대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 17, No. 3, 407 ~ 421. Sep 2015

연립일차방정식의 다양한 표현과 소거법의 의미에 관한 연구

김 진 환* · 박 교 식**

본 연구에서는 연립일차방정식에 대한 교사의 수학 전문성 신장을 위하여 연립일차방정식의 다양한 표현을 탐색하고, 그 해결 방법인 소거법의 의미를 분석했다. 연립일차방정식은 언어적 표현, 직사각형 표현, 방정식 표현, 직선(또는 그래프) 표현, 첨가행렬 표현, 행렬 표현, 일차결합(또는 벡터) 표현으로 나타낼 수 있다. 직사각형 표현은 계수가 자연수이고 해가 양인 값을 찾는데 유용하다. 직선 표현에서 기울기와 절편을 Cramer의 공식과 연결시켜 줄 수 있다. 한 미지수를 소거하는 것은 축이나 축에 평행한 직선의 방정식을 구하고, 그것을 사용하여 다른 축이나 축에 평행한 직선으로 바꾸는 것이다. 이런 점에서 가감법이라는 대수적 절차를 직선을 사용하여 시각적으로 이미지화할 수 있다. 일차방정식의 해법에서 사용하는 방정식의 일차결합은 직선족과 방향벡터로 바꾸어 생각할 수 있다.

Ⅰ. 서 론

학교수학은 학문수학에 뿌리를 두어 학습자의 발달 단계와 교육적 가치를 염두에 두고 교수학적 변환을 거쳐 만들어진 것이지만, 동시에 학문수학으로 발전되어가는 토대로 볼 수 있다. 그런 만큼 교사는 학교수학뿐만 아니라, 그 이상을 알고 있어야 한다(Polya, 2005). 이것은 학교수학과 학문수학 사이의 이중단절(Klein, 2004)을 최소화할 수 있도록 수학 내용에 대한 충분한 지식을 갖추고 있어야 한다는 것을 의미한다. 교사는 학생들이 통합적인 관점에서 문제를 해결할 수 있게 해 주는 수학적 연결 능력을 길러줄 수 있는 전문성을 갖추어야 한다(NCTM, 1989, 2000). 수학적 대상의 모든 정보를 하나의 표현으로 드러내는 데는 한계가 있을 수 있고, 다양한 표현을 고려하여 이들을 연결하는 과정에서 더 많은 정보를 얻을 수 있으며, 그것이 학생들의 이해와 유연성을 높이는데 도움이 된다(Duval, 2002).

본 연구에서는 중등학교 수학교사들의 수학 전문성 신장을 위해 미지수가 2개인 일차방정식으로 이루어진 연립방정식(이하, 연립방정식)의 다양한 표현을 탐색하고, 그 해결 방법인 소거법의 의미를 분석한다. 연립방정식은 중등학교 수학에서 취급하는 핵심적인 내용의 하나이다. 연립방정식은 선형대수학에서 전문적으로 취급한다. 선형대수학의 많은 문제는 연립방정식이 포함된 문제로 표현된다. 이런 점에서, 연립방정식은 중등학교 수학에서 선형대수학에 이르기까지 그 활용도가 매우 높은 소재이다. 연립방정식은 상황을 설명하는 언어적 형태의 문장제로부터 대수적 표현이나 행렬 표현 등으로 형식화되며, 그 해결 전략도 다양해서 수학적 사고를 자극한다.

* 영남대학교, kimjh@yu.ac.kr (제1 저자)
** 경인교육대학교, pkspark@ginue.ac.kr (교신저자)

중학교 수학이 초등학교 수학과 가장 크게 다른 한 가지는 미지수를 나타내는 문자를 본격적으로 사용한다는 점이다. 중학교 수학에서 문자를 대상으로 한 조작 활동이 이루어지는 바, Herscovics & Linchevski(1994)에 따르면, 이것은 산술에서 대수로의 전환을 의미한다. 산술에서 형성된 개념이 내면화되어 대수로 압축되는 과정이 산술에서 대수로의 전환이다(김성준, 2004). 2011년에 고시된 개정 교육과정(이하, 2011 교육과정)에 따르면, 중학교 1학년 수학에서는 미지수가 1개인 방정식과 그 해결 방법을 취급한다. 또, 중학교 2학년 수학에서는 미지수가 2개인 일차방정식으로 구성된 연립방정식을 취급하고, 그 해결 방법으로 소거법(가감법과 대입법)을 도입한다.

학교수학의 관점에서 연립방정식을 대상으로 한 국내 연구는 많지 않다. 이종희와 김부미(2003)는 중학교 2학년 여학생을 대상으로, IDEAL이라는 문제해결 모형을 통해 연립방정식에 관한 문장제 해결에서 구조-표현을 강조하는 교수·학습에 관해, 허은숙(2005)은 수학적 연결을 중심으로 고등학교에서의 선형대수 개념의 지도에 관해, 심상길(2009)은 중학교 교과서에서의 연립방정식 단원의 효율적 지도를 위한 수학사 활용에 관해, 윤민지와 방정숙(2009)은 초등학교 5, 6학년 학생들이 연립방정식으로 해결할 수 있는 문장제 해결에서 사용하는 전략과 그 특성에 관해 논의하였다. 그러나 이들의 연구는 본 연구에 직접적으로 관련되지는 않는다.

본 연구에 직접적으로 관련되는 연구로 권석일과 임재훈(2007)이 있다. 그들은 초등학교 수학 교과서에서의 문장제(언어적 표현으로 된 연립방정식 문제)[1]의 해결에서 주로 사용하는 해결 전략인 예상과 확인, 표 만들기가 중학교에서 취급하는 소거법으로 발전되는 것으로 보기 어렵다는 점에서, 그 사이에 연결성이 부족함을 지적하였다. 그리고 초등학교 수학 교과서에서 취급하는 문장제의 해결 전략과 중학교 수학 교과서에서 취급하는 연립방정식의 대수적 풀이 사이의 연결성을 강화하기 위한 전략으로, 넓이에 기초한 그림 그리기 전략을 제시하였다. 그들이 제시한 그림 그리기 전략은 가감법의 아이디어를 보여주는 것이다. 본 연구는 대수적 표현을 직사각형이나 직선을 사용하여 시각적으로 이미지화한다는 점에서 권석일과 임재훈(2007)과 관련이 있다. 다만 그들의 연구는 초중등학교 수학 사이의 연결성 강화에 초점을 맞추고 있는 반면에, 본 연구는 중학교 교과서에서 소홀하게 취급되는 해법의 유효성을 살피고, 고등수학과 연결시켜 소거법의 의미를 고찰하는 것에 초점을 맞추고 있다.

