대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 3, 281 ~ 302. Aug 2015

문자와 식, 함수 영역에서 보이는 중학생의 수학적 오류 분석: 2013년 국가수준 학업성취도 평가 서답형 문항을 바탕으로

조 윤 동* · 고 호 경**

본 연구에서는 국가수준 학업성취도 서답형 문항의 문제해결 과정에서 나타나는 오류를 살펴보기 위하여 236개 학교 8007명의 답안지를 추출하여 분석하였다. 분석에 사용한 문항은 국가수준 학업성취도 평가 중학교 수학 서답형 문항으로 내용 영역은 '문자와 식', '함수'이고 행동 영역은 '문제해결'과 '계산'이다. 두 문항 모두 주어진 문제 상황에 알맞은 식을 세우고 조건에 맞는 결과를 산출하는 문제이다. 분석 결과 각 문항에 따라 문제 상황을 파악하여 식을 세우고, 풀며, 결과를 기술하는 세 가지 과정에서 다양한 오류들이 나타났다. 본 연구에서는 이에 대한 원인을 추론하여 교수학적 시사점을 이끌어 내고자 하였다.

Ⅰ. 들어가는 말

국가수준 학업성취도 평가는 국가 교육과정에서 규정하고 있는 교육목표를 어느 정도 도달하였는지 파악하여 교육과정을 개정하고, 교수·학습 방법을 개선하며, 장학 정책을 수립하기 위한 기초 자료로 삼는 등 다양한 목적으로 활용하는 것을 근본 목적으로 삼고 있다(조윤동 외, 2011). 그러나 실제 상황에서는 평가의 역할이 교수·학습 활동의 효과를 증진시키기 위한 학생의 교육적 성취 또는 결손에 대한 정보보다 학습의 결과로 얻어진 시험 점수나 집단에서 나타나는 서열(위치)에 대한 정보에 관심을 기울이고 있는 것은 현실이다(권효진·김성훈, 2010). 평가 결과를 교육의 질을 향상하는 방향으로 활용하기 위해서는 평가 결과에 대해 다양하게 접근하여 분석함으로써 학생들의 학업 성취도에 영향을 미치는 변수를 탐색하고, 분석 결과를 토대로 현 교육 상황을 진단하며 교육 정책의 방향을 설정하기 위한 노력을 기울여야 할 것이다(성태제 외, 2010).

학생들이 보이는 수학적 오류는 문제를 해결하는 과정에서 직관에 의해 나타나기도 하고(이대현·박배훈, 2001) 때에 따라서는 교사의 지도 과정의 결과로서 나타나기도 한다(박효진, 2008). 이러한 수학적 오류에 대한 연구는 다양한 관점에서 연구되고 있는데, 수학과에서는 주로 평가 결과를 분석하여 수학 교수·학습 활동을 개선하기 위한 정보를 제공하거나 교육평가 활동의 시사점을 끌어내어 활용하려는 목적으로 꾸준히 진행되어 오고 있다. 특히 오류에 대한 연구의 대부분은 오류 종류와 원인을 파악하고 이를 유형화하여 교수·학습에 반영하고자 하는 연구들

* 한국교육과정평가원, jydong05@kice.re.kr (제 1저자)
** 아주대학교, kohoh@ajou.ac.kr (교신저자)

이 주를 이루고 있다(예, 권영인・정종규, 2002; 김윤영, 2003; 박장희 외, 2012; 송영무・양두레, 1997; 송순희・오정현, 1997; 심상길・최재용, 2008; 오정윤・노영순, 2007; 우현철, 2000; Ashlock, 2002; Bray, 2013; Hadar & Zaslavsky, 1987; Horacek, & Wolska, 2006; Sfard, 1991). 이러한 오류 분석 연구는 학생들이 보이는 오류를 분류하고 이를 유형화하며 이에 대한 빈도 분포와 오류의 지속성을 알아내어 학습의 어려움을 줄이거나 제거하고, 오류를 치료하기 위한 교육적인 방안을 마련하는 것을 목적으로 하고 있다(Radatz, 1979).

그 밖에도 수학적 오류를 다각도에서 연구하고자 하는 시도들이 있다. 이를테면 테크놀로지 환경에서 학습할 경우 지필 환경과 다르게 나타나는 오류의 종류와 이것의 처치에 대하여 연구하거나(안가영・권오남, 2002), 뇌신경과학 측면에서 다루면서 어떠한 능력 때문에 더 성공적으로 문제를 해결할 수 있는지를 연구하기도 한다(Ravizza et. al., 2008). 그리고 탈북학생과 같은 특수한 상황의 학생들을 대상으로 하여 오개념과 이를 극복하거나 해소하기 위한 방법을 탐색하거나(고상숙, 2012), 오류를 분석하기 위한 평가문항을 개발하는 방안을 구안한다든지(최영기 외, 2002), 디지털 교과서에서 제시하는 수학의 특징에 따라 나타나는 학생의 오개념 유형을 분류하여 분석하는(허혜자・최정임, 2009) 등 새로운 관점에서도 연구를 수행하고 있다. 그러나 중요한 것은 수학 과제 수행은 일반적 인지능력 요인, 영역에서 요구되는 특수 요인, 과제를 해결하는 필요한 특수한 요인에 의해 영향을 받기 때문에(Demetriou & Efklides, 1994), 오류에 대한 연구는 과제 상황에 근거하여 현상과 이유를 설명하고 내용과 맥락에 공통으로 적용할 수 있는 오류의 분류 기준을 제안하고 이를 교수・학습 실제에서 적용할 수 있는지를 탐색하는 것이 바람직할 것이다.

