대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 3, 263 ~ 279. Aug 2015

유리수와 무리수의 합집합을 넘어서: 실수가 자명하다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있는가?[1)]

이 지 현*

유리수에서 실수로의 확장 혹은 무리수의 존재성을 수학적으로 정당화하기 위해서는 완비성 공리가 필요하므로, 실수의 도입은 학교수학에서 가장 가르치기 어려운 주제 중 하나이다. 이 연구에서는 실수를 '유리수와 무리수의 합집합'으로 정의하는 학교수학의 교수학적 변환이 어떠한 교수학적 공백을 남겨놓을 수 있는지를 살펴보고, 유리수에서 실수로의 수 체계 확장의 이유, 임의의 비순환 무한소수의 존재 이유 등에 대한 예비교사들의 설명을 분석하여 대학수학의 학습에도 불구하고 예비교사들의 실수에 대한 피상적인 이해를 구체적으로 확인하였다. 교수학적 공백을 인식하고 학교수학과 대학수학을 연결함으로서, 예비교사들이 실수 개념이 자명하다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있었는지를 논의하였다.

Ⅰ. 서 론

0, -1과 같은 음수, $\sqrt{2}\cdot\pi$ 등의 무리수, 허수 i 등 소위 새로운 '수'의 등장으로 인한 수 체계의 확장은 수학사의 상당부분을 차지하는 중대한 문제였다. 피타고라스학파는 만물을 소위 통약 가능한 수, 즉 유리수만으로 설명할 수 있다고 믿었으므로 유리수가 아닌 수의 존재를 인정할 수 없었다. 무리수에 대한 거센 반발은 무리수(irrational)라는 용어의 부정적인 뉘앙스에 고스란히 남아있다. 고대 그리스의 통약불가능성의 위기로부터 시작된 유리수에서 실수 체계로의 확장이라는 문제는 19세기 말 Weierstrass · Dedekind · Cantor 등이 실수를 엄밀하게 형식적으로 구성하는 데 성공하면서 해결되었다. 이와 같이 실수는 오랜 논쟁의 대상이었으나 학교수학에서는 유리수와 무리수의 합집합으로 정의되므로 더 이상 문제적(problematic) 지식으로 드러나지 않는다.

정수 · 유리수 · 복소수는 사칙연산을 자유롭게 할 수 있다는 산술적 필요성 혹은 방정식의 근이라는 대수적 필요성으로 학교수학 수준에서도 그 존재 이유를 수학적으로 충분히 설명할 수 있다. 반면 무리수의 존재 이유를 수학적으로 정당화하기 위해서는 학교수학의 범위를 벗어나는 완비성 공리가 필요하므로, 유리수에서 실수로의 수 체계 확장은 학교수학에서 가장 가르치기 어려운 주제 중 하나이다(Forbes, 1967). 교수학적 난점에도 불구하고 실수는 학교수학에서 안 가르칠 수 없는 필수불가결한 주제인데, 학교수학에서는 (유리수가 아닌) '순환소수로 나타낼 수

* 인천대학교, jihyunlee@incheon.ac.kr
1) 이 논문은 2015년도 인천대학교 교내연구비에 의하여 연구되었으며, 이 논문의 초고는 2015년 수학교육관련 학회 연합 학술대회에서 발표되었음.

없는 무한소수' 혹은 '(넓이가 2가 되는 정사각형의 한 변의 길이 $\sqrt{2}$ 와 같은) 제곱근'으로 무리수의 존재를 직관적으로 정당화하고 있다. Bronner(1997), González-Martín, Giraldo, Souto (2013)는 학교수학의 교수학적 변환이 실수 개념 도입에서의 난점을 간과하거나 혹은 단순히 우회한다는 것을 '교수학적 공백'이라는 용어로 지적하였다. 교수학적 변환은 어떤 지식이 창조·설계·선택·사용될 때부터 어떤 특정 제도(institution)에서 실제로 가르쳐질 때까지 지식이 겪게 되는 변화를 말한다. Chevallard는 '교수학적 변환'을 가르칠 지식이 '자명하다는 착각(illusion of transparency)', 즉 사물이나 사실을 기지의 것으로 무비판적으로 수용하는 태도에서 벗어나기 위한 분석적 도구로 고안하였다(Wozniak, Bosch, Artaud, 2015). Chevallard는 수학교사가 가르칠 지식을 절대적인 것으로 간주하여 더 이상의 어떠한 질문도 제기하지 않는 수동적인 상태에 안주하는 것을 '자명성의 착각'이라고 지적하였다 (Bergsten, Jablonka, Klisinska, 2010).

유리수와 무리수의 합집합이라는 실수 정의를 당연한 것으로 받아들이는 교사는, 실수에 대한 학교수학의 교수학적 변환이 어떠한 공백을 남겨놓고 있는지 인지하기 어렵다. 이 연구는 예비교사들이 유리수에서 실수로의 수 체계 확장의 이유, 혹은 임의의 비순환 무한소수의 존재 이유(raison d'être) 등을 어떻게 설명하는지를 살펴봄으로서 예비교사들이 가지고 있었던 실수에 대한 자명성의 착각을 구체적으로 확인한다. 또 교수학적 공백을 인식하고 이를 통하여 학교수학과 대학수학을 연결함으로서, 예비교사들이 실수 개념이 자명하다는 선입견으로부터 벗어나는 과정을 분석 및 논의하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

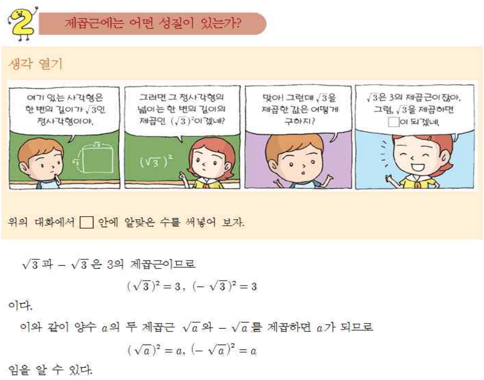
실수는 '완비순서체(complete ordered field)'의 공리체계로 정의되며, 데데킨트 절단·유리수 코시수열의 동치류 등의 여러 방법으로 유리수로부터 완비순서체를 형식적으로 구성함으로서 그 존재성을 증명할 수 있다. 해석학에서는 학교 수학과 달리 무리수 집합을 따로 기술하지 않고 실수와 유리수 집합의 차이를 완비성 공리, 즉 "공집합이 아닌 위로 유계인 부분집합의 최소상계가 존재 한다"로 규정한다. 통상적인 해석학 텍스트(Rudin, 1976; 김성기, 김도한, 계승혁, 2004)에서는 실수를 완비순서체로 정의한 후, n 제곱하여 양수 a가 되는 실수(즉, $\sqrt[n]{a}$)의 존재성과 같은 완비성 공리의 결과들을 소개하고 있다.

1. 학교수학에서 제시하는 무리수의 존재 이유: 비순환 무한소수와 제곱근

중학교 수학 2에서는 유리수를 정수나 유한소수 또는 순환 소수로 나타낼 수 있음을 다룬 후, 역으로 모든 유한소수와 순환소수는 유리수가 된다는 사실을 확인한다. 사실 $0.\dot{6}$ 과 같은 순환소수는 원래 수열 $0.6, 0.66, 0.666, \cdots, \frac{6}{9}(1-(\frac{1}{10})^n), \cdots$ 의 극한이다. 극한 개념을 아직 다루지 않는 중학교 수학에서는, 주어진 순환소수에 적절한 10의 거듭제곱을 곱하여 얻는 소수부분이 같은 다른 무한소수와의 차를 통하여 순환소수를 분수로 나타내는 직관적인 알고리즘을 소개하고 있다. 그러나 중학생들에게 이러한 알고리즘은 기계적인 절차에 불과하며 결과에 대한 확신을 주지도 못한다(조한혁, 최영기, 1999). 이와 같은 문제점에도 불구하고 중학교 수학에서 순환소수를 위와 같이 취급하는 이유는, 유리수라는 것과 그 수를 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다는 것이

동치임을 밝힘으로서 무리수, 즉 ‘유리수가 아닌 수’를 ‘순환소수로 나타낼 수 없는 무한소수’로 도입할 수 있기 때문이다(김홍기, 2004).