본 연구에서는 먼저 연립방정식과 관련된 수학 교과서에서의 학습 내용 및 표현 유형에 관하여 논의한다. 다음으로 연립방정식의 해결 방법으로서 직사각형을 활용한 전략에 관하여, 그리고 직선의 기울기와 절편에 의한 해결 전략에 관하여 논의한다. 마지막으로 소거법의 대수적 절차를 직선을 사용하여 시각적으로 이미지화하고 그 유효성을 탐색한다.

Ⅱ. 연립방정식에 관련된 학습 내용 및 표현 유형

1. 연립방정식에 관련된 학습 내용

2011 교육과정에 따르면, 중학교 1학년 수학에서는 일차방정식을 취급하며, 중학교 2학년 수학

1) 2011 교육과정에 따르면, 초등학교 수학에서는 방정식을 취급하지 않는다. 그러나 초등학교 교과서에서는 연립방정식으로 해결할 수 있는 문제가 문장제 형태로 나타난다. 본 연구에서 문장제(언어적 표현으로 된 문장제)는 바로 그러한 문제를 의미한다. ‘II. 2. 연립방정식의 표현 유형’에서 이와 같은 것을 연립방정식의 ‘언어적 표현’이라고 부르게 된다.

에서는 미지수가 2개인 일차방정식 2개로 이루어지는 연립방정식과 그 해결 방법으로 가감법과 대입법을 도입한다. 가감법과 대입법을 적용하는 예로 다음을 들 수 있다(우정호 외, 2013, p.93). 여기서는 등식의 성질을 사용하여 두 방정식을 변끼리 더하거나 뺄 수 있다는 것을 강조하고 있다.

> 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=1 & \cdots ① \\ x-2y=-11 & \cdots ② \end{cases}$에서 방정식 ①과 ②를 변끼리 더하면
>
> $$(x+2y)+(x-2y)=1+(-11)$$
>
> 이다. 이 식을 정리하면, $2x=-10$에서 $x=-5$ 이다, x의 값 -5를 방정식 ①의 x에 대입하면
>
> $$-5+2y=1,\ 2y=6\text{에서 } y=3\text{이다.}$$
>
> 따라서 연립방정식의 해는 $x=-5$, $y=3$이다.

초등학교 수학에서 볼 수 있는 문장제(연립방정식의 언어적 표현)을 중학교 수학에서 대수적인 방정식으로 표현한다는 점에서 초·중학교 수학 사이에 연결성이 있다고 볼 수 있다. 문장제(연립방정식의 언어적 표현)을 문자를 사용한 방정식으로 표현하는 것은 산술에서 대수로의 전환이다. 산술과 대수 사이에는 문자의 사용뿐만 아니라 그 각각에 적용되는 사고에도 근본적인 차이가 있다(Herscovis & Linchevski, 1994; 김성준, 2004).

중학교 수학에서는 문자를 사용한 연립방정식을 제시하고, 그것을 대수적으로 조작하는 형식적인 해결 전략인 가감법과 대입법을 사용한다. 가감법과 대입법은 고등학교 1학년 수학에서 미지수가 3개인 연립방정식의 해결에서도 사용한다. 중학교 2학년 수학에서는 유일한 해를 가지는 경우, 무수히 많은 해를 가지는 경우, 해를 갖지 않는 경우를 취급하고 있다. 중학교 1학년 수학에서 취급한 함수 개념과 함수의 그래프를 바탕으로, 일차함수와 그 그래프를 다루고 미지수가 2개인 일차방정식 즉,

$$ax+by+c=0\ (a \neq 0, b \neq 0)$$

의 그래프를 일차함수의 그래프로 변환하여 다루고 있다. 특히 그 그래프인 직선의 교점을 해로 해석하여, 연립방정식의 해가 하나뿐이거나 무수히 많은 해를 가지거나 또는 해가 없는 경우로 나누어진다는 것을 설명함으로써, 직관적 관찰을 바탕으로 연립방정식의 해를 해석하고 있다. 이러한 해석은 절편과 기울기의 개념을 기반으로 하는 해석이다.

중학교 2학년 수학에서는 일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프의 모양에 관해 논의하고 있다. 여기서는 일차함수에 기초하고 있으나, 고등학교의 수학 I에서는 일차함수를 활용하지 않고 일반형의 직선방정식과 일차방정식 사이의 관계를 설명하고 있다. 특히 일차방정식과 평면 위의 직선 사이의 상호 변환이 자유롭게 이루어지고 있다. 더욱이 한 점에서 교차하는 서로 다른 두 직선에 대해, 그 교점을 지나는 다른 직선이 생성될 수 있음을 취급하고 있다.[2)]

2. 연립방정식의 표현 유형

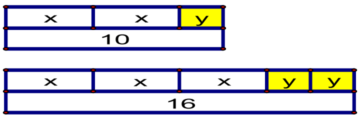
연립방정식으로 모델화되는 문장제를 연립방정식의 하나의 표현으로 보고, 그 문장제를 연립방정식의 '언어적 표현'이라고 하기로 한다. 예를 들어 다음 문장제가 연립방정식의 언어적 표현에 해당한다. 이 문장제의 해결을 위해 예상과 확인, 표 만들기 전략을 사용할 수 있다.

2) 2006년에 고시된 개정 수학과 교육과정(이하, 2007 교육과정)의 고등학교 수학 I에는 행렬과 그래프 영역이 있고, 이 영역에서 연립방정식과 행렬 사이의 관계를 취급했다. 2011 교육과정에서는 이 내용이 고급수학 1의 벡터와 행렬 영역으로 이동하게 되어, 일반 고등학교에서는 그것을 취급하지 않을 수도 있다.

1 언어적 표현: 공책 두 권과 펜 하나의 가격이 10달러이고 공책 세 권과 펜 두 개의 가격이 16달러였다. 공책의 가격과 펜의 가격은 각각 얼마인가?