이를 위한 효율적인 방법의 하나는 학생들이 자신의 수학적 사고 과정을 나타낼 수 있는 서답형[1] 평가로부터 학생들에게 자주 일어나는 오류가 무엇인지 파악하는 것이다. 이것을 근거로 하여 효과적인 학습 전략을 세우는 데 필요한 자료를 제공 받을 수 있을 것이다(김래영・이민희, 2013). 따라서 중학교 수학과 서답형 평가에서 나타나는 오류에 대한 연구 자료가 충분치 않은 현 시점에서, 신뢰성이 확보된 서답형 평가를 바탕으로 학생들이 범하기 쉬운 오류 유형과 패턴을 찾고 분석한다면 학생과 교사, 교육 전문가 등에게 유용한 시사점을 제공할 수 있으리라 판단된다. 국가수준 학업성취도 평가의 서답형 문항은 그 역할을 충분히 해줄 것이다.

교육평가 또는 학업성취도 평가의 목적이 시험점수나 집단 내 서열로 표현되는 학교 학습의 도달점뿐만 아니라 학습에 대한 과정이나 학습자의 내적 상태를 알려줌으로써 학습 활동을 위한 개선과 향상에 기여한다(권효진・김성훈, 2010)는 것이다. 준거참조평가인 국가수준 학업성취도 평가는 후자를 평가 목적의 하나로 삼고 있기 때문에 이 평가에서 다루어지는 서답형 문항을 분석하여 시사점을 얻는 것은 그 목적을 달성하는 데에 이바지할 것이다. 본 연구에서는 2013 국가수준 학업성취도 평가에서 수와 연산, 함수

1) 문항은 선택형과 서답형으로 구분한다. 서답형은 단답형, 완성형, 논술형으로 구분하는데 우리나라에서는 여기에 서술형을 논술형과 구분하여 포함시키고 있다. 이글에서는 단답형과 서술형을 다루고 있다. 단답형은 간단한 낱말, 숫자, 구, 문장, 수식, 그림 등 제한된 형태로 답하게 하는 유형이다(박도순, 2007 참조). 서술형은 기술해야 하는 분량이 많지 않고 평가할 때 기술된 내용의 깊이와 넓이에 주된 관심을 두는 유형으로서, 기술의 분량이 많고 피험자에게 자신의 생각이나 주장을 논리적으로 설득력 있게 조직하여 작성하도록 요구하기 때문에 글을 조직하고 구성하여 표현하는 능력과 논리적인 일관성 등도 평가에 포함하는 논술형과 구분하고 있다(서울시교육청, 2011).

영역에서 각각 하나씩 출제된 서답형 문항의 답안을 다룬다. 이 두 문항의 답안으로부터 학생들이 범하는 오류를 유목화하고 분석하여 교수·학습 방법을 개선하기 위한 기초 자료로 제공하고자 한다.

Ⅱ. 학생의 수학적 오류에 대한 선행연구

수학적 오류는 수학 학습 과정에서 범하는 잘못된 계산이나 실수, 착각 등에 의해서 나타나는 것을 의미하며 일반적으로 수학적 오개념과 동일하게 사용되기도 한다(김부미, 2009). 그동안 수학 학습과정의 내용 영역과 연관된 특정한 수학적 오류를 분류하고 이에 대한 다양한 처방을 제안하는 연구들이 진행되어 왔다. 본고에서는 학생들이 보이는 오개념이나 오류를 유형화하거나 이를 교수학습 방안에 활용하고자 하는 연구들 중에서 중학교 교육과정의 '문자와 식'과 '함수' 영역에서 나타나는 오류에 관련된 연구와 서술형, 문장제 문제에서 나타나는 오류에 관련된 연구들을 살펴보고 시사점을 이끌어 내고자 한다.

1. 수학적 오류의 유형 및 원인에 관한 연구

오류의 유형에 관한 연구로는 먼저, Hadar et al(1987)은 '논리적으로 부적절한 추론(logically invalid inference)', '잘못 해석된 언어(misinterpreted language)', '기술적 오류(technical errors)', '모호한 해답(unverified solution)', '불확실한 정리나 정의(misunderstood theorem or definition)', '잘못 이용된 자료(missed data)'로 오류 유형을 분류하였다. 또한 수학적 성질을 기준으로 오류를 분류한 연구로는 Cortés(1993)와 Cortés & Kavafian(2004)가 학생들이 미지수를 포함한 식의 계산에서 나타난 오류를 다섯 유형으로 범주화한 것이 있다. 그 범주는 '방정식을 분석하고 변환을 선택할 때 나타나는 오류(Analyzing the equation and choosing a transformation)', '연산 순서 선택의 오류(Identi- fying the operation to be given priority)', '등식의 성질을 이용한 방정식의 '대수적 변형에서 발생하는 오류(Checking the validity of the transformation)', '새로운 방정식을 적을 때의 오류(Checking transferred terms in a new written expression)', '수치 연산의 오류(Numerical calculations)'로 제시한 바 있다. 이종희·김부미(2006)는 이와 같은 연구를 더욱 세분화하여 중학교 2학년 학생들이 일차방정식을 풀 때 범하는 오류를 크게 실행적 오류와 구조적 오류로 분류하고 그 각각의 세부적인 오류 유형을 범주화한 결과, 구조적 오류는 논리적 오류, 개념상 오류로 분류되었고, 실행적 오류는 주어진 연산의 우선성 선택 오류, 수치 연산의 오류, 생략 오류로 범주화하였다.