이후 중학교 수학 3(최용준 외, 2011)에서는 [그림 II-1]과 같이 먼저 (양수의) 제곱근의 정의 및 성질을 다룬 후, 무리수의 개념을 도입하고 있다.



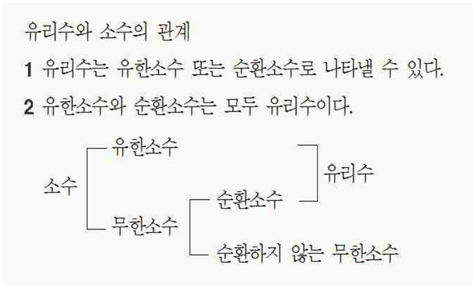
[그림 II-1] 제곱근의 도입
(최용준 외, 2011: p.14)

유리수는 유한소수와 순환소수로 표현되며, 무리수는 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 됨을 알게 한다. 이를 바탕으로 실수 집합이 유리수와 무리수의 합집합임을 설명하고 있다.

2. 실수에 대한 학교수학의 교수학적 공백

González-Martín, Giraldo, Souto (2013: pp. 236-239)는 브라질 중고등교과서 14종에서의 실수의 도입을 분석하였다. 우리 교과서와 마찬가지로, 브라질 교과서에서도 무리수를 ‘분수로 나타낼 수 없는 수(D_A)’ 혹은 ‘순환하지 않는 무한소수로 나타내는 수(D_B)’로, 실수는 ‘유리수 혹은 무리수’로 정의하고 있다. 그런데 이들 연구자들은 무리수 정의 D_A와 D_B는 각각 ‘분수가 아닌 수’ 혹은 ‘비순환 무한 소수 표상’을 갖는 수의 존재성을 확립하기 보다는 가정하고 있으며, 두 정의 모두 이미 존재한다고 가정하는 수 집합(즉, 다름 아닌 실수 집합)의 특정 부분집합을 무리수라고 명명하는 것 이상의 역할을 하지 못한다고 지적한다. 이와 같은 무리수 정의 다음에 실수를 유리수 혹은 무리수라고 정의하므로, 실수의 정의는 무리수의 정의에 의존하고 있다. 이 점에서 학교수학에서 실수와 무리수의 정의는 순환적 정의라는 한계를 가지고 있다[2].

한편, 비순환 무한소수로서의 무리수 정의는 [그림 II-2]에서 ‘임의의 무한소수에는 하나의 실수가 대응한다’는 정당화되지 않은 가정에 의존하는데, Forbes(1967)는 실수 체계로의 확장이 다음 질문을 우회하고 있다고 지적하였다.



[그림 II-2] 중학교 수학 2의
유리수와 순환소수 (김서령 외, 2014: p.19)

비순환 무한소수를 생각할 수 있다는 점이, 이러한 기호가 나타내는 수가 정말 있다고 주장할 수 있는 근거가 될 수 있는가? 또한 이 설명대로 비순환 무한소수 기호에 대응되는 어떤

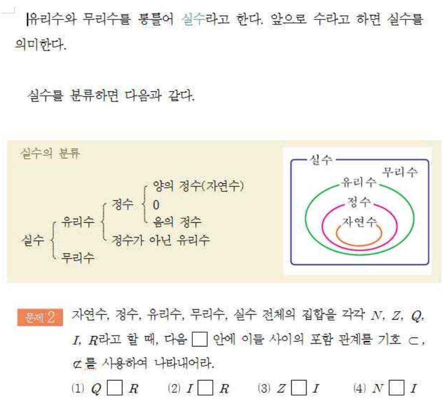
2) Savizi, Semnani, Zadeh (2013) 역시 학교수학에서 흔히 찾아볼 수 있는 무리수와 실수에 대한 다음 설명도 순환논리임을 지적하고 있다: ‘수직선의 각 점은 유리수에 대응하지 않으면 무리수에 대응한다. 또 유리수 집합과 무리수 집합을 합하면, 수직선을 얻을 수 있다’. 여기서 수직선은 무리수 집합으로 정의되는데, 무리수 집합은 또 다시 수직선으로 정의된다.

수가 있다고 가정한다면, 이 수는 비순환 무한 소수 기호에 대응되는 수' 라는 것 이외에 어떤 다른 쓸모가 있는가(Forbes, 1967: p.802)?

이와 같이 중학교수학에서는 "왜 임의의 무한소수(특히 비순환 무한소수)가 하나의 수에 대응하도록 수 개념을 확장해야만 하는가?"라는 질문을 남겨놓은 채, 무한소수 표상의 전체성을 암묵적으로 가정하여 유리수에서 실수로 확장한다.

제곱근은 비순환 무한소수와 함께 학교수학에서 유리수에서 실수 체계로의 확장의 이유를 설명하는 주된 근거가 된다. 해석학에서는 실수를 완비순서체로 정의한 후, n제곱하여 양수 a가 되는 실수가 존재한다는 것을 완비성 공리를 이용하여 증명한다[3]. 중학교 수학 3에서는 해석학의 순서와 반대로 제곱근을 먼저 소개한 후 실수의 정의를 제시하는데, Bronner(1997), González-Martín, Giraldo, Souto(2013:p.239)는 학교수학에서는 $\sqrt{2}$와 같은 제곱근이 사실 학생들에게 '새로운 수'임을 명확히 언급하지 않은 상태에서 무리수(혹은 실수)라는 용어의 도입 전 제곱근과 그 성질을 먼저 다루고 있음에 주목하고 있다. 사실 $\sqrt{2}$라는 기호의 사용이 제곱해서 2가 되는 수의 존재성을 함의하는 것은 아니다[4]. González-Martín, Giraldo, Souto는 학교수학에서는 제곱근을 실수에 앞서 다룸으로서, 제곱근이 이후에 등장하는 무리수의 존재를 정당화하는 역할을 하고 있다고 보았다. 한편, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$ 과 같은 제곱근은 대수적 수이며, 유리수가 아닌 실수 중에서는 제곱근과 달리 유리계수 방정식의 해가 아닌 초월수가 훨씬 더 많다는 사실을 고려한다면, 제곱근이라는 대수적인 필요는 실수로의 확장에 대한 부분적인 설명에 불과하다(Bloch, 2011: pp.33-34).

Bronner(1997), González-Martín, Giraldo, Souto (2013)는 학교수학에서는 무리수의 존재이유 혹은 유리수에서 실수로 확장하는 이유를 명확하게 설명하는 대신, 일련의 정의와 성질을 나열하는 것으로 실수를 도입하고 있음을 지적하였다. 특히 Bronner(1997)는 이를 학교수학이라는 제도에서 실수에 대한 "제도적인 교수학적 공백(institutional didactic void)"이라고 불렀다. 그러나 학교수학에서는 근호를 포함한 식의 계산을 강조하고, [그림 II-3]과 같이 수 체계의 부분 집합에 대한 기호를 제시하기 때문에, 실수에 대한 교수학적 공백은 겉으로 잘 드러나지 않는다(Bronner, 1997).


유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다. 앞으로 수라고 하면 실수를 의미한다.

실수를 분류하면 다음과 같다.

실수의 분류

실수 { 유리수 { 정수 { 양의 정수(자연수), 0, 음의 정수 }, 정수가 아닌 유리수 }, 무리수 }

문제 2 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수 전체의 집합을 각각 N, Z, Q, I, R라고 할 때, 다음 $\square$ 안에 이들 사이의 포함 관계를 기호 $\subset$, $\not\subset$를 사용하여 나타내어라.