이러한 언어적 표현을 [그림 II-1]과 같이 직사각형을 사용한 도형 모양으로 나타낼 수 있다. 이와 같이 나타낸 것을 '직사각형 표현'이라고 하기로 한다. 이 표현에서 직사각형을 대수 타일로 바꾸어 사용할 수도 있다.

2 직사각형 표현:



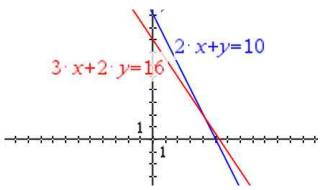
[그림 II-1] 직사각형 표현

언어적 표현을 다음과 같이 문자를 사용하여 표현한 것을 '방정식 표현'이라고 하기로 한다. 문자 대신 □, △ 등을 사용한 것도 방정식 표현으로 볼 수 있다.

3 방정식 표현: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 3x+2y=16 \end{cases}$

방정식 표현을 구성하는 두 일차방정식의 그래프인 직선을 사용하여 [그림 II-2]와 같이 나타낸 것을 '직선(또는 그래프) 표현'이라고 하기로 한다.

4 직선(또는 그래프) 표현:



[그림 II-2] 직선 표현

중학교 수학에서는 연립방정식의 해결에서 소거법을 사용한다. 다만 우리나라 학교수학에서는 소거법이라는 용어대신 가감법과 대입법이라는 용어를 사용하고 있다. 이 방법은 일차방정식을 변끼리 더하거나 빼어 한 미지수를 소거하여 연립방정식의 해를 구하는 것이다. 연립방정식을 다음과 같이 상수항을 포함한 계수로 구성한 행렬인 첨가행렬로 나타낼 수 있다. 이것을'첨가행렬 표현'이라고 하기로 한다. 여기서는 방정식에 대한 조작을 행에 대한 조작으로 전환시켜 편의성을 도모한다. 첨가행렬은 연립방정식의 모든 정보를 가지고 있다. 또, 그것은 미지수를 다루는 번거로움을 피할 수 있게 해 주며, 동시에 컴퓨터 프로그래밍을 위한 유용한 방법으로 활용된다(권영수 외, 2013).

5 첨가행렬 표현 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 16 \end{bmatrix}$

행렬의 연산과 성질을 다루면서, 행렬 연산을 토대로, 연립방정식을 두 가지로 표현하는 것이 가능하다. 먼저 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이것을 '행렬 표현'이라고 하기로 한다. 특히 계수행렬이 정사각형 행렬인 경우, 역행렬의 존재 여부에 따라 유일한 해를 가지는가를 판단할 수 있다. 이것은 행렬이 가지는 형식적인 성질이 문제해결에 유용하게 적용됨을 드러내기 위한 것이다. 이 표현은 고등학교에서 연립일차방정식을 다룰 때 자주 사용한다.

6 행렬 표현 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$

행렬을 바탕으로 하는 둘째 표현은 다음과 같다. 이것을 '일차결합(또는 벡터) 표현'이라고 하기로 한다. 일차결합 표현은 상수항을 계수행렬의 열벡터의 일차결합으로 표현할 수 있는가의

문제를 취급하면서, 상수항으로 연립방정식의 해의 존재 여부를 논의할 수 있다는 점에서 유용하다. 이 표현은 연립방정식에 '벡터의 일차결합성'이 연루되어 있음을 드러내기 위한 것으로 볼 수 있다.

⑦ 일차결합(또는 벡터) 표현

$$\begin{bmatrix}10\\16\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Ⅲ. 연립방정식의 표현 유형 및 해결 전략 사이의 연결성 분석

1. 도형을 이용한 해결 전략

다음은 2007 교육과정에 따른 초등학교 ≪수학 5-2 익힘책≫ 137쪽에 제시된 문장제로, 연립방정식의 언어적 표현에 해당한다.

> 진영이는 4점짜리 문제와 5점짜리 문제가 섞여있는 국어시험에서 17문제를 맞혀서 76점을 받았습니다. 진영이가 맞힌 4점짜리 문제는 몇 개인지 구하시오.

5~6학년생은 이러한 문장제의 해결에 주로 예상과 확인, 표만들기 전략을 사용한다(윤민지와 방정숙, 2009). 이러한 전략은 중학교에 취급하는 가감법 및 대입법과는 간격이 있는 바, 넓이를 활용한 그림그리기 전략으로 그 간격을 좁힐 수 있다(권석일과 임재훈, 2007).

본 연구에서는 하나의 미지수를 가진 방정식을 직사각형으로 표현하여 직관적으로 해결하려 했던 Fong & Chong(1995)의 방법을 연립방정식에 적용하고자 한다. 이 방법은 넓이를 활용한 그림 그리기 전략(권석일과 임재훈, 2007)보다 방정식을 더 잘 드러내고 있다. 위에 예시한 언어적 표현의 경우에, 해결 과정에서 우선적으로 고려할 사항은 구하고자 하는 것과 주어진 조건이 무엇인지를 판단하는 것이다. 구하려는 것은 진영이가 맞힌 4점짜리 문항의 수 및 5점짜리 문항의 수이다.

먼저 진영이가 맞힌 4점짜리 문항의 수를 △, 5점짜리 문항의 수를 □로 하여 위의 언어적 표현을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases}\triangle+\square=17\\4\times\triangle+5\times\square=76\end{cases}$$

이 연립방정식은 다음과 같이 풀 수 있다.

$$\begin{cases}\triangle+\square=17\\(\triangle+\triangle+\triangle+\triangle)+(\square+\square+\square+\square+\square)=76\end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\triangle+\square=17\\(\triangle+\square)+(\triangle+\square)+(\triangle+\square)+(\triangle+\square)+(\square)=76\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\triangle+\square=17\\17+17+17+17+\square=76\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\triangle+\square=17\\68+\square=76\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\triangle+\square=17\\\square=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\triangle=9\\\square=8\end{cases}$$

도형 △, □ 대신 문자 x, y를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

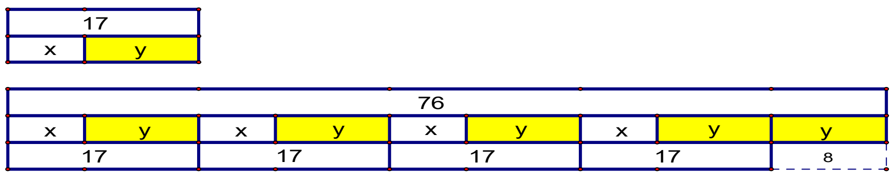
$$\begin{cases}x+y=17\\4x+5y=76\end{cases}$$

이것을 직사각형 표현을 이용하여, [그림 III-1]과 같이 풀 수 있다.