또한 이러한 오류 유형의 분류를 바탕으로 학생들에게 어떠한 유형의 오류가 많이 나타나는지 등에 대한 연구가 많이 수행되어 왔다. 이를테면 대수와 관련된 학생들의 오류 유형에 대한 연구들 중 문제에 대한 잘못된 이해와 표현상의 오류를 가장 많이 지적하였다(박효진, 2008; 송영무·양두레, 1997; 오정윤·노영순, 2007). 대수 관련 문장제에서 나타나는 오류에 관한 연구는 오정윤·노영순(2007)에서도 나타나듯이, 학생들은 '늘어난 넓이'를 '늘어난 후의 넓이'로 파악한다거나 '∼가 ∼보다 ∼만큼 크다' 등과 같은 문장을 해석하는 과정에서 오류를 범하는 것으로 조사되었다. 이러한 오류를 보이는 학생들은 적절한 식을 세우는 데 실패했으며 또한 반성 단계를 생략하는 경향이 나타났다고 한다. 송영무·양두레(1997)는 학생들이 산술에서 대수로 이

행하는 과정에서 나타내는 오류를 '대수를 시작하는 단계에서 대수적인 표현의 의미의 부정확성', '수의 표현 형식과 대수식의 표현 형식의 혼돈', '산술에서의 계산 규칙과 대수식에서의 차이', '자연언어에 대한 이해와 기호 체계 사이에서의 인지적 갈등', '대수식을 간단히 하는 것과 방정식을 풀이하는 것', '문장제에서 대수식으로의 전이의 어려움' 등과 같이 제시한 바 있다.

오류의 원인에 대한 연구들도 진행되어 왔는데, 이를테면 김부미(2005)는 일차함수식의 대수적 관계를 해석하지 못하는 오류, 척도 과제 중 기울기 개념의 해석 오류, 함수식의 동치변형에서 연산의 오류, 기울기의 정의와 함수식에서 기울기를 나타내는 계수를 대응시켜 생각하지 못하는 오류는 일차함수와 일차방정식이 서로 공존하는 인지 구조에서 일차함수식과 대수식의 상호 대응관계, 기울기 개념과 계수 또는 그래프 상의 기울기와 대수식과 그 의미를 연결시켜 구체화 해볼 때 오류를 범한다고 하였다. 여기에서 학생들이 함수 과제와 관련하여 가장 많이 범하는 오류들은 인과적-실험적 정신용량의 요소 능력들과 깊은 관련이 있었다고 제시는 하였으나 구체적인 설명과 예시는 제시한 바 없다. 대수에서 나타나는 오류의 원인에 대해 연구한 이종희・김부미(2006)에 따르면, 학생들은 자동화, 공식 적용, 추측-대입, 유사 규칙 적용 방법으로 방정식을 풀 때 오류를 나타내는 비율이 높았으며, 특히 구조적 오류에서 개념상 오류를 범할 때는 학생들은 공식 적용의 방법을 선호하였고 실행적 오류를 범할 때는 유사 규칙의 적용 방법을 사용할 때 나타난다고 주장하였다.

많은 연구에서 학생들이 함수에 대한 오개념을 다루면서 학생들이 함수의 개념을 받아들이거나 함수의 핵심 개념을 활용한 종합적인 이해를 바탕으로 다양한 상황의 문제를 해결하는 데에 어려움을 겪고 있음을 주장하고 있다(예. Akkoc & Tall, 2003). 일찍이 Vinner(1983)는 학생들이 갖는 함수의 개념 이미지에 대한 연구에서 모든 양수는 1에 음수는 -1에, 0은 0에 대응시킨다거나 독립변수에 정수가 아닌 값을 대입하여 정수의 함숫값이 나올 수 있도록 하는 것과 같은 임의의 대응은 함수가 아니라고 생각한다거나 교과서에서 제시된 바 없는 일반적인 그래프를 함수 그래프로 여기지 못하고 하나의 대응 규칙을 가진 것만을 함수라고 생각하는 것과 같은 함수에 대한 오개념을 조사한 바 있다. 이러한 연구를 바탕으로 많은 오개념에 대한 연구가 뒤를 이었는데, 이를테면 신인숙(1996)은 함수에 대한 오개념으로 첫째, 함수의 정의와 관련한 것으로 학생들은 함수를 정확히 이해하지 못하고 함수에 대해 변질된 개념을 가지고 있었는데 화살표 다이어그램이나 대수식 등을 함수의 예로 제시한다거나, 그래프적 표상에 대한 오개념으로 그래프 모양을 중시하고 자신이 보았던 그래프적 표상만 함수라 생각하는 경향이 있었다고 한다. 이는 학생들이 수학적 대상을 구조적으로 파악하기 이전에 조작 대상으로 파악하기 때문에, 논리적 사고 능력이 미숙한 경우에 함수를 하나의 대상으로 보기 쉽지 않고 절차적인 이미지로서 함수 의미로만 파악하기 쉽다는 것이다(최지선, 2003).