(1) $Q \square R$ (2) $I \square R$ (3) $Z \square I$ (4) $N \square I$

[그림 II-3] 실수의 분류
(최용준 외, 2011: pp.20-21)

이상과 같은 실수에 대한 교수학적 공백의 인식은 학교수학 이상의 수학적 관점을 필요로 한다. 엄밀한 이론적 정당화 없이 비형식적으로 실

3) 학교 수학에서도 "제곱하여 2가 되는 유리수는 존재하지 않는다"에 대한 귀류법 증명을 찾아볼 수 있다. 하지만 이 증명이 "실수로서의 $\sqrt{2}$의 존재성"까지 증명한 것은 아닌데, 제곱하여 2가 되는 실수의 존재성에 대한 증명은 Rudin(1976: p.10)을 참조하기 바란다.

4) Djebali(2004)는 해석학을 배우는 대학생들이 이미 중고등학교 시절부터 $(\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})=2$를 만족하는 기호 $\sqrt{2}$에 친숙하기 때문에, 왜 완비성공리를 이용하여 제곱하여 2가 되는 실수가 존재한다는 것을 증명해야 하는지를 받아들이기 어려워한다는 것을 관찰하고 있다.

수를 도입하는 학교수학에서, 교수학적 공백의 발생은 피할 수 없는 문제이다. 그러나 교사의 실수에 대한 설명의 질은, 이것을 처음 배우는 학생들과 마찬가지로 아예 이러한 교수학적 공백을 전혀 인지하지 못하거나 간과하는 수준으로부터 교사의 설명이 실수에 대한 좀 더 엄밀한 형식화를 암시 혹은 준비가 될 수 있는 수준까지 매우 다양할 수 있다.

Ⅲ. 연구방법

2014년도 2학기 I대학교 ‘수학교육과정과 교재연구’ 강의를 수강했던 예비교사 16명을[5] 대상으로, <표 III-1>와 같은 교수실험을 실시하였다.

먼저 사전조사에서는 예비교사들의 실수에 대한 기본적인 교과내용지식을 확인하였다. 사전과제에서는 학교수학에서 비순환 무한소수로 무리수를 도입할 때 우회하고 있는 질문을 구체적으로 “0.101001000⋯와 같은 비순환 무한소수에 대응하는 수는 왜 필요한가?”로 제시하여, 예비교사들을 교수학적 공백에 직면하게 하고 이에 대한 답변을 생각해보도록 함으로서 예비교사들이 실수 개념에 대해 가지고 있었던 자명성의 착각은 무엇인지를 구체적으로 확인하였다. 이후 진행된 강의에서는 실수 개념을 낳은 수학적 질문과 이에 대한 Pythagoras · Stevin · Dedekind의 답을 살펴보고, 유리수에서 실수체계로의 확장의 필요성과 무한소수기호가 어떻게 완비성공리를 함의하고 있는지를 다룸으로서 예비교사들이 실수에 대해 가지고 있었던 자명성의 착각에서 벗어나도록 유도하였다. 마지막으로 최종 보고서에서는 예비교사들이 실수에 대한 자신의 인식변화를 반성할 수 있는 기회를 제공하였다.

Ⅳ. 연구결과

1. 예비교사들의 실수개념이 자명하다는 착각

[부록]에 제시한 사전조사 문항을 통하여, 예

<표 III-1> 교수실험의 개요

	목적	내용
사전조사	예비교사들의 실수에 대한 교과지식 확인	학교수학과 대학수학에서 실수의 정의 및 그 차이, 유리수/실수의 차이와 실수로 확장하는 이유, 1.41421356237⋯는 $\sqrt{2}$와 같은 수인가?
사전과제	실수에 대한 교수학적 공백에 직면하기	0.101001000⋯와 같은 비순환 무한소수에 대응하는 수가 왜 필요한가?
강의	예비교사들의 실수에 대해 가지고 있는 자명성의 착각에 도전	- 실수 개념을 낳은 수학적 질문 소개: 어떤 수체계가 연속체로서 직선의 구조를 기술할 수 있는가?, 이 질문에 대한 Pythagoras · Stevin · Dedekind가 제시한 답은 무엇이었는가? - 유리수에서 실수체계로 확장한다는 것은 자연수-정수, 정수-유리수의 확장과는 어떻게 다른가? - 무한소수란 무엇인가? 무한소수는 어떤 의미에서 ‘연속적’이라고 할 수 있는가? 무한소수기호는 어떻게 완비성공리를 함의하는가?
강의 후 최종 보고서	실수에 대한 자신의 인식변화를 반성	- 유리수에서 실수로의 확장에 대해 새로 알게 된 것은 무엇인가?, - 학교수학 및 대학수학에서 실수를 도입하고 설명하는 방식의 문제점은 무엇이라고 생각하며, 실수를 자신이 배웠던 것과 어떻게 다르게 가르치고 싶은가?

5) 학부 3학년 학생이 12명, 교육대학원생은 4명이었으며, 강의 전 설문 조사에서 강의 후 최종 보고서의 수합까지 교수 실험의 과정은 2014년 9월 한 달 동안 진행되었다.

비교사들의 실수에 대한 교과지식을 점검하였다[6]. 대부분의 예비교사들은 학교수학의 실수 정의를 '유리수와 무리수의 합집합'으로 서술하였다. 나중에 제시한 [문항 4]에서 11명이 완비성 공리를 정확하게 서술할 수 있었음에도 불구하고, [문항 2]에서 대학수학에서의 실수 정의를 '완비 순서체'라고 서술한 예비교사는 5명에 지나지 않았다. 다음은 [문항 2]에서 유리수를 포함하는 더 큰 수 체계가 필요한 이유에 대한 예비교사들의 대표적인 설명이었다.

- 무리수(비순환 무한소수)를 도입하면서 유리수보다 더 포괄적인 체계에서 연산을 하기 위해서입니다(예비교사 W).
- 유리수로 설명할 수 없는 무리수가 필요했기 때문에(예비교사 H)

- 수직선위에는 셀 수 없는 수많은 수들로 이루어져 있는데 유리수만으로 표현이 불가능하기 때문에(왜냐하면 (비순환) 무한소수는 유리수가 아니지만 수직선 위에 있음), 실수로 수체계로 확장시킨 것 같다(예비교사 M·S).

이들 예비교사들은 단지 '분수로 나타낼 수 없는 수(무리수)' 혹은 '순환하지 않는 무한소수로 나타나는 수'를 포함하기 위하여 (왜 이러한 수까지 포함하는 수 체계를 생각해야 하는가에 대해서는 설명 없이) 유리수에서 실수 체계로 확장한다고 설명하고 있었다.

[문항 3]에서는 [그림 IV-1]을 제시하고 이렇게 얻는 무한소수 $1.41421356237\cdots$가 $\sqrt{2}$와 같은 값인지 아니면 근삿값인지를 물었는데, 이 무한소수가 $\sqrt{2}$와 같다고 응답한 예비교사들은 절반 정도인 일곱 명에 그쳤다. 학생들은 무한소수의 소수점 아래의 무한한 숫자 열을 끝없이 계속되는 과정으로 해석하며, 소수점 아래의 모든 숫자를 알 수 없다는 이유에서 무한소수를 정확한 수로 인정하지 않는다(Savizi, Semnani, Zadeh, 2013). E의 반응은 예비교사들도 소수점 아래 끝까지 그 숫자를 명시할 수 없는 무한소수를 하나의 정확한 수로 받아들이는 데 어려움을 겪을 수 있음을 시사한다.

