를 자극해주어야 한다. 유추적 사고는 기존의 경험을 바탕으로 새로운 문제를 해결하게 할 수 있는 귀중한 자산이다. 비록 잘못된 유추를 통해 시행착오를 겪더라도 교사는 학생 스스로 자신이 생각한 유추의 잘못된 점을 찾을 수 있도록 질문과 권고를 해야 할 것이다. 오히려 잘못된 점을 연역적으로 되돌아 볼 수 있는 기회가 될 수도 있을 것이다.

<단계 2-2>는 본격적으로 문제해결이 시작되었다고 볼 수 있는 단계이다. 초등학생이 문제해결을 할 때 많이 사용하는 수학적 사고인 [귀납적 사고]를 통해 삼각배열이 2줄일 때부터 차근차근 규칙을 발견하려고 한다. 이때 유의미하게 관찰된 학생들의 일관된 오류가 있다. 이는 1줄 삼각배열의 필요한 이동횟수가 0이라는 것을 학생들이 간과한다는 것이었다. 이와 같은 반응을 보인 학생들을 인터뷰한 결과 두 가지 주요 원인을 찾을 수 있었다. 하나의 원인은 1줄 삼각배열의 경우 직관적으로 보기에 삼각형의 형태가 아니기 때문에 쉽게 간과한 것이며, 다른 원인은 이동횟수가 0이기 때문에 규칙에서 배제했다는 것이다. 이동횟수가 0이기 때문에 규칙에서 배제한 것은 0이 역사발생적으로 볼 때, 다른 수개념보다 늦게 발달한 것처럼 다른 수와는 달리 학생들에게 수로서 인식이 되지 않기 때문일 수도 있다.14)

<단계 2-2>에서 2줄 삼각배열부터 이동횟수를 단순히 나열하여 규칙을 찾으려고 했다면, <단계 3>에서는 어떤 바둑알이 움직이는지를 관찰하고 도식화하여 규칙을 찾고자한다. 이때 관찰한 기하적 이미지를 이동횟수와 [통합적]으로 결합하여 [연역적]으로 정당화를 시도한다. 이전 단계에서 본격적으로 문제해결을 시작했다면 <단계 3>은 본격적으로 문제가 해결되는 단계이다. 정당화된 패턴으로 20줄 삼각배열의 최소 이동횟수를 구할 수 있다. 그러나 수기로 패턴을 적으

일단 10층의 바둑알을 a층 만큼 옮겼다고 하였을 때, 최댓값을 구해보자. 10층의 개수는 55개 이고 , a층 만큼 두 곳을 옮겼으므로 a(a+1)만큼 바둑돌을 옮겼다. 그러므로 남은 윗층의 바둑돌은 (10- 2a -1)(10- 2a -1+1) /2 만큼을 다시 옮겨야 한다. 이 식을 전개하면 $(4a^2-38a+90)/2$ 가 나와 약분을 하면 $2a^2-19a+45$가 된다. 그러므로 옮기는 개수를 y라고 하면 y는 a에 대하여 이렇게 나타낼 수 있다. $y=55-a^2-a-2a^2+19a-45$ $=>$ $y=-3a^2+18a+10$ 이를 다시 정리하면 $y=-3(a^2-6a+9)+27+10$ 가 된다. 그러므로 a가 3일 때 최댓값은 37개이므로 옮기는 개수는 55 - 37 = 18개이다. 이런 방식으로 20층의 바둑알을 옮길 때는 70개를 옮겨야 한다.

이 학생의 경우 본 연구가 제시한 문제해결의 단계를 짧게나마 거쳤으리라 판단되지만 사고과정을 추적하기도 전에 일반화하여 문제를 해결했기 때문에 본 연구에서 분석하지 않았다. 모든 수학적 과정이 그렇듯이 이러한 풀이가 종착역은 아니겠지만 지도하는 교사 입장에서 눈여겨 볼만 하다.

14) 일반적으로 알려진 사실 가운데 하나는 0이 1부터 9까지의 숫자 보다 뒤늦게 만들어졌다는 것이다(김수미, 2006, p.401).

며 답을 구하기 때문에 삼각배열의 줄 수가 늘어나게 되면 답을 구하기 어려워진다. 일반적인 학생들의 경우에는 20줄 삼각배열의 답을 구한 것에 만족을 하고 문제해결을 멈추게 된다. 그러나 본 연구의 경우 3명(15%)의 학생이 문제해결 과정을 [일반화]하고자 노력하여 <단계 4>로 넘어가게 되었다.