연립방정식의 언어적 표현에서는 계수와 해가 자연수로 제한되고 있다. 이것을 방정식 표현으로 변환하면 다음 유형으로 볼 수 있다.

$$\begin{cases}x+y=c_1\\ax+by=c_2\end{cases}\quad\cdots\cdots\text{(식 1)}$$

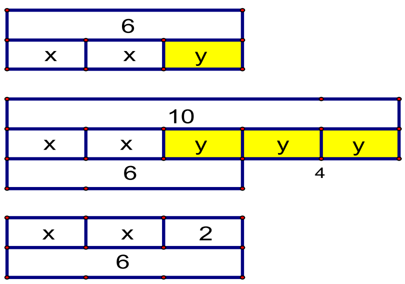
직사각형 표현을 이용한 그리기 전략은 이와 같이 한 방정식이 $x+y=c$형으로 주어진 연립방정식에서 자연수 해를 구하는 경우에 적합하다. 더 나아가



[그림 III-1] 직사각형 표현을 이용한 풀이(1)

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$$

과 같이, x의 계수가 같은 경우(혹은 y의 계수가 같은 경우)에도 [그림 III-2]와 같이 직사각형 표현을 활용하여 해를 구할 수 있다.



[그림 III-2] 직사각형 표현을 이용한 풀이(2)

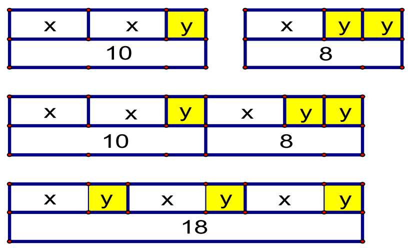
다음과 같이 두 방정식의 계수의 값이 대칭적으로 주어질 수 있다.

$$\begin{cases} ax+by=c_1 \\ bx+ay=c_2 \end{cases} \cdots\cdots \text{(식 2)}$$

이러한 경우에 직사각형 표현을 활용할 수 있다. 예를 들어

$$\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+2y=8 \end{cases}$$

과 같은 경우에 [그림 III-3]과 같이 직사각형 표현을 활용할 수 있다.



[그림 III-3] 직사각형 표현을 이용한 풀이(3)

위에서 $x+y=6$임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=10 \end{cases}$$

과 같이 (식 1)의 유형으로 쉽게 변형되고, 직사각형 표현을 활용하여 해를 구할 수 있다. 직사각형 표현을 사용한 방법은 가감법의 절차를 대수적 절차에 앞서 시각적으로 이미지화하여 고찰하게 하는 매개적 역할을 해 줄 수 있다. 이 방법은 다음과 같은 (식 2) 보다 일반적인 연립방정식에도 적용되고 있음을 볼 수 있다.

$$\begin{cases} ax+(a+k)y=c_1 \\ (b+k)x+by=c_2 \end{cases}$$

연립방정식의 언어적 표현에서는 주로 물건의 개수를 취급하기 때문에 해가 자연수로 제한되어 있다. 그러나 연립방정식의 계수를 자연수나 정수로 제한할 필요는 없다. 계산 편의를 고려하여 정수 계수를 가지는 연립방정식을 주로 취급하지만, 이때 연립방정식은 반드시 유리수의 해를 가진다. 이것은 정수 계수를 가지는 두 일차방정식의 그래프인 직선이 한 점에서 교차한다면, 그 교차점은 (유리수, 유리수)의 점이 된다는

것을 의미한다. 그러나 계수를 유리수로 제한하지 않는다면 좌표평면에 그려진 대다수 직선은 단 하나의 (유리수, 유리수)의 점도 지나지 않는다. 이는 농도와 측도의 문제로 직선이 (유리수, 유리수)의 점을 지날 수학적 확률은 0이기 때문이다.

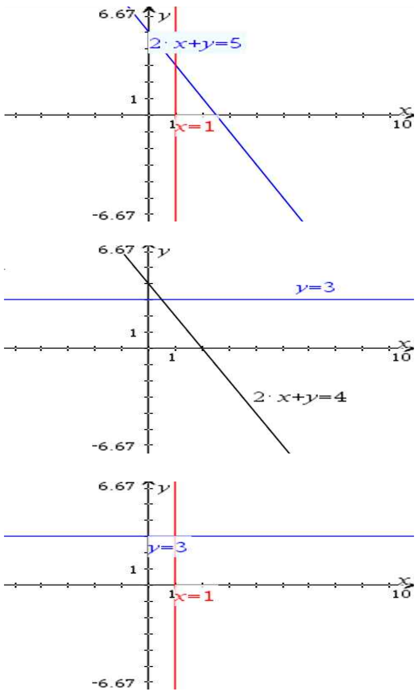
2. 직선의 기울기와 절편에 의한 해결 전략과 Cramer의 공식

일차방정식 $ax+by=c$(단, $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$)의 그래프는 평면에 포함되는 직선으로 두 유형으로 나누어 볼 수 있다. 첫째 유형은 그 식이 일차함수로 표현되는 것으로, 두 계수가 모두 0이 아니다. 이것은 미지수가 2개인 일차방정식이다. 미지수가 2개인 일차방정식은 일차함수와 동치이므로, 그것을 '일차함수형'이라고 하기로 한다. 그 그래프는 기울기와 두 절편을 가지는 직선이다. 둘째 유형은 $a=0$이거나 $b=0$으로 식이 $x=p$ 혹은 $y=q$인 유형이다. 즉, 한 계수가 0이 되는 형이다. 그 그래프는 좌표축에 평행하거나 일치하는 직선이다.