<표 IV-1> 실수에 대한 교과내용지식 확인 사전조사 결과

사전조사 문항[7]
[1] 학교수학에서 실수의 정의
- 유리수와 무리수의 합집합(14), 수직선 위의 임의의 점과 일대일 대응 관계를 만족하는 수(2)
대학수학에서 실수 정의
- 완비순서체(5), 오답· 무응답(11)
[2] 유리수와 실수체계의 차이
- 무리수의 포함 유무(9), 완비성 공리(3), 방정식 $x^2=2$의 근 포함 유무(1), 사칙 연산에 대해 닫혀있다는 성질(2), 무응답(1)
왜 유리수에서 실수로 확장하는가?
- '분수로 나타낼 수 없는 수' 혹은 '순환하지 않는 무한소수로 나타나는 수'를 포함하기 위하여(8), $x^2=2$과 같은 방정식의 해를 구하기 위하여(5), 유리수 체계는 완비성 공리를 만족하지 않으므로(1), 무응답(2)
[3] 순환하지 않는 무한소수 $1.41421356237\cdots$는 $\sqrt{2}$와 같은 수인가 아닌가?
- 무한소수 $1.41421356237\cdots$는 $\sqrt{2}$의 근삿값이다(8), 무한소수 $1.41421356237\cdots$는 $\sqrt{2}$와 같다(7), 무응답(1)
[4] 실수의 완비성 공리를 서술하시오
- 완비성 공리 옳게 서술(11), 오답· 무응답(5)

6) 완비성 공리에 대한 문항 [4]는 앞 문항 [1]-[3]에 대한 힌트가 되지 않도록 연구자는 먼저 문항 [1]-[3]에 대한 응답을 회수한 후 다른 시험지에 문항 [4]를 제시하였다.
7) 반응 다음의 괄호 안 숫자는 이와 같이 응답한 예비교사의 수를 나타낸다.

무한소수라는 것은 끝없는 수의 진행이다. 그래서 무한소수가 길어질수록 $\sqrt{2}$와 더 근삿값으로 가까워지겠지만 같아질 수는 없을 것이다. 근삿값의 추정만 가능하다(예비교사 E).

예비교사 M은 다음과 같이 $1.41421356237\cdots$가 정말 $\sqrt{2}$인지를 알 수 없으므로 근삿값일 것 같다고 하였다.

$\sqrt{2}$가 1.4142와 1.4143사이에 있는 수임을 알 수 있지만 정확히 위에 표현한 무한소수와 같음은 알 수는 없고, 근사하는 근삿값일 것 같다(예비교사 M).

순환하는 무한소수는 중학교 수학에서 제시하는 알고리즘이나 혹은 무한 등비급수의 극한값으로 그 값이 정확히 어떤 유리수인지를 알 수 있다. 그러나 $1.41421356237\cdots$는 유한소수가 아니므로 제곱해서 2가 됨을 확인할 수 없는데, 이 무한소수가 $\sqrt{2}$이라고 응답한 예비교사들도 “순환하지 않는 무한소수는 무리수이다” 외에는 왜 $\sqrt{2}$인지 확인할 수 있는 근거를 가지고 있지 않았다. 이 점에서 이 무한소수가 $\sqrt{2}$라고 답한 예비교사들과 $1.41421356237\cdots$가 $\sqrt{2}$인지 알 수 없기 때문에 근삿값이라고 한 M의 차이는 단지 “순환하지 않는 무한소수는 무리수이다”라는 것만으로 $1.41421356237\cdots = \sqrt{2}$를 확신할 수 있었는가 없었는가의 차이에 불과하였음을 알 수 있었다.

사전과제에서 연구자는 중학교 수학에서 비순환 무한소수로서 무리수를 도입할 때 제기할 수 있는 “왜 $0.101001000\cdots$와 같은 비순환 무한소수에 대응하는 수가 필요한가?”라는 질문을, 다음과 같은 질문 상황으로 제시하여 이에 대해 예비교사들이 답변을 써보도록 하였다.

소민: 선생님의 말씀은 어떤 이야기인지 알겠어요. 그런데 전 순환하지 않는 무한소수 $0.101001000\cdots$라는 기호를 생각할 수 있다는 것이, 이 기호가 나타내는 수가 정말 있다고 주장할 수 있는 근거가 되는 것 같지 않아요. 또 만약 선생님의 설명대로 $0.101001000\cdots$에 대응되는 어떤 수가 있다고 해도, 이 수가 무한소수 기호 ‘$0.101001000\cdots$에 대응되는 수’라는 의미 이외에 어떤 다른 쓸모가 있을지도 모르겠어요.
[질문] 여러분은 위와 같은 소민이의 질문에 대해 어떻게 생각합니까? 여러분이 만약 교사가 되어 이와 같이 질문하는 학생을 가르친다면, 어떻게 설명하겠습니까?

연구자는 16명의 예비교사들이 제시한 각 설명에서 찾아볼 수 있었던 하나 이상의 근거들을 모두 기록하여 이 중 유사한 근거들을 묶어 <표 IV-2>의 총 6가지로 유형화하였다.

가장 많은 예비교사(7명)들이 제시한 설명은 바로 $\sqrt{2}$(혹은 제곱근)가 비순환 무한소수이기 때문에, $\sqrt{2}$와 같이 순환하지 않는 무한소수 $0.101001000\cdots$가 필요하다는 것이었다. [유형 1]과 같이 $\sqrt{2}$에 의존한 설명은, 예비교사들에게 대표적인 무리수는 바로 $\sqrt{2}$임을 보여주고 있다. 그런데 이렇게 대답한 예비교사 중 Y는 한 발 더 나아가 ‘비순환 무한소수 1.41421356…가 $x^2=2$이라는 방정식의 해라는 의미를 가지는 것처럼, $0.101001000\cdots$도 이와 같은 어떤 이차방정식의 해가 될 것’이라는 설명을 덧붙였는데, 이렇게 Y는 임의의 무리수도 $\sqrt{2}$와 같은 대수적 수일 것이라고 생각하고 있었다.

[유형 2]는 $0.101001000\cdots$는 유리수가 아니며, 따라서 유리수(혹은 분수)로 나타낼 수 없는 수를 표현하기 위하여 비순환 무한소수가 필요하다는 것이었다. 그러나 왜 비순환 무한소수에 대응하는 수를 생각하는가라는 질문에 순환소수가 아닌 수를 표현하기 위해서라는 답변은 결국 동어 반복에 지나지 않는다. [유형 3]에서는 이 무한소수의 존재 이유로 이 무한소수가 두 유리수 사이에 있는 유리수가 아닌 수라는 점을 근거로 들었다. $0.101001000\cdots$가 단지 두 유리수 사이

에 있는 유리수 아닌 수라는 점만을 지적했던 다른 예비교사들과 달리, W는 다음과 같이 서로 다른 유리수 사이에는 항상 이와 같이 순환하지 않는 무한소수가 있으므로 "수직선을 가득 채우려면" 이러한 순환하는 무한소수를 이용하여 채워야 한다고 연속성을 설명하고자 하였다.

> 수직선 위에 0.101001000⋯ 가 나타내는 대략적인 위치를 찍어보게 하고 0.1과 0.2사이 어딘가에 표시가 되겠지만, 0.101001000⋯외에도 수직선 위에 어떠한 점을 찍게 되면 유리수와 그보다 더 큰 유리수 사이에는 항상 이러한 순환하지 않는 무한소수가 존재한다는 것을 설명하여 무리수의 필요성에 대해 가르칠 것이다(중략). 수직선에 유리수와 그것 보다 조금 더 큰 유리수를 생각하면 그 사이에 분명히 순환하지 않는 무한소수가 있음을 설명하고 수직선이 유리수만으로는 가득 채울 수 없음도 설명하여 이러한 순환하지 않는 무한소수를 이용하여 수직선을 가득 채울 수 있다는 것을 가르쳐야 한다(예비교사 W).