마지막으로, 중학교 학생들의 서술형 문항에 대한 전반적인 오류를 분석한 연구인 김래영·이민희(2013)에 따르면, 학생들이 나타내는 오류는 기호, 수식 표현의 오류와 문제에서 제공하는 정보를 명확히 이해하지 않아서 생기는 오류가 가장 많이 나타났으며, 학습 내용 자체를 이해하지 못해서 나타나는 오류가 모두 나타난 복합적 오류와 이미 학습한 내용을 본 학습 내용과 연결하지 못하는 오류가 다음으로 많이 나타났다고 한다. 또한, 한경민·고상숙(2014)에서는 Hadar et al(1987)의 오류 유형 분류에 따라 빈도수를 분

석한 결과 서술형 문항에서 논리적으로 부적절한 추론에 의한 오류가 가장 많이 발생하며 두 번째로는 풀이 과정의 생략과 기술적 오류가 그 뒤를 잇는다고 하였다.

위의 연구들에 따르면 각 연구들이 소규모의 학생을 대상으로 각기 다른 내용을 가지고 국소적으로 접근한 연구들이어서, 그 결과로 나타나는 오류의 유형과 원인에 대한 해설들이 다양하다. 따라서 우리나라 학생들에게 보이는 오류를 보다 일반적인 자료를 통해 접근하고 분석할 필요가 나타난다고 볼 수 있다.

2. 수학적 오류에 대한 교수･학습 관련 연구

교수학습 측면에서 오류 분석의 중요성을 강조한 연구들이 많이 있는데 수학의 각 영역에서 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 보이는 오류의 현상과 원인을 구체적으로 분석한다면 이것만으로도 학생 스스로 오류를 발견하고 교정할 수 있도록 지도하는 데 효과적이라는 것이다(장수연･안병곤, 2010). 이를테면 학생 본인이 오답을 하게 된 원인을 자기 평가지를 이용하여 유사 문제를 해결하고 오류의 원인을 점검하는 반성 활동을 거치면서 자신의 문제점을 스스로 판단할 수 있도록 하는 오답원인 자기평가 교수･학습 활동이 문제를 해결하는 과정뿐 아니라 학생의 자신감에도 긍정적 영향을 미칠 것이라 제안하였다(황혜정･김명수, 2014). 또한 김부미(2009)는 수학적 오개념과 오류를 기반으로 하는 개념 성장 학습 활동을 통해 수학적 오개념이나 오류를 발판으로 활용하여 새로운 수학 개념을 습득하도록 돕는 방안을 제안하기도 하였다.

오류 분석과 그에 따른 지도 방안에 대한 연구들에 따르면, Clayton et al.(1990)은 성공적인 교수･학습이 되기 위해서는 교사가 학생들의 특성과 가르쳐야할 수학적 구조 외에도 학생들의 오류 및 오류를 진단하기 위한 전략 등을 알아야 한다고 주장한 바 있다. Tatto et al.(2008)은 수학과의 교수학적 내용 지식(MPCK: Mathematics Pedagogical Content Knowledge)을 수학 교육과정 지식, 수학 교수･학습 계획에 관한 지식, 교수･학습을 위한 수학 활동의 세 가지 구성 요소로 제시한 바 있다. 특히 이 중에서 수학 교수･학습 계획 구상하는 지식 안에는 ‘오개념을 포함하여 학생들의 대표적인 응답을 예측’하는 지식이 포함될 것을 주장하였다. 교사가 교수 방안을 구상할 때 학생들이 보이는 오류를 고려할 것을 제안한 구체적인 연구들을 살펴보면, 우선 이정은･김원경(1999)은 문장제 문항 중에서도 중학교 학생은 거리-속력-시간의 문제를 특히 어려워하기 때문에, 선행지식에 대한 주지와 다양한 문제해결 전략을 병행한 학습지도 방안을 제시한 바 있다. 김수미(2003) 연구에서도 학생들이 보이는 오류를 교사가 정확하게 진단하고 처방하는 데 도움이 되는 교사용 자료 개발을 주장하면서 교사용 지도서 등에 ‘오류 유형 및 유형별 빈도수’, ‘오류 진단지’, ‘오류 원인’, ‘예방 아이디어’, ‘지도 아이디어’, ‘연습지’, ‘성취도 검사지’ 등의 요소를 넣을 것을 제언하였다. 학생들에게 보이는 오류를 미리 파악하고 이를 보안할 수 있는 교수･학습 방법으로 학생들을 지도한다면 오류를 사전에 예방하여 발생 빈도를 줄일 수 있게 됨으로써 효과적인 학습이 이루어 질 수 있다는 것이다(박장희 외, 2012). 또한, 전영배 외(2010)의 연구에는 미지수가 2개인 연립일차부등식 문제를 해결하는 과정에서 해석기하적, 대수적 접근을 통해 학생의 오류를 분석한 결과, 2개의 변수들 사이의 상호관련성을 간과하여 발생한 결과임을 알아냈다. 이것으로부터 2개의 변수 사이의 관련성에 대해 해석기하적 접근, 대수적 접근, 공리적 접근을 통하여 2개의 변수들 사이의 상호관련성

을 주지시킴과 동시에 해석기하적으로 좌표평면을 도입하여 문제에 접근해야 함을 강조한다.