연립방정식

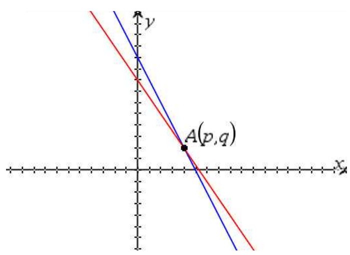
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & \cdots ① \\ a_2x+b_2y=c_2 & \cdots ② \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{(식 3)}$$

에서 a_1, b_1 중 어느 하나가 0이거나 a_2, b_2중 어느 하나가 0인 경우, 위의 둘째 유형이 되는 일차방정식을 포함한 연립방정식이 하나의 해를 가지는 대표적 사례는 [그림 III-4]과 같은 세 경우이다. 처음 두 경우에 대응하는 연립방정식에서는 x나 y의 해가 주어져 있으므로 나머지 미지수의 값은 대입법에 의해 얻어진다. 셋째의 경우는 연립방정식 자체가 해를 명시하고 있다. 이러한 연립방정식을 '해제시형 연립방정식'이라고 하기로 한다.



[그림 III-4] 계수가 0인 경우를 포함한 연립방정식의 직선 표현

이제 두 계수가 0이 아닌 경우의 일차함수형의 연립방정식의 해법에 관해 논의하기로 한다. (식 3)이 일차함수형 연립방정식이라고 할 때, 이들의 그래프인 직선의 기울기와 절편으로 해를 구할 수 있다. 예를 들어 [그림 III-5]와 같이, 직선 ①과 직선 ②의 교점을 $A(p,\ q)$라 하자.



[그림 III-5] 두 직선의 교점

(식 3)에서 x와 y에 각각 p와 q를 대입하고,

①과 ②에서 q를 p의 식으로 나타낸 뒤에, p를 구하면 다음과 같다.

$$(p-\frac{c_1}{a_1})\cdot(-\frac{a_1}{b_1})=q=(p-\frac{c_2}{a_2})\cdot(-\frac{a_2}{b_2})$$

$$\Rightarrow\ \frac{a_1}{b_1}p-\frac{a_1c_1}{a_1b_1}=\frac{a_2}{b_2}p-\frac{a_2c_2}{a_2b_2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a_1b_2-b_1a_2}{b_1b_2}p=\frac{a_1c_1}{a_1b_1}-\frac{a_2c_2}{a_2b_2}=\frac{a_1a_2b_2c_1-a_1a_2b_1c_2}{a_1a_2b_1b_2}$$

$$\Rightarrow\ p=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}$$

이와 유사한 방법으로 기울기를 비교하면

$$(q-\frac{c_1}{b_1})\cdot(-\frac{b_1}{a_1})=p=(q-\frac{c_2}{b_2})\cdot(-\frac{b_2}{a_2})$$

이고, 이것을 q에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$q=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}$$

이렇게 구한 해는 다음과 같이 행렬식의 형태로 표현할 수 있다.

$$p=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_1 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}},\ q=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

이 공식은 가감법을 적용하여 얻은 순수한 대수적 방법과 연결된다. (식 3)에서

①×b_2-②×b_1 하면 $(a_1b_2-b_1a_2)x=b_2c_1-b_1c_2$

②×a_1-①×a_2 하면 $(a_1b_2-b_1a_2)y=a_1c_2-a_2c_1$

이다. 여기서 미지수가 2개인 연립방정식에서 각 일차방정식의 기울기와 절편으로부터 나오는 비례식을 활용하여 얻은 공식이 Cramer의 공식으로 연결된다. 이것은 행렬식 계산이라는 대수적 방법을 기울기와 절편 개념과 연결시킬 수 있다는 것을 보여준다. 한편 직선의 기울기와 절편의 비례식으로부터 얻어진 공식과 대수적·형식적 방법에 의해 얻어진 공식은 일치하지만. 그 각각에서 사용하는 수학적 사고에는 차이가 있다. 그런 점에서 이것은 다양한 표현과 연결성에서 유발되는 사고 과정을 중시하는 NCTM(2000)의 규준과도 부합한다. 또한, 이것은 학교수학과 학문수학과의 연결을 도모한다.

Ⅳ. 소거법의 대수적 절차에 대한 직선 표현의 유효성 탐색

먼저 연립일차방정식의 방정식 표현을 첨가행렬 표현으로 변환하여 소거법의 양상을 살펴보기로 한다. 예를 들어 연립방정식

$$\begin{cases}3x+4y=5 & \cdots\cdots ①\\ 2x-3y=-8 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

에 대한 교과서 풀이 과정(류희찬 외, 2013, p. 92)을 살펴보면 다음과 같다.

미지수 x를 없애기 위하여 ①에 2를 곱하고 ②에 3을 곱하면

$$\begin{cases}6x+8y=10 & \cdots\cdots ③\\ 6x-9y=-24 & \cdots\cdots ④\end{cases}$$

③에서 ④를 빼면 $17y=34,\ y=2.$

$y=2$를 ①에 대입하면,

$3x+4\times2=5,\ 3x=-3,\ x=-1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$x=-1, y=2$이다.

이 풀이에서는 가감법과 대입법을 적용하여 미지수를 소거해서 해를 구하고 있다. 앞의 II장에서 제시한 교과서 문제(우정호, 2013)와 마찬가지로 이러한 풀이 과정에서는 연립방정식의 외형적 변화가 드러나지 않는다.

연립방정식의 해법전략인 소거법은 다음 세 가지의 기본 조작을 바탕으로 한다.

A. 두 일차방정식을 상호 교환하여 새 연립방정식을 만든다.

B. 한 방정식에 0이 아닌 수 k를 곱해 만든

새 방정식으로 바꾸어 연립방정식을 만든다.

C. 한 방정식에 0이 아닌 수 k를 곱해 만든 방정식을 다른 한 방정식에 더한 방정식을 만들고, 이 방정식으로 바꾸어 연립방정식을 만든다.

소거법의 핵심적인 아이디어는 주어진 연립방정식을, 해집합이 같으면서 그 해를 쉽게 찾을 수 있는, 새로운 연립방정식으로 바꾼다는 것이다. 위의 세 가지 기본 조작 은 주어진 연립방정식의 해를 유지하면서 쉽게 풀리는 새로운 연립방정식을 생성하는 데 활용된다. 이 기본 조작은 원래의 연립방정식과 새로운 연립방정식의 해가 일치한다는 것을 보장한다. 기본 조작에 의해 얻어진 방정식으로 생성된 새로운 연립방정식은 '동치인' 방정식 표현으로의 변환이다. 교과서에서는 주어진 연립방정식이 새로운 간편한 연립방정식으로 바뀌는 것을 드러내지 않는다는 점에서, 소거법의 핵심적 원리를 보여주고 있지 못하다.