[유형 4]는 특히 기호 0.101001000⋯가 이 기호가 나타내는 수가 정말 있다는 근거가 될 수 없다는 학생의 주장에 대한 반박이었다. 학생들은 그럴듯해 보이는 수학적 기호가 있으면, 이 기호가 의미하는 수학적 대상을 충분히 정의할 수 있다는 무의식적인 믿음을 가지고 있는데, Ervynck(1994)은 이를 '기호 페티시즘'이라고 지적하였다. 예를 들어 많은 학생들은 ∞기호로부터 '무한대'가 수로서 존재한다고 생각한다. 이 점에서 "일단 소수라는 것은 수의 한 표현 방법이기 때문에 저렇게 기호로 나타낼 수 있다는 것은 그것이 실존하는 수임을 충분히 증명해 준다(예비교사 J)"과 같은 설명은 기호와 그 기호가

<표 IV-2> 0.101001000⋯의 존재이유에 대한 예비교사들의 설명 유형

0.101001000⋯의 존재이유	구체적인 응답 사례
[유형 1](제곱근, 피타고라스 정리, 방정식의 해)로서의 $\sqrt{2}$를 인용하여, $\sqrt{2}$와 같이 순환하지 않는 무한소수가 필요하다(7명).	'0.101001000⋯이런 수가 존재한다고 해도 이 무한소수를 나타내는 것 이외에 어떤 쓸모가 있는가?' 라는 질문에는 변의 길이가 1인 직각 이등변 삼각형을 제시해주고 이 삼각형의 빗변의 길이는 존재하는데, 이 길이를 유리수로 나타낼 수 없다는 당혹스러운 상황을 통해 0.101001000⋯이런 무한소수들이 기호 이외에 큰 의미가 있다는 것을 스스로 깨닫게 할 수 있도록 할 것이다(예비교사 H)
[유형 2]분수로 나타낼 수 없는 수를 표현하기 위해 필요하다(5명).	그런데 가만 보면 '순환하지 않는 무한 소수'라는 특징을 공통적으로 가진 수들이 있을 거야(예 생략). 이러한 수들은 분수로 표현 될 수 없기 때문에 유리수의 속성을 가지지 못해, 따라서 이러한 특징들을 가진 수들을 한데 모아 '무리수'라고 일컫는 거야(예비교사 B)
[유형 3]유리수와 그보다 더 큰 유리수 사이에는 항상 0.101001000⋯와 같은 순환하지 않는 무한소수가 존재한다(5명).	먼저 0.101001000⋯는 순환하지 않는 무한소수이므로 유리수가 아닌 수로 정의한다. 따라서 이런 수들을 나타내려면 무리수라는 새로운 수체계가 필요함을 말하고, 유리수와 무리수를 수직선상에 나타내었을 때, 0.101001000⋯은 0.101001,0.101002 두 유리수 사이에 있으므로 0.101001000⋯에 대응되는 수 이외의 의미가 있음을 보인다(예비교사 C)
[유형 4]기호가 있으면 그 기호에 해당하는 수가 존재한다(3명).	수학에서는 0.101001000⋯라는 기호를 사용하는 것 자체가 이에 대응하는 수가 있다는 약속을 한 것이기 때문에, 이 기호 0.101001000⋯를 쓰는 순간 이 기호가 나타내는 수가 정말 있다고 주장할 수 있는 충분한 근거가 된다."고 말해줄 것이다(예비교사 N).
[유형 5]0.101001000⋯는 (소수점 아래의) 모든 자리에 등장하는 숫자에 대한 정보를 알 수 있고 계산도 가능한 정확한 수이다(2명).	0.101001000⋯과 같은 무한소수는 순환마디는 발견할 수 없지만 주어진 규칙성으로부터 각 자리의 수에 대한 일의성이 결정되는 것이지요(예비교사 G).
[유형 6]실수(real number)의 단어에서 'real'의 의미를 강조(1명)	실수라는 용어의 허수(imaginary)의 '가상적'과 대비되는 '실재하는(real)'이라는 의미를 강조함으로서 비순환 무한소수가 표상하는 수는 정말 존재한다고 주장함(예비교사 K).

표상하는 수학적 대상의 존재성을 동일시하는 기호 페티시즘에 호소하고 있음을 알 수 있다.

[유형 5]의 설명은 이 무한소수가 순환마디는 없으나 규칙성이 있으므로, "(소수점 아래의) 모든 자리의 수에 대한 정보를 알 수 있고 계산도 가능한 정확한 수(예비교사 G)"임을 강조하고 있었다. 학생들은 비순환 무한소수는 소수점 아래 끝자리까지의 모든 숫자를 명확하게 알 수 없으므로, 무리수는 '정확하지 않은, 모호한 수'라고 생각하기 쉽다(Fischbein, Jehiam, Cohen, 1995; Zazkis, Sirotic, 2010; Savizi, Semnani, Zadeh, 2013). [유형 5]의 설명은 비순환 무한소수가 야기하는 이와 같은 개념이미지를 염두에 둔 것이었으나, 이렇게 설명한 예비교사 G와 N은 비순환 무한소수가 소숫점 아래의 숫자가 임의로 등장하는 것이 아닌 ($0.101001000\cdots$와 같이) 규칙성을 가져야 한다고 고집하고 있었다. 교과서에서도 제곱근 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, 또 π외에는 이렇게 규칙성이 있는 비순환 무한소수만을 소개하고 있는데, 예를 들어 다음은 2007 교육과정 해설의 설명이다.

> 무한소수 중에는 $0.1010010001\cdots, 0.1121231234\cdots$ 등과 같이 수의 나열 규칙은 있지만 순환하지 않는 소수가 있음을 예로 보이고, π도 순환하지 않는 무한 소수로 알려져 있음을 알게 한다(교육인적자원부, 2008, p.76).

무한소수 $\pm a_0 . a_1 a_2 a_3 .....$에서는 소수점 아래에 0부터 9까지의 '임의의' 숫자가 '무한히' 등장할 수 있다. 그러나 학교수학에서는 무한소수를 유한소수가 아닌 것으로만 설명하며, 위 예시와 같이 나열 규칙이 있는 비순환 무한소수들이 제시된다는 점을 고려할 때, 예비교사 G와 같은 제한된 인식은 이러한 교과서의 접근이 의도하지 않게 낳은 결과라고도 볼 수 있을 것이다.

대부분의 예비교사들은 사전과제의 질문 자체를 낯설게 느끼고 있었다. 그러나 이것이 비순환 무한소수를 처음 접하는 학생이 생각할 수도 있는 질문임을 인정하고 이에 대해 고민하면서, 중학교의 실수 개념화에서는 유리수에서 실수로 확장하는 이유에 대하여 명확한 설명을 하지 않았다는 점을 서서히 깨닫고 있었다.

> 나는 중학교 때 순환하지 않는 무한소수는 제곱근이라는 기호를 이용하여 하나의 수(무리수)로 표현될 수 있다는 것을 단순히 받아들여 지금까지 수학 공부를 해왔다. 그러나 소민이의 질문을 보고 저렇게 생각하는 학생도 충분히 있을 수 있겠다는 생각을 했다. 나는 수 체계 확장에 대해 깊게 생각해보지 않고 당연하다는 듯이 자연스럽게 이해했지만, 처음 배우는 아이들에게는 이것이 쉽게 이해되지 않을 수 있다는 것을 알게 되었다(예비교사 A).

이상과 같은 조사를 통하여, 연구자는 실수와 관련하여 Chevallard가 말한 '자명성의 착각'이라고 간주할 수 있는 다음과 같은 양상을 관찰할 수 있었다. 본 연구에 참여했던 예비교사들 중 상당수가 완비성 공리가 무엇인지 알고 있었음에도 불구하고, 이들에게 가장 유효한 실수 정의는 여전히 '유리수와 무리수의 합집합'이었다. 대부분의 예비교사들은 유리수에서 실수로의 확장의 이유 혹은 비순환 무한소수의 존재이유를 질문하였을 때, 유리수가 아닌 실수(무리수 혹은 비순환 무한소수)가 있다는 순환적인 답변으로 충분하다고 생각하고 있었다. 한편, 중학교수학에서는 실수개념을 무한소수를 통하여 '순환하는 무한소수=유리수, 순환하지 않는 무한소수=무리수'로 전개하지만, 몇몇 예비교사들의 답변에서는 무한소수에 대한 학생들의 오개념(Fischbein, Jehiam, Cohen, 1995; Zazkis, Sirotic, 2010; Savizi, Semnani, Zadeh, 2013)을 그대로 발견할 수 있었다. 상당수 예비교사가 $1.41421356237\cdots$가 $\sqrt{2}$와 같다고 생각하지 않았으며, 어떤 예비교사들은 규칙성이 없는 임의의 비순환 무한소

수를 수용하는 것을 주저하였다. 임의의 무한소수의 필요성을 $\sqrt{2}$라는 특별한 예에 국한하여 생각하거나, 기호 페티시즘에 의존하여 임의의 무한소수가 나타내는 수를 옹호했던 설명논리는 예비교사들의 실수에 대한 이해가 중고등학생의 이해 수준과 크게 다르지 않음을 보여주고 있다. 연구자는 예비교사들이 '유리수와 무리수의 합집합'이라는 학교수학의 정의에 의존하여, "왜 유리수에서 실수로 확장하는가?"와 같은 질문을 사소하게 받아들이고 있음을 확인할 수 있었다. 예비교사들의 실수에 대한 피상적인 이해는, 학교수학에서 남겨진 교수학적 공백은 이후 대학에서 해석학을 학습한다 할지라도 저절로 메워지는 것이 아님을 시사하고 있다.