함수에서 나타나는 오류의 유형과 이를 줄이거나 해소하기 위한 지도 방안에 대한 연구들도 있는데, 먼저 천유영 외(2013)는 학생들은 독립변수와 종속변수를 바꾸어 생각하는 오류를 범하는 경우가 많기 때문에 교수·학습 과정에서 학생들이 변하는 대상을 관찰하고 변수가 무엇을 의미하는지에 대해 생각하고 설명할 수 있는 기회가 필요하며 하나의 변수가 변함에 따라 또 다른 변수의 값이 변한다는 함수 개념을 인식시킬 필요가 있다고 하였다. 그리고 이기석·이두호(2010)에 다르면 표, 그래프, 식을 번역하는 과정과 그 반대 과정 모두에서 어려움을 겪기 때문에 상황·언어적 표현을 거쳐 가게 할 필요가 있으며, 교사의 설명으로 투입되는 ‘수학적 개념’이 심상만으로만 수용되어 고착화되지 않도록 지속적인 개념의 연결성 측면을 강조하고, 이에 대하여 학생들이 어떤 조절 과정을 거치는지 사고 과정의 흐름을 확인할 필요가 있다고 하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 기초 분석 내용

1. 연구 대상 선정

본 연구에서는 국가수준 중학교 학업성취도 평가에서 검사 동등화를 수행하기 추출한 표집 집단이 서답형 문항에 응답한 답안을 연구 대상으로 하고 있다. 국가수준 학업성취도 평가에서는 검사 동등화를 안정적으로 하기 위해 1.5% 규모의 표집 학교/학급을 선정하여 전수평가와 병행하고 있기 때문에 이를 분석 대상으로 삼았다. 표집 학급은 지난해의 정보를 이용하여 2단계 층화 군집 설계 방식으로 추출한다(김경희 외, 2014, pp. 72-73). 이것은 모집단을 구성하는 각 구성 요소가 추출될 확률이 알려져 있는 확률표본추출법에 기반을 둔 다단계 표집, 층화추출, 군집표집법으로 구성된 방법이다. 이러한 방식으로 추출되는 표본의 크기는 대체로 각 층의 모집단의 크기에 비례하게 되는데, 2013년 표집 설계에 대한 세부 사항은 <표 III-1>과 같다.

이 연구에서 다루는 문항에 대한 각 답지의 수는 236학급에 해당하는 8007개로서 분석한 답안지에 해당되는 지역별 학교 수와 학생 수는 <표 III-2>와 같다.

<표 III-1> 학업성취도 평가 표집 설계
(시기자 외, 2014; 27)

구분		내용
모집단		중학교 3학년
표집 시기		3-4월
학교 표집 틀		지난해의 전국 조사
표집 설계		2단계 층화 군집 설계
표집 단위	1단계	학교
	2단계	학급
층화 변인	외층	시·도교육청
	내층	도시화와 학교 유형 (설립 유형, 성별 유형)
표집 방법	1단계	체계적 표집
	2단계	표집 학급 1개 무선 표집
학급 크기		35명 기준
표본 크기		약 8000명

<표 III-2> 2013년 학업성취도 평가의 지역별 표집 규모

지역	서울	부산	대구	인천	광주	대전
학교 수	40	15	13	14	9	8
학생 수	1313	494	451	488	304	263
지역	울산	경기	강원	충북	충남	전북
학교 수	6	57	7	8	9	9
학생 수	187	2076	231	259	292	306
지역	전남	경북	경남	제주	세종	계
학교 수	9	12	16	3	1	236
학생 수	313	383	513	101	33	8007

2. 분석 대상 문항의 기초 분석

2013년 중학교 3학년 수학과 국가수준 학업성취도 평가의 범위는 중학교 1, 2학년 전 과정과 3학년 1학기 과정 중 ‘이차방정식의 활용’까지이다. 평가 내용 영역은 수와 연산, 문자와 식, 기하, 함수, 확률과 통계로 구성되어 있고 행동 영역은 계산, 이해, 추론, 문제해결로 구성되어 있다. 이 범위에서 선택형 29문항과 서답형 4문항이 출제되었다. 본고에서는 이 가운데 수식으로 나타내고 풀이 과정을 거쳐 결과의 산출을 요구하거나 함수식의 표현을 요구하는 2번과 4번을 분석 대상으로 삼았다. 두 문항의 내용과 행동 영역, 성취기준은 <표 III-3>과 같다(이인호 · 조윤동 · 이광상, 2014).