다음으로 위 예에서의 방정식 표현을 다음의 첨가행렬 표현으로 전환하고 소거법 전략을 살펴보기로 한다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

방정식에 대한 세 가지 기본 조작(A, B, C)는 첨가행렬에서 행에 대한 세 개의 기본 작용(elementary row operations)인 '두 행의 교환, 한 행에 0이 아닌 수 곱하기, 한 행에 수 k를 곱해 다른 행에 더하기'로 환원된다(Anton, 1994; Lipschutz & Lipson, 2013). 위의 첨가행렬 표현에 다음과 같이 기본 작용을 적용할 수 있다.

ⓐ 1행에 2를 곱하고 2행에 3을 곱하면 $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 6 & -9 & -24 \end{bmatrix}$

ⓑ 1행에서 2행을 빼면 $\begin{bmatrix} 0 & 17 & 34 \\ 6 & -9 & -24 \end{bmatrix}$

ⓒ 1행을 17로 나누고, 2행을 3으로 나누면 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$

ⓓ 1행과 2행을 바꾸면 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ⓔ 2행에 3을 곱해 1행에 더하면 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ⓕ 다시 1행을 2로 나누면 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

이것에 대응하는 방정식 표현은 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $x=-1,\ y=2$이다.

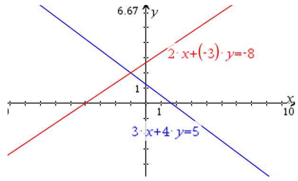
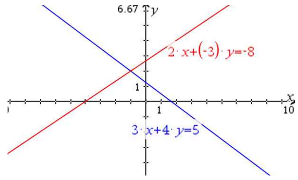
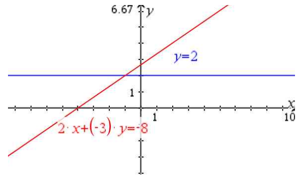
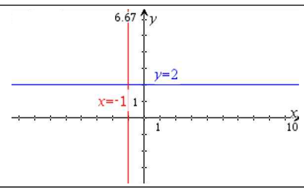
행에 대한 기본 작용을 통해, 첨가행렬을 기약계단형(reduced row echelon form)의 행렬로 바꾸어 가는 과정에서, 마지막 첨가행렬 표현에 대응하는 방정식 표현에서 해를 구할 수 있다. 첨가행렬을 활용한 해결 방법은 동치인 새로운 연립방정식을 생성해 가는 과정을 볼 수 있다는 점에서 효율적이다. 세 가지 기본 조작에 따른 해의 불변성을 대수적으로 입증할 수도 있지만, 방정식 표현이나 첨가행렬 표현을 직선 표현으로 전환하는 것을 통해 시각적 이미지를 조성할 수 있다.

[그림 IV-1]은 위에서 제시한 방정식 표현, 첨가행렬 표현, 직선 표현을 기본 작용을 작용시킨 과정에 따라 나타낸 것이다. 그래프인 직선의 모양의 변화를 보면, 해를 쉽게 찾을 수 있는 방정식의 직선 표현은 좌표축과 평행하거나 일치하는 직선 표현이다. 이것은 해제시형 연립방정식

$$\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$$

으로 나타낼 수 있다.3)

소거법에 사용되는 기본 조작 A, B를 이용하여 새로운 방정식을 만드는 것은 직선 표현에 변화를 주지 않으므로 연립방정식의 해를 불변으로 만든다. 한 방정식에 상수 k를 곱해 다른

방정식 표현		첨가행렬 표현	직선 표현
$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$	
$\begin{cases} 6x+8y=10 \\ 6x-9y=-24 \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 6 & -9 & -24 \end{bmatrix}$	
$\begin{cases} y=2 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$	
$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	

[그림 IV-1] 기본 작용의 적용

방정식에 더하는 기본 조작 C로 만들어진 방정식으로 이루어진 새로운 연립방정식의 해는 원래의 연립방정식의 해와 같다. 이것이 소거법의 근간이다.

(식 3)에서 방정식 ②를, 방정식 ①을 k(k는 임의의 상수)배하여 ②에 더한 방정식

$$k(a_1x+b_1y)+(a_2x+b_2y)=kc_1+c_2 \cdots ③$$

으로 바꾸어, 새 연립방정식 {①, ③}을 만든다. 순서쌍 $(p,\ q)$가 연립방정식 {①, ②}의 해일 필요충분조건은 $(p,\ q)$가 연립방정식 {①, ③}의 해가 된다는 것이다. 이때 $k=0$인 경우도 허용되므로 ③이 ①을 대신하도록 해서는 안 된다는 것에 유의해야 한다.

학교수학에서 연립방정식의 해와 그 그래프인 직선 사이의 관계는 다음처럼 세 가지 유형의 해에 대한 설명에서만 다루어지고 있다(우정호 외, 2013, p. 155).

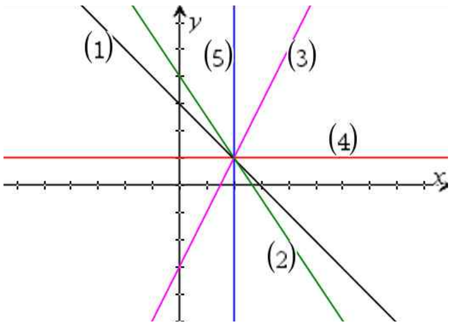
연립방정식에서 각 방정식의 그래프인 두 직선이

1. 한 점에서 만나면, 해는 하나이다.
2. 일치하면, 해는 무수히 많다.
3. 평행하면, 해는 없다.