2. 실수 개념의 비자명성을 자각하기

연구자는 앞에서 확인한 교수학적 공백으로부터 학교수학과 대학수학을 연결하기 위하여, '학교수학에서 가장 가르치기 어려운 주제: 유리수에서 실수체계로의 확장'이라는 제목으로 다음과 같은 내용을 3시간에 걸쳐 강의하였다[8]. 먼저 실수 개념의 인식론적 역사를 소개하기 위하여, '어떠한 수 체계가 연속체(continuum)로서의 직선의 구조를 기술할 수 있는가?'라는 질문과 이 질문에 답하기 위한 시도로 피타고라스 학파의 통약성에 대한 신념 · Stevin의 무한소수 도입 · Dedekind가 파악한 연속적인 수의 본질인 Dedekind 절단 성질(Dedekind cut property)등을 역사적 맥락과 함께 소개하였다. 완비성 공리의 관점에서 유리수 집합은 유계 부분집합의 최소상계를 가지지 않을 수 있다는 '틈'이 있는데,

제곱근의 대소 관계를 이용하여 2의 양의 제곱근 $\sqrt{2}$의 근삿값을 소수로 나타내어 보자.

$\boxed{1}$ $1^2=1,\ 2^2=4$에서 $1^2<2<2^2$이므로

$\sqrt{1^2}<\sqrt{2}<\sqrt{2^2}$

$\therefore\ 1<\sqrt{2}<2$

$\boxed{2}$ $1.4^2=1.96,\ 1.5^2=2.25$이므로

$1.4^2<2<1.5^2$

$\therefore\ 1.4<\sqrt{2}<1.5$

$\boxed{3}$ $1.41^2=1.9881,\ 1.42^2=2.0164$이므로

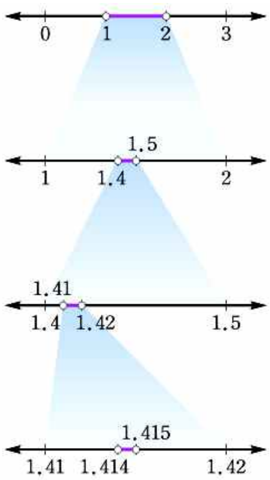
$1.41^2<2<1.42^2$

$\therefore\ 1.41<\sqrt{2}<1.42$

$\boxed{4}$ $1.414^2=1.999396,\ 1.415^2=2.002225$이므로

$1.414^2<2<1.415^2$

$\therefore\ 1.414<\sqrt{2}<1.415$



이와 같은 방법으로 계속하면 무리수 $\sqrt{2}$는 1.4142와 1.4143 사이에 있는 수임을 알 수 있고,

$$\sqrt{2}=1.41421356237\cdots$$

과 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있다.

[그림 IV-1] 중학교 수학 3의 제곱근의 근삿값(이준열 외, 2012: p.34)

8) 이 강의에서 다룬 구체적 내용은 연구자의 선행연구(이지현, 2014)를 참조할 수 있다.

이 성질이 유리수와 실수의 본질적 차이임을 설명하였다. 특히 무한소수로 실수 개념을 전개하는 학교수학과 관련된 “왜 임의의 무한소수가 하나의 수에 대응할 수 있도록 수 개념을 확장해야만 하는가?”라는 질문에 대하여, 무한소수 집합이 특히 실수의 완비성 공리를 어떻게 만족할 수 있는지를 다음과 같이 살펴보았다[9].

> 위로 유계인 임의의 무한소수 부분집합 A의 최소상계는 다음과 같이 무한소수 전개를 이용하여 찾을 수 있다. 이때 일반성을 잃지 않고, A가 적어도 하나의 양수를 포함한다고 가정하자. 집합 A가 유계이므로, A에 속한 무한소수들의 정수부분 최댓값을 a_0라 하자. 즉, a_0는 $\max\{x_0 | x_0.x_1x_2\cdots \in A\}$이다. 이때 정수부분이 a_0인 집합 A의 무한소수 중 소수점 첫째 자리의 최대 digit를 a_1, 또 소수점 첫째자리까지의 값이 $a_0.a_1$인 A의 무한소수 중 소수점 둘째 자리의 최대 digit를 a_2라 하자.
> 이를 반복하면, 소수점 k번째 자리의 최대 digit a_k를 $\max\{x_k | a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}x_kx_{k+1}\cdots \in A\}$로 찾을 수 있으며, 이와 같이 얻은 무한소수 $a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 는 집합 A의 최소상계이다(Abian, 1981: p.467; Li, 2011, p.6)[10].

위 알고리즘은 소수점 아래에 0부터 9까지의 ‘임의의’ 숫자가 또한 ‘무한히’ 등장하는 무한소수에서는 위로 유계인 집합의 최소 상계를 항상 찾을 수 있음을 보여주고 있으므로, 무한소수는 유리수의 틈이 없는 연속적인 수 집합이 된다. 이 알고리즘은 [그림 IV-1]에서도 $1.41421356237\cdots$의 각 digit를 이와 같이 선택하는 의미를 설명하는데, $\sqrt{2}$가 유계집합

$$\{x \in x_0.x_1x_2\cdots \mid x^2 < 2 \text{ and } x > 0\}$$

의 최소 상계이므로[11] 이렇게 찾은 무한소수가 바로 $\sqrt{2}$이다. 연구자는 학교수학에서 해석학에서의 완비성 공리에 대응하는 것이 바로 “임의의 무한소수 전개가 하나의 실수에 대응한다”라는 가정이며(Burns, 2000: p.77), 19세기 말 완비 순서체라는 엄밀한 실수 개념이 정립되기 이전에도 많은 수학자들이 무한소수에 의존하여 실해석학의 많은 정리에 대한 직관과 증명의 방법을 얻을 수 있었다는 것을 설명하였다.

강의 후 소감을 정리한 최종 보고서에서, 예비교사들은 강의를 통하여 실수의 도입 이유(유리수에서 실수로의 수 체계 확장의 이유, 완비성 공리에 대한 이해 등), 무한소수의 의미(혹은 임의의 비순환 무한소수를 생각하는 이유), 무한소수 $1.41421356237\cdots$가 왜 $\sqrt{2}$인지 등을 새롭게 알게 되었다고 하였다. 다음은 한 예비교사의 실수 이해에 대한 반성이다.

> 처음에 강의를 시작하실 때 이러한 주제로 강의를 하시는 것에 대해 의아하게 생각했다. 순환하지 않는 무한소수는 π, e, $\sqrt{2}$와 같은 수라는 것을 너무나 당연하게 알고 있었기 때문이다. 하지만 강의를 들으면서 나는 단순히 어떤 특정한 수들을 무리수와 유리수로 구분할 수 있었던 것 뿐 이었다는 것을 알았다(중략). 강의를 듣기 전에는 ‘$x^2=2$의 근을 구할 때, 이는 유리수계수를 가지는 다항식임에도 불구하고 유리수 해를 가지지 않는다. 그래서 이때 생겨나는 유리수가 아닌 수를 무리수라고 한다. 이 무리수와 유리수를 합친 것이 실수이다.’라는 것이 내 머릿속의 유리수에서 실수로의 확장의 전부였다고 해도 과언이 아니었다. 하지만 강의에서 무리수의 등장을 여러 방법으

9) 무한소수(infinite decimal expansion)의 집합도 Dedekind Cut과 같이 완비순서체의 공리체계를 만족하는 실수의 모델이며, 자세한 증명은 Li(2011)를 참고할 수 있다.