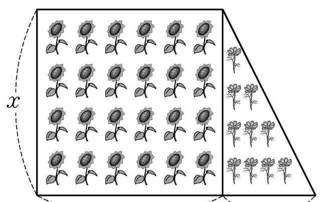
<표 III-3> 분석 대상 문항의 내용, 행동 영역과 성취기준

문항		내용영역	행동영역	성취기준
2	(1)	문자와 식	문제 해결	간단한 등식을 변형할 수 있다.
	(2)			
4	(1)	함수	문제 해결	일차함수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	(2)		계산	

2번은 먼저 문자를 이용하여 주어진 문제 상황을 식으로 나타내고, 그것을 바탕으로 등식을 만든 다음 등호의 왼쪽에 어떤 한 문자(y)를 남기고 나머지 문자(x)나 수를 등호의 오른쪽에 오도록 등식을 변형하는 과정과 그 결과를 쓰는 문항이다. 4번은 먼저 함수 개념을 바탕으로 식을 세우고, 다음으로 함숫값(y)이 주어졌을 때 독립변수의 값(x)을 구하는 문항이다. 4번은 식을 세우거나 푸는 과정이 없기는 하지만 답으로 제시된 함수식을 통해서 학생의 오개념을 살펴볼 수 있을 것이다. 이런 까닭으로 본 연구에서는 학생들의 사고 과정을 평가할 수 있다고 판단된 2번과 4번 문항의 답지를 분석 대상으로 하였다. 이 연구에서는 학생들이 문항에 대하여 반응한 양태를 분석하여 교수 · 학습에 대한 시사점을 끌어내는 데 그 목적이 있음과 아울러 표본(표집 집단)의 크기가 8000명 이상으로 매우 크므로 상대도수(백분율)에 대하여 타당성을 검정하는 절차는 거치지 않았다. 분석 대상인 문항은 다음과 같다.

이 두 문항에서 2_(1)번은 두 문자 x, y에 관한 다항식으로 나타내는 것이고, 2_(2)번은 2_(1)번과 관련지어 특정 조건을 만족하도록 등식으로 표현하고 나서 y를 x에 관한 식으로 나타내는 과정과 결과를 기술하는 것이다. 그리고 4_(1)번은 y를 x에 관한 함수식으로 나타내는 것이고 4_(2)번은 특정한 조건을 만족하는 결과를 숫자로 나타내는 것이다. 이런 까닭으로 이에 본고에서는 2_(1), 2_(2), 4_(1)번의 답안을 분석하였는데, 세 문항의 특성이 다르므로 각각을 분석하는 틀도 달리 하였다.

서답형2. 그림과 같이 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양의 꽃밭 옆에 밑변의 길이가 $2y$이고 높이가 x인 직각삼각형 모양의 꽃밭을 새로 만들었다. 물음에 답하시오.



(1) 전체 꽃밭의 넓이를 x와 y에 관한 식으로 나타내시오.

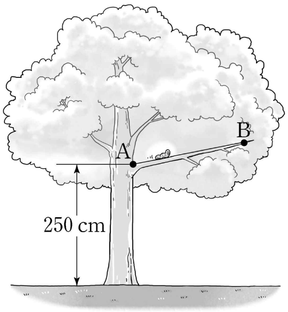
<답> ________

(2) 전체 꽃밭의 넓이가 새로 만들어진 직각삼각형 모양 꽃밭의 넓이의 5배일 때, y를 x에 관한 식으로 나타내는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

<풀이 과정>

<답> ________

서답형4. 나무의 A 지점은 지면으로부터 250cm 높이에 있다. 애벌레가 나무의 A 지점에서 직선의 형태로 곧게 뻗은 가지를 타고 B 지점을 향해 일정한 속력으로 올라가고 있다. 애벌레는 A 지점에서 출발한 지 10초 후 지면으로부터 높이가 258cm인 곳에 이르렀다. 물음에 답하시오.



(1) A 지점에서 출발한 애벌레가 x초 후 지면으로부터 $y$cm 높이에 있을 때, y를 x에 관한 식으로 나타내시오.

<답> ____________

(2) A 지점에서 출발한 애벌레가 지면으로부터 294cm 높이에 있는 B 지점에 도착했을 때까지 걸린 시간을 구하시오.

<답> ____________초

분석 대상인 두 문항에 대한 모집단의 반응 결과는 <표 III-4>와 같다. 정답률은 [(득점의 합계)÷{(배점)×(전체 수험생 수)}]×100(%)로 산출하였다. 두 문항의 정답률은 모두 서답형 4문항의 평균 정답률 42.12%보다 낮게 나왔다. 이는 주어진 식을 계산하거나 특정 결과를 밝히는 과정을 완성하는 것과 같은 문항과 달리 2번과 4번은 등식을 세우고 특정한 조건에 맞는 결과를 산출하는 문제였기 때문인 것으로 판단된다. 그리고 4번의 정답률이 2번보다 낮았다. 2번은 대등한 관계에 있는 두 미지수로 다각형의 넓이를 구하고 그것을 이용하여 등식을 세운 다음 그 등식을 변형하는 것이고, 4번은 처음부터 주종관계에 있는 두 변수 사이의 관계를 파악하여 등식(일차함수)를 세우는 것이었기 때문인 것으로 판단된다.

<표 III-4> 2, 4번에 대한 모집단의 반응 결과

문항 번호	정답률 (%)	변별도	부분 점수 반응 분포(%)					
			0	1	2	3	4	5
2	35.15	0.68	45.77	0.63	24.91	7.47	3.2	18.02
4	27.25	0.63	66.70	0.01	12.05	0.07	21.17	-

Ⅳ. 연구 결과

이 장에서는 분석 대상 문항의 하위 문항에 대한 학생들의 반응을 유형별로 분류하고 해당 유형이 차지하는 비율을 제시하면서 그러한 반응을 보인 까닭을 추론하고자 한다. 2번의 하위 문항 (2)는 <풀이 과정>과 <답>란을 분리하여 분석하고 4번의 하위문항 (2)는 분석 대상에서 제외하였다. 4_(2)번에서는 <답>란에 계산한 결과만 수로 제시되기 때문이다. 이를 바탕으로 교수·학습에 대한 시사점을 도출하고자 한다.