기본 조작에 의한 해의 불변성 문제는 한 점을 지나는 직선족의 문제로 바꿀 수 있다. [그림

3) 중학교 2학년 수학에서 일차방정식 $x=p$와 $y=q$의 그래프를 다루고 있다. 이때 일차방정식의 그래프(직선)와 연립방정식의 해 사이의 관계를 설정하고 있지만, 직선 $x=p, y=q$의 특성을 취급할 뿐 연립방정식과의 관계를 취급하고 있지는 않다.

IV-2]와 같이 하나의 교점을 지나는 5개의 직선과 관련하여 여러 가지 연립방정식을 생각할 수 있다. 5개중 두 개의 직선을 택해 방정식 표현으로 변환하면, 주어진 교점을 해로 가지는 하나의 연립방정식을 만들 수 있으므로, 이 5개의 직선으로부터 10개의 연립방정식을 만들 수 있다. 이들 연립방정식의 주요 특성은 그 해가 모두 (2, 1)이라는 것이다.



[그림 IV-2] (2, 1)을 지나는 직선

직선 표현 {(4), (5)}를 가지는 연립방정식이 해를 가장 쉽게 파악할 수 있는 가장 간편한 표현이다. 연립방정식 {(1), (2)}와 연립방정식 {(1), (3)} 및 {(2), (3)}사이에는 각각 어떤 관계가 있는가? 방정식 (3)은 방정식

(1) $a_1x+b_1y=c_1$ 과 (2) $a_2x+b_2y=c_2$

를 다음처럼 일차 결합하여 만든 방정식

$k(a_1x+b_1y)+(a_2x+b_2y)=kc_1+c_2$ 혹은

$(a_1x+b_1y)+k(a_2x+b_2y)=c_1+kc_2$

에 의해 얻어진다(우정호외, 2009). 이처럼 한 정점을 지나는 직선족의 문제에서 연립방정식의 소거법의 원리가 연계되어 있다.

예를 들어 Smith 외(2006, p. 197)에 주어진 다음 문제에서 소거법에 대한 고등수학적 지식이 왜 필요한가가 적절하게 드러나고 있으며, 그것은 한 정점을 지나는 직선족에 관련되어 있음을 엿볼 수 있다.

$8x-7y=14$, $6x+9y=-11$일 때 $7x+y=?$, $7x+y=?$를 대신하여 $3x+8y=?$로 바꾼다면 그 답은 있을까?

위의 문제에서 주어진 두 방정식을 더하면 $14x+2y=3$이라는 방정식을 얻게 되고, 이 방정식에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$$7x+y=\frac{3}{2}$$

을 얻을 수 있다. 이 문제에는 벡터 (7, 1)을 벡터 (8, -7)과 벡터 (6, 9)의 일차결합으로 나타내는 문제와 이때의 계수의 값을 찾는 문제가 들어 있다. 이 문제를 일반화하여 $ax+by=?$에 대해 질문할 수도 있다. 대수적 방법으로 구할 수도 있고, 직선 표현에서 답의 존재성을 관찰할 수도 있다. 이것은 두 방향벡터의 일차독립성과 기저 개념과 연결된다.

연립방정식이 하나의 해를 가지는 것은 직선 표현에서 두 직선이 하나의 교점을 가지는 것과 맞물려 있다. 방정식 표현에서 한 방정식을, 두 방정식을 일차결합한 방정식으로 대체시킨 새로운 방정식 표현으로 해를 구할 수 있다. 하나의 해를 가지지 않는 경우로 두 방정식을 나타내는 직선이 평행하거나 일치하는 경우는 일차결합의 형태로 $0x+0y=c$[4]가 주어지고, 이 방정식으로 대체한 연립방정식이 만들어진다. 이 퇴화된 방정식의 해집합은 공집합이거나 평면 전체($\mathbb{R}^2$)이다. 퇴화된 방정식 $0x+0y=c$에서 방정식의 해집합은 상수 c의 값이 0인가 아닌가에 따라 정해진다. 즉, $c=0$이면 해집합은 평면 전체로 무

4) 일차방정식의 계수가 동시에 0이 아니라는 것을 동시에 0이 되는 방정식으로 개념을 확대시킬 수 있다. 이와 같이 계수가 동시에 0을 가지는 방정식을 퇴화된(degenerate) 방정식이라 한다(Lipschutz & Lipson, 2013).

한히 많은 해를 가지고, $c \neq 0$이면 해는 존재하지 않는다. 이 연립방정식의 해집합은 없거나 한 직선상의 순서쌍이다.

(식 3)에서 ①과 ②에 대응하는 직선이 평행하지도 않고 포개지지도 않은 경우라면 방향벡터 $(a_1,\ b_1)$과 $(a_2,\ b_2)$는 영벡터가 아니고 서로 동일직선상에 있지 않은, 즉 일차독립인 벡터이다. 이것은 행렬 표현

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

에서 계수 행렬

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

의 행렬식 값 $a_1b_2 - a_2b_1$이 0이 아니라는 사실과 연결되며, 역행렬에 의한 해법으로 연결된다. 또한 이 표현은 일차결합(또는 벡터) 표현

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

로 전환할 수 있다. 궁극적으로 계수행렬이 고정되었을 때, 상수항에 의한 열벡터가 이 계수 행렬의 두 열벡터의 일차결합으로 표현될 수 있는가와 연립방정식의 해의 존재 유무와 구체적 해가 결정되고 있다. 특히 위의 예처럼 계수행렬의 행렬식의 값이 0이 아니면 두 열벡터가 평면의 기저를 이루면서 어떤 상수값을 주더라도 해가 존재한다.

Ⅴ. 결 론

소거법은 중등학교부터 연립방정식의 해결에서 가장 많이 이용하는 해결 전략이다. 그러나 그것이 왜 유효한 방법인지에 대한 논의는 부족하다. 본 연구에서는 이에 주목하여, 미지수가 2개인 일차방정식으로 이루어진 연립방정식의 여러 가지 표현을 탐색하고, 그 해결 방법인 소거법의 의미를 분석했다.

첫째로, 연립방정식과 관련된 학습 내용과 연립방정식의 다양한 표현 유형에 관해 논의했다. 연립방정식은 중학교 2학년 수학에서 도입되며 고등학교 수학에서도 취급된다. 그러나 초등학교 수학에서도 연립방정식으로 해결할 수 있는 문장제가 제시된다. 연립방정식은 언어적 표현, 직사각형 표현, 방정식 표현, 직선(또는 그래프) 표현, 첨가 행렬 표현, 행렬 표현, 일차결합(또는 벡터) 표현으로 나타낼 수 있다.