10) 이를 설명하기 전 연구자는 사전과제와 관련하여 예비교사들에게 유리수의 유계집합 $\{0, 0.1, 0.101, 0.101001, ...\}$의 최소상계를 찾아보도록 하였으며, 이 집합의 최소상계가 바로 사전과제의 비순환무한소수 $0.101001000\cdots$임을 알게 하였다.

11) Rudin(1976:p.10)의 증명을 참조하라. 혹은 중간 값 정리의 증명(Körner, 2003: pp.34-35)을 함수 $f(x)=x^2-2$에 적용하면 집합 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \text{ and } x > 0\}$의 최소상계가 바로 $\sqrt{2}$임을 증명할 수 있다.

로 설명해주셨기 때문에 무리수의 등장을 조금 더 자연스럽게 받아들일 수 있게 되었다(예비교사 N).

N의 서술은 실수에 대한 자신의 이해가 어떠한 한계를 가지고 있었는지를 명확하게 인식하게 되었음을 보여주고 있는데, 예비교사들은 다음과 같이 학교수학에서 실수를 도입하고 설명하는 방식의 문제점을 지적하였다.

> 실수를 도입하는 것처럼 기존에 알고 있던 개념과 다른 상위의 개념을 학습할 때에는, 선생님들은 보통 '이것은 수학자들의 약속이다.', '그러니까 그냥 받아들여야 한다.' 등과 같이, 내가 지금 이것을 왜 배워야 하는지 혹은 어떠한 과정에서 이 개념들이 필요하게 되었는지에 대한 설명이 다소 미흡했던 것 같다(예비교사 J).
> 학교수학에서 실수를 도입할 때, 가장 큰 문제점은 별다른 설명 없이 실수체계를 도입한다는 것이다. 사실 나 또한 그것을 아무 문제없이 받아들였지만, 이번 수업을 들으면서 다른 학생들은 순환하지 않는 무한소수가 정말 존재하는 것인지, 무한소수 기호가 정말 해당 무한소수를 가리키는 것인지를 믿지 못할 수도 있다는 것을 깨달았다(중략). 수학공부를 할 때 무작정 외우는 수업보다는 실수가 나오게 되는 배경과 선생님이 수업하실 때 학생의 입장에서 '아 이런 부분은 이해가 안갈 수도 있겠다.' 라고 생각되는 부분을 보충 설명하는 방식으로 수업을 해주셨더라면 더 효과적인 수업이 되지 않을까 생각해본다(예비교사 D).

이상과 같은 문제 제기는 예비교사들이, 무리수의 존재이유 혹은 유리수에서 실수로 확장하는 이유를 명확하게 설명하는 대신 일련의 정의와 성질의 나열로 실수를 도입하는 학교수학의 교수학적 공백이 남긴 문제점을 인식하게 되었음을 보여주고 있다. 특히 예비교사들은 실수를 자신이 배웠던 것과 다음과 같이 다르게 가르치고 싶다고 서술하였다.

> "분수로 나타낼 수 있는 것은 유리수다. 순환하지 않는 무한소수는 무리수다. 유리수와 무리수를 포괄하는 집합을 실수라고 표현할 수 있다. 끝!" 이런 식의 단순한 용어 설명이 아닌, 짧게라도 수학사를 이용하던지 아니면 내 나름대로 이러한 수들이 왜 필요한지에 대한 설명 방법을 연구하여 설명하겠다. 아마도 수학교육관련 서적에 적힌 내용들과 크게 다르기는 힘들겠지만 분명히 언급하고 넘어감으로써 아이들이 단순히 계산만 할 수 있는 것이 아니라 유리수·무리수·실수 이런 각 수에 대한 이해를 마음속에 갖게 해 주고 싶다. 왜냐하면 당연하다고 생각하는 것이 버릇이 되면, 무엇을 배우든지 공부하는 태도가 수동적으로 굳어질 가능성이 높다고 생각하기 때문이다(예비교사 J).
> 순환하지 않는 무한소수라는 완결되지 않은, 끝자리까지 그 숫자를 쓸 수도 혹은 계산할 수도 없는 대상을 왜 인정해야하는지를 나 자신도 이해하지 못하였기 때문에, 나처럼 생각하지 않도록 조금 더 자세히 설명하고 싶다. 단지 유리계수를 가진 방정식을 풀다보니 유리수가 아닌 무리수인 근이 등장했다는 것뿐 만 아니라, 피타고라스 정리 등 연속체의 필요성에 의해 유리수가 아닌 무리수가 등장하게 되었다고 꼭 얘기해주고 싶다. 그리고 처음 무리수가 등장했을 때도 정식적으로 인정받지 못했기 때문에 지금 무리수를 잘 받아들이기 어렵다면 그것이 당연한 일이라고도 말하고 싶다. 초월수 등에 대해서도 얘기해주고 싶다. 학생들이 단순히 받아들이는 것보다도 조금이나마 무리수의 등장에 대해 이해를 하고 넘어가주었으면 좋겠다(예비교사 N).

예비교사 J의 말대로 많은 수학교사가 수학 개념의 존재 이유를 설명하려고 노력하기보다는 '이것은 수학자들의 약속이므로 그냥 받아들여야 한다.' 와 같이 개념을 부과하며, 이는 학생들이 수학에 대하여 '수학은 가르치기 때문에 존재한다'는 빈곤한 인식(Furinghetti, 2000)을 가지게 되는 원인을 제공한다. 이와 같은 예비교사들의 반응은 이들이 "실수에 대하여 무엇을, 또 어떻게 가르쳐야 하는가?"에 대하여 보다 심화된

교육적 고민을 하게 되었음을 보여주고 있다.

Ⅴ. 결 론

수학교사들에게는 중고등학생보다 수학을 더 깊이 알아야 한다고 기대된다. 그러나 예비교사들은 학창시절 공부한 학교수학만으로도 자신이 학교수학을 가르치는 데 충분한 교과내용지식을 가지고 있다고 생각하기 쉽다. 아마도 이 연구에 참여했던 예비수학교사들도 해석학을 배우면서 접한 완비 순서체라는 실수의 형식적 정의는 장차 중학교에서 유리수와 무리수의 합집합, 혹은 순환・비순환 무한소수로 실수를 가르쳐야 하는 자신에게는 필요하지 않은 지식이라고 생각하고 있었을지도 모른다. 이 연구에서는 실수를 유리수와 무리수의 합집합으로 제시하는 학교수학의 교수학적 변환이 “왜 유리수에서 실수로 확장해야 하는가?, 왜 임의의 무한소수가 하나의 수에 대응하도록 수 개념을 확장해야만 하는가?”와 같은 질문을 자명하게 만들거나 설명 없이 공백으로 남겨놓고 있음을 살펴보았다. 해석학을 배운 예비교사들도 유리수에서 실수로 확장하는 이유에 대하여, 중고등학생들과 마찬가지로 유리수가 아닌 실수(즉, 무리수)가 있기 때문이라는 순환적 설명을 제공하는 수준에 그대로 머무르고 있었다. 유리수에서 실수로의 확장 및 비순환 무한소수의 필요, 무한소수개념에 대한 예비교사들의 한계는, 이와 같이 학교 수학이 미완으로 남겨둔, 그러나 실수를 배우는 학생들이 제기할 수도 있는 수학적 질문에 대하여 학교수학 이상의 이해 없이 가르쳤을 때 봉착할 수 있는 오류 및 난점을 보여주고 있다. 예비교사들은 학교수학의 접근이 실수와 관련하여 어떠한 교수학적 공백을 남기고 있는지를 이해하고, 실수를 무한소수로 도입하는 학교 수학의 접근이 해석학과 어떻게 연결될 수 있는지를 살펴봄으로서, 실수를 보다 깊이 이해할 수 있었다. 예비교사들은 실수에 대한 심화된 이해를 통하여, 실수를 가르친다는 것이 “분수로 나타낼 수 있는 것은 유리수다. 순환하지 않는 무한소수는 무리수다. 유리수와 무리수를 포괄하는 집합을 실수라고 표현할 수 있다.”와 같은 사실을 선언하는 것으로 끝나지 않으며 왜 실수개념을 필요로 했는지를 설명하려는 교육적 노력이 필요하다는 것을 깨닫고 있었다.