1. 서답형 2번의 답지 반응 분석 결과

2번의 하위문항에 대한 모집단의 부분점수별 반응 결과는 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 서답형 2번에 대한 모집단의 반응 결과

문항 번호	정답률 (%)	변별도	부분 점수 반응 분포(%)			
			0	1	2	3
2_(1)	53.08	0.63	46.92	0.00	53.08	-
2_(2)	23.20	0.63	70.55	7.71	3.34	18.41

2_(1)의 경우 정사각형의 넓이와 직각삼각형의 넓이를 구하여 더한 결과를 나타내는 것으로, 도

형의 넓이만 바르게 구할 줄만 알면 되는 문항이다. 이런 까닭으로 서답형 가운데서 꽤 높은 정답률을 기록했다. 그러나 2_(2)의 경우는 새로운 조건이 덧붙으면서 등식을 만들고 그것을 변형하여 y를 x에 관한 식으로 나타내는 것인데, 문제를 풀기 위한 식을 쓴 경우가 53.90%에 지나지 않고 그 가운데서 풀이 과정과 <답>란까지 모두 쓴 경우는 49.35%였다. 다시 이 중에서 점수를 일부라도 얻은 경우는 29.64%이고, 만점을 얻은 경우는 18.41%에 지나지 않았다. 이에서 볼 때 다항식 형태로 답을 하는 문제는 어느 정도 해결하는 편이나 등식을 세우고 그것을 정리하는 데에는 취약함을 알 수 있다. 아래에서는 하위문항별로 반응을 몇 개의 유형으로 구분하여 분석하고자 한다.

가. 서답형 2의 하위 문항 (1)의 분석 결과

서답형 2_(1)에서 모범 답안은 x^2+xy이다. 학생들의 반응을 분석할 때에는 x^2+xy와 $x(x+y)$를 정리가 된 정답으로, $x^2+\frac{1}{2}\times 2xy$와 $x(x+2y)-xy$는 정리가 덜 된 정답(유사정답)으로 분류하였다. 계수는 약분을 해야 하고 동류항은 하나의 항으로 묶는 것이 마지막 처리라고 판단하였기 때문이다. 이때 x, y의 범위는 고려하지 않았다.

<표 IV-2>는 답지를 정답과 오답, 무응답으로 분류하여 나타낸 것이다. 정답은 정답으로 처리한 유사정답을 포함하고 오답은 이것들과 무응답을 제외한 것이다. 무응답은 아무 것도 쓰지 않았든지 의미가 없는 기호나 부호, 말 따위를 쓰거나 나열한 경우를 뜻한다. 이 하위문항에 대한 전체 집단의 정답률 53.08%과 차이가 거의 없었다.

<표 IV-2> 2_(1) 정오답의 분류

구분	도수(명)	백분율
정답	4,253	53.12
오답	1,872	23.38
무응답	1,882	23.50
계	8,007	100

<표 IV-3>은 무응답을 제외하고 답을 정리했는지에 따라 분류한 것이다. 미정리는 동류항을 하나의 항으로 정리하지 않은 경우, 수와 문자들이 곱해져 있을 때 곱셈 기호를 생략하지 않은 채 나타낸 경우(거듭제곱을 사용하지 않은 경우를 포함), 분수나 분수식에서 약분을 하지 않은 경우 등을 일컫는다. 이를테면 이 문항에서 정답으로 처리한 것으로는 $x^2+\frac{1}{2}\times 2xy$, $\frac{x(2x+2y)}{2}$, $x(x+2y)-xy$, 오답으로 처리한 것으로는 $x+(x+2y)\times\frac{1}{2}$, $y=x+(x+2y)\times x\times\frac{1}{2}$을 예로 들 수 있다. 인수분해나 전개가 완전히 수행된 경우를 빼고는 인수분해를 했는지는 반영하지 않았다. 왜냐하면 전개한 것이 더 명확할 수 있기 때문인데, 이를테면 $\frac{(x+2xy)x}{2}$는 정리하지 않은 경우이고 $2x+2xy$, $x(x+2y)$는 정리한 경우이다. 미정리로 분류하는 기준은 다른 문항에서도 동일하게 적용한다.

<표 IV-3> 2_(1)에서 무응답을 제외한 답의 정리 여부에 따른 분류

구분	도수(명)	백분율
정리	5,137	83.87
미정리	988	16.13
계	6,125	100

<표 IV-4>는 정답으로 처리된 답을 정리했는지의 여부에 따라 분류하여 나타낸 것이다. 동류항이나 계수를 정리하지 않았으나 정답으로 처

리한 유사정답 $x^2+\frac{1}{2}\times 2xy$, $x(x+2y)-xy$ 등의 비율은 16.88%(718명)이었다. 이것은 답을 기재한 인원에서 미정리로 나타난 16.13%(<표 8> 참조)와 거의 비슷했다. 이는 풀이를 시도한 경우에 정오답과 관계없이 가장 간단한 형태로 정리하지 않는 학생들이 약 16% 가량 존재함을 보여주고 있다. 이를 통해 식을 간단히 나타내어 마무리하는 것에 주의를 기울이도록 지도할 필요성이 있음을 알 수 있다.