둘째로, 가감법과 대입법의 형식적 조작을 단서로 도형을 이용한 전략에 관해 논의했다. 특히 직사각형 표현(Fong & Chong, 1995)을 이용했다. 또, 직선 표현에서 기울기와 절편에 의해 주어지는 비례식을 이용한 해법에 관해 논의했다. 이러한 논의에 따르면, 직사각형 표현을 활용한 전략은 언어적 표현 또는 방정식 표현에서 특히 계수가 자연수이고 그 해가 양의 값을 찾는데 적용된다. 이것은 가감법을 이해하여 대수적 방법으로 나아가는 전단계가 된다. 학교수학에서는 해를 직접적으로 구하는 Cramer의 공식을 취급하지 않지만, 기울기와 절편으로 Cramer의 공식을 얻을 수 있다. 이러한 과정은 수학적 사고의 유연성 측면에서 권장할 수 있다.

셋째로, 소거법에 대해 직선 표현을 활용해 그 유효성을 탐색했다. 소거법에서 활용되는 기본 조작을 살펴보고, 이들의 이론적 근거와 타당성에 대하여 직선과 벡터 표현을 통해 시각적 해석을 시도했다. 한 미지수를 소거하는 것은 축이나 축에 평행한 직선의 방정식을 구하고, 다시 이것을 사용하여 다른 축이나 축에 평행한 직선으로 바꾸어 주는 것에 해당한다. 직선에 대한 일차결합 문제는 직선의 방향벡터의 문제로 바꿀 수 있다. 소거법으로 해를 구하는 대수적이고 형식적인 절차에 대한 정당성을 한 정점을 지나는 직선군의 성질에 연결시킬 수 있다. 본 연구

에서의 이러한 시도는 대수적 사고와 기하적인 사고를 두 개의 기둥으로 보는 Giaquinto(2007)의 견해와 상통한다.

수학의 다양한 표현과 수학적 연결성을 강조하고 있는 NCTM(2000)과 교과 내용 지식과 다양한 표현을 사용하는 것이 교사의 교수학적 능력에 영향을 미친다(Sanchez & Llinares, 2003)는 점에서, 본 연구는 연립방정식에 대한 교사들의 전문성 신장에 기여할 것으로 본다. 또한 본 연구에서는 CAS 그래핑 계산기나 Geogebra와 같이 핫링크(hot link)를 구현하는 공학도구의 활용에 대해 논의하지는 않았지만, 본 연구의 아이디어를 실현하는데 공학도구가 유용할 것으로 본다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]. 서울.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2007-79호. 서울.

교육과학기술부(2011). **수학 익힘책 5-2**. 두산동아(주). 서울.

권석일, 임재훈(2007). 그림그리기 전략을 통한 초・중등수학의 연립방정식 지도 연결성 강화. **학교수학, 17**(2), 91-109.

권영수 외(2013). **선형대수학입문**. 서울: 북스힐.

김성준(2004). **대수의 사고요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

류희찬 외(2013). **중학교 수학 2**. 서울: 천재교과서.

심상길(2009). 교과서 연립방정식 단원에 제시된 수학사의 소재 분석 및 교수학적 분석. **학교수학, 11**(3), 415-429.

우정호 외(2009). **고등학교 수학 익힘책**. 서울: 두산(주).

우정호 외(2013). **중학교 수학 2**. 서울: 두산동아(주).

윤민지, 방정숙(2009). 5·6학년 학생들의 이원일차 연립방정식 형태의 문장제 해결 과정 분석. **수학교육논문집, 23**(3), 761-783.

이종희, 김부미(2003). 문장제 해결에서 구조-표현을 강조한 학습의 교수학적 효과분석. **학교수학, 5**(3), 361-384.

허은숙(2005). **고등학교에서의 선형대수개념 지도에 관한 연구 -수학적 연결을 중심으로-**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

Anton, H. (1994). *Elementary Linear Algebra (7th ed)*. John Wiley Sohns.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Fong, H. & Chong, T. (1995). Solving algebraic word problems. *Mathematics Teaching*, 151, 34-35.

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics - An epistemological study*. OXFORD Univ. Express.

Herscovics, N. & Linchevski, I.(1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic・Algebra・Analysis*. E. R. Hedrick, C. A. Noble (trans.). New York: Dover Publications. (원작은 1924년에 출판).

Lipschutz, S. & Lipson, M. L. (2013). *Linear Algebra (Fifth ed)*. McGraw-Hill.

NCTM (1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principle and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (2005). *Mathematical Discovery I*. (번역: 우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈, 원저는 1981년 출판). New York: John Wiley & Sons.

Sanchez, V. & Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 5-25.

Smith, S. A., Charles, R. I., Dossey J. A., & Bittinger, M. L. (2006). *Algebra 2 with Trigonometry*. Prentice Hall.

On Representations of Linear Systems and Analysis for the Meaning of Elimination Method

Kim, Jin Hwan (Yeungnam University)
Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)

Linear system is a basic subject matter of school mathematics courses. Even though elimination is a useful method to solve linear systems, its fundamental principles were not discussed pedagogically. The purpose of this study is to help the development of mathematical content knowledge on linear systems conceptions. To do this, various representations and translations among them were considered, and in particular, the basic principles for elimination method are analyzed geometrically. Rectangular representation is used to solve word problem treated in numbers of things in elementary mathematics and it is useful as a pre-stage to introduce elimination. Slopes and intercepts of lines associated linear equations are used to obtain the Cramer's formula and this solving method was showing the connection between algebraic and geometric procedures. Strategy deleting variables of linear systems by elementary operations is explored and associated with the movements of lines in the family of lines passing through a fixed point. The development of mathematical content knowledge is expected to enhance pedagogical content knowledges.

* Key Words : Linear system(연립일차방정식), Representation(표현), Connectedness(연결성), Elimination(소거법), Elementary Operation(기본 작용).

논문접수 : 2015. 7. 30
논문수정 : 2015. 9. 10
심사완료 : 2015. 9. 10