Klein(1908)은 예비교사들이 대학에 입학하면 학교수학과 아무 연관성이 없어 보이는 대학수학을 배우면서 학교수학과 단절되며, 또 졸업 후에는 학교수학을 가르치면서 대학수학과 또 다시 단절되는 것을 ‘이중단절(double discontinuity)’의 문제로 지적한 바 있다. 이러한 이중 단절의 결과로 교사들은 학교수학에 대한 더 깊고 유연한 이해 없이 자신이 중고등학교 시절 배웠던 것을 재생산하며, 이는 수학교육의 질적 성장을 가로막는 원인 중 하나이다. 예비교사들이 학교수학의 교수학적 공백을 인식하고 학교수학과 대학수학의 연결성을 이해함으로서, 학교수학의 내용이 자명하다는 착각에서 벗어나는 과정을 기술・분석한 이 사례연구가 예비교사 교육에서 이중단절 문제의 해결에 도움이 되기를 기대한다.

참고문헌

교육인적자원부(2008). 교육인적자원부 고시 제 2006-75호 및 제2007-79호에 따른 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) 수학, 과학, 기술・가정.

김서령 외(2014). **중학교 수학 2**. 서울: 천재교육.

김성기, 김도한, 계승혁(2004). **해석개론**. 서울: 서울대학교 출판부.

김흥기(2004). 중학교에서 순환소수 취급과 무리수 도입에 관한 고찰. **수학교육학연구, 14**(1),

pp.1-17.

이준열 외(2012). **중학교 수학 3**. 서울: 천재교육.

이지현(2014). 무한소수 기호: 불투명성과 투명성, **수학교육학연구, 24**(4), pp. 587-597.

조한혁, 최영기(1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. **학교수학, 1**(2), pp. 605-615.

최용준 외(2011). **중학교 수학 3**. 서울: 천재교육.

Abian, A. (1981). Calculus must consist of the study of real numbers in their decimal representation and not of the study of an abstract complete ordered field or nonstandard real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 12*(4), pp. 465-472.

Bergsten, C., Jablonka, E., & Klisinska, A. (2010). A remark on didactic transposition theory. In *Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions: Proceedings of MADIF7*, The Seventh Mathematics Education Research Seminar, Stockholm, January 26-27. 2010. Linköping: Svensk förening för matematikdidaktisk forskning (SMDF).

Bloch, E. D.(2011). *The real numbers and real analysis*. New York: Springer.

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets «nombre réel» et «racine carrée». *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(3), 55-80.

Burns, R. P.(2000). *Numbers and functions: steps to analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Djebali, S. (2004). The practice of teaching tertiary mathematical analysis. discussion document.

Ervynck, G. (1994). Students' conceptions of infinity in the calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 4*(1), 84-96.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), pp. 29-44.

Forbes, J. E. (1967). The most difficult step in the teaching of school mathematics: from rational numbers to real numbers-with meaning. *School Science and Mathematics, 67*, pp. 799-813.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 43-51.

Klein, F.(1908). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: arithmetic, algebra, analysis*. Cosimo, Inc.

Körner, T. W. (2003). *A companion to analysis: a second first and first second course in analysis* (Vol. 62). Providence, R.I. : American Mathematical Soc.

Li, L.(2011). A new approach to the real numbers. available at http://arxiv.org/abs/1101.1800.

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 230-248.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3). New York: McGraw-Hill.

Savizi, B., Semnani, A. S., Zadeh, M. H. B.(2013). Inconsistency of students' mental object of numbers with irrational numbers, *Life Science Journal, 10*(1), pp.762-771.

Wozniak, F., Bosch, M., Artaud, M.(2015). The anthropological theory of the didactic. (http://www.ardm.eu/contenu/yves-chevallard-english)

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: exposing missing link. CBMS Issues in Mathematics Eduction 16. American Mathematical Society.

Beyond the Union of Rational and Irrational Numbers: How Pre-Service Teachers Can Break the Illusion of Transparency about Real Numbers?

Jihyun Lee (Incheon National University)

The introduction of real numbers is one of the most difficult steps in the teaching of school mathematics since the mathematical justification of the extension from rational to real numbers requires the completeness property. The author elucidated what questions about real numbers can be unanswered as the “institutional didactic void” in school mathematics defining real numbers as the union of the rational and irrational numbers. The pre-service teachers’ explanations on the extension from rational to real numbers and the raison d’être of arbitrary non-recurring decimals showed the superficial and fragmentary understanding of real numbers. Connecting school mathematics to university mathematics via the didactic void, the author discussed how pre-service teachers could break the illusion of transparency about the real number.

* Key Words : didactic transposition(교수학적 변환), double discontinuity(이중단절), infinite decimal (무한소수), real numbers(실수), pre-service mathematics teacher education(예비수학교사교육)

논문접수 : 2015. 6. 4
논문수정 : 2015. 8. 7
심사완료 : 2015. 8. 10

[부록]

A. 사전조사 문항

[1] 여러분이 기억하고 있는 학교수학에서 실수의 정의와 대학에서 배운 실수의 정의는 무엇인지 알고 있는 대로 써보십시오.

① **[학교수학에서의 실수 정의]** ② **[대학수학에서의 실수 정의]**

[2] 유리수와 실수의 차이는 무엇입니까? 또 이와 관련하여 수학에서는 왜 유리수에서 실수로 수 체계를 확장한다고 생각하는지 아는 대로 써보십시오.

① **유리수와 실수 체계의 차이:** ② **유리수에서 실수로 수 체계를 확장하는 이유:**

[3] [그림 Ⅳ-1] 위와 같이 얻을 수 있는 순환하지 않는 무한소수 1.41421356237⋯는

($\sqrt{2}$ 와 같은 수이다, $\sqrt{2}$ 와 같지는 않으나 $\sqrt{2}$ 에 한없이 가까이 가는 근삿값이다)

이유:

[4] 실수의 완비성 공리를 써보아라.

B. 사전과제

유리수와 소수의 관계

1 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.

2 유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.

소수 — 유한소수, 무한소수

무한소수 — 순환소수, 순환하지 않는 무한소수

유리수

다음은 선생님이 위의 내용을 배운 중학생들에게 다음과 같이 '순환하지 않는 무한소수'에 대해 설명한 후, 한 학생과 나눈 대화입니다.

소수점 아래에서 차례대로 1, 01, 001, 0001, 00001, ⋯ 이 계속되는 소수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

0.101001000100001000001⋯

이와 같이 소수 중에는 0.10100100010000100000⋯과 같이 순환하지 않는 무한소수가 있다.

선생님: 우리는 이제 무한소수 중에서 순환하는 무한소수는 유리수와 같다는 사실을 배웠습니다. 그런데 0.101001000⋯와 같이 순환하지 않는 무한소수도 있으니까, 이러한 순환하지 않는 무한소수를 표현하는 새로운 수가 필요합니다.

소민: 선생님의 말씀은 어떤 이야기인지 알겠어요. 그런데 전 순환하지 않는 무한소수 0.101001000⋯라는 기호를 생각할 수 있다는 것이, 이 기호가 나타내는 수가 정말 있다고 주장할 수 있는 근거가 되는 것 같지 않아요. 또 만약 선생님의 설명대로 0.101001000⋯에 대응되는 어떤 수가 있다고 해도, 이 수가 무한소수 기호 '0.101001000⋯에 대응되는 수'라는 의미 이외에 어떤 다른 쓸모가 있을지도 모르겠어요.

[질문] 여러분은 위와 같은 소민이의 질문에 대해 어떻게 생각합니까? 여러분이 만약 교사가 되어 이와 같이 질문하는 학생을 가르친다면, 어떻게 설명하겠습니까?