<단계 4>의 경우는 영재학급 학생들의 경우에도 일부분만이 도달하는 단계이다. 이 단계에 도달하는 학생들의 경우 태도적인 측면과 경험적인 측면으로 설명을 할 수 있다. 태도적인 측면으로 설명하자면, 학생에게 {보다 나은 것을 구하려는 태도}가 형성되어 있기 때문에 20줄의 삼각배열 문제보다 일반화된 문제의 일반항을 구하고자 노력했다고 볼 수 있다. 경험적인 측면으로 설명하자면, 학생이 수학 문제를 해결할 때 자의에 의해서든 타의에 의해서든 일반항까지 구하는 것을 요구받아왔기 때문에 삼각배열 문제를 해결함에 있어서도 식으로 나타내려는 시도를 했다는 것이다. 이러한 경험이 {보다 나은 것을 구하려는 태도}를 형성했다고 생각할 수도 있다. <단계 4>는 문제를 해결한 뒤 반성을 하는 단계로도 생각할 수 있으며 수학의 발전을 이끌어낸 인간의 본성적인 수학적 태도를 보여준다.

위와 같이 하나의 문제를 해결함에 있어서 학생이 경험하는 수학화는 다양한 단계를 이루고 있으며 복합적인 수학적 사고와 태도가 필요하다. 수업을 통해 수학화를 경험시키고자 하는 교사의 입장에서는 학생들이 어떤 수학적 사고를 하고 있으며 어떠한 수학적 태도를 취하고 있는지 자세히 관찰하고 분석할 필요가 있다. 삼각배열 문제의 각 단계에서 다음 단계로 넘어가지 못하는 학생들에게는 필요한 수학적 사고나 태도를 자극시켜줄 수 있어야 하기 때문이다. 이때 직접적으로 학생들의 사고나 태도를 지적하거나 제시해주기보다는 발문을 통해 학생들이 스스로 생각할 수 있는 기회를 주는 것이 중요하다. 스스로 생각하는 경험을 통해 학생들은 문제해결의 희열을 느끼고 수학의 유용성을 깨달을 수 있을 것이다. 이러한 경험이 학생들의 수학적 태도를 형성시켜 수학적으로 사고할 수 있는 토대를 마련해줄 것이다. 이때 교사의 가장 큰 역할은 학생들이 포기하지 않고 계속 문제를 해결할 수 있도록 도와주는 길잡이가 되어야 한다는 것이다. 우정호(1998, p. 125)가 이야기 했듯이 학생들의 문제해결 교육을 성공적으로 하기 위해서는 학교 수학을 잘 알고 수학적 안목으로 현상을 볼 줄 알며 문제해결 경험이 풍부한 교사의 질문과 권고가 필요하다.

참고문헌

김수미 (2006). 0처리 오류의 기원 및 0의 지도. **학교수학, 8**(4), 397-415

박은정 (2006). **능력별 집단에 따른 수학영재들의 패턴의 일반화 과정에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문

우정호 (1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판문화원

우정호 (2009). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판문화원

Baroody, A. & Wilkins, J.(2004). Inverting a triangular array : involvingstudents in mathematical inquiry. *Mathematics Teaching In The Middle School, 9*(6), 306-325.

Polya, G. (1971). **어떻게 문제를 풀 것인가?**. 서울: 교우사 (우정호 역, 2002)

片桐重男(2004). **수학적인 생각의 구체화와 지도-수학의 진정한 학력 향상을 지향하여-**. 서울: 경문사 (이용률 · 정동권 공역, 2013)

Primary Gifted Students' Mathematical Thinking and Attitude Related to Problem Solving of Triangular Array

Yim, Youngbin (Haeseo Elementary School)
Hong, Jin-Kon (Konkuk University)

This study attempts to analyse mathematical thinking and attitude of students related to mathematization in the problem solving process and provide implication of teachers' roles. For this, this study analyses mathematical thinking and attitude by dividing the process of solving problems of triangular array into several steps. And it makes a proposal for teachers questioning which can help students according to steps. Therefore this study results students' mathematization needs various steps and compositive mathematical thinking and attitude when students solve even a problem. From the point of view of teachers who attempt to wean students on mathematization, it is necessary for teachers to observe and analyze how students have mathematical thinking and take a stand for mathematics in detail. It also indicates that it is desirable for students who can not move on next step to provide opportunities to learn on their own rather than simply providing students mathematical thinking directly. Students can derive pleasure from the process of solving difficult problems through this opportunity and realize usefulness of mathematics. Finally this experience can build mathematical attitude and prepare the ground to be able to think mathematically.

* Key Words : problem solving(문제해결), mathematization(수학화), mathematical thinking(수학적 사고), mathematical attitude(수학적 태도)

논문접수 : 2015. 6. 10
논문수정 : 2015. 9. 10
심사완료 : 2015. 9. 17