<표 IV-4> 2_(1) 정답의 정리 여부에 따른 분류

구분	도수(명)	백분율
정리	3,535	83.12
미정리	718	16.88
계	4,253	100

<표 IV-5>는 어떤 방식으로 답을 구했는지를 기준으로 유형을 분류한 것이다. 이 정보로부터는 학생들이 어떻게 생각해서 오답을 하게 되었는지를 추론할 수 있을 것이다. 이 문항에서는 다항식 형태로 답을 해야 하지만 다항함수, 방정식, 수, 분수식, 분수함수 등의 유형으로 답을 한 경우도 많았다. 오답 중에서 다항함수와 분수함수의 형태는 $y=f(x)$, $y=f(x, y)$로 쓰인 것에 국한하였다. 이를테면 $y=x^2+xy$, $y=x^2+2xy$와 같은 것이 있다. 이 형태가 28.36%(531명)를 차지하고 있는데 이는 문제의 해결에 요구되는 것이 다항식인지 (다항)함수인지를 구별하지 못하는 학생이 적지 않음을 보여주고 있다. 특히, 넓이를 바르게 구하고서도 $y=x^2+xy$와 같은 함수 형태로 나타낸 것이 11.11%(208명)로 나타났다. 함수 형태로 답을 한 학생들에 대해서는 각별히 다항식과 함수의 개념을 바탕으로 둘을 구별할 수 있도록 하는 지도가 필요할 것이다. 방정식 형태는 함수 형태 이외의 등식으로 나타낸 것을 말하는데, 구체적으로는 $p(x, y)=0$과 같은 일반적인 방정식뿐만 아니라 $x=f(x, y)$와 같이 좌변에 x를 둔 것도 방정식의 형태로 분류하였다. 이를테면 $x^2+xy=0$, $x^2+xy-y=0$, $x=2y$ 등이 있다. 방정식의 형태로 답을 한 경우는 미지수가 있으면 그것을 구해야 한다는 생각에 사로잡혀 있는 것이라고 판단된다. 그리고 $x=a$, $y=b$(a, b는 상수)와 같이 미지수의 값을 구한 형태로 쓴 것이나 상수만 쓴 것은 수로 분류하였다. 두 가지 모두 방정식을 풀어 답만 쓴 것이라고 판단된다. 이것은 방정식 형태로 표현한 것과 함께 다항식과 방정식이 요구되는 상황을 명확히 구별하지 못하여 발생한 경우라고 생각된다. 덧붙여서 이 문항에서 x^2+xy를 구하고서 $y=x^2+xy$나 $x^2+xy=0$와 같이 답한 학생이 236명(12.07%)으로 적지 않았던 것은 이 문항에서 요구하는 것이 무엇인지 정확하게 파악하지 못하고 있음을 나타내고 있다고 볼 수 있다. 그러므로 다항식, 다항함수, 방정식의 개념을 정확히 알도록 해야 한다. 또한 문항을 바르게 읽고 이해하여 문항에서 어떠한 식을 요구하는지를 파악할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

<표 IV-5> 2_(1) 오답의 유형에 따른 분류

응답 유형	도수(명)	백분율
다항식	1097	58.60
다항함수	525	28.04
방정식	154	8.23
수	86	4.59
분수식	4	0.21
분수함수	6	0.32
계	1872	100.00

<표 IV-6>은 도형의 넓이를 구하는 방법에 따라 분류한 것이다. 정사각형의 넓이 x^2 대신에 삼각형의 넓이인 $x^2/2$을 사용하거나 삼각형의 넓이 xy 대신에 사각형의 넓이 $2xy$를 사용하여 계산한 경우로 분류하였다. 오답지에서 차지하는 비율은 전자가 21.63%(405명), 후자가 2.87%(54

명)이다. 이 경우는 답에 $x^2/2$나 $2xy$가 분명하게 나타난 경우만 포함하였다. 이러한 오류는 삼각형과 사각형으로 구분하여 넓이를 구하여야 하는데, 모두 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 적용하였거나(예: $\frac{x^2}{2}+xy$) 사각형의 넓이로 구한(예: x^2+2xy) 경우와 사다리꼴로 생각하여 넓이를 구하면서 계산에 오류가 있던 경우들이었을 것으로 판단된다. 따라서 이러한 오류를 방지하기 위해서는 문제를 적절하게 분해하고, 분해한 각 부분을 수식으로 나타내는 데 필요한 요소를 정확하게 적용할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

<표 IV-6> 2_(1) 넓이를 구한 방식에 따른 분류

구분	도수(명)	백분율
삼각형을 사각형으로 구함	405	21.63
사각형을 삼각형으로 구함	54	2.87
계	459	24.51
총 오답 수	1872	

나. 서답형 2의 하위 문항 (2)의 분석 결과

2_(2)번의 모범 답안은 <표 IV-7>과 같다. 여기서는 학생들의 반응을 <풀이 과정>과 같이 본래의 문항에서 요구하고 있는 조건을 만족하는 등식(도입식)을 세웠는지, 이 등식으로부터 y를 x에 관한 식으로 나타내기 위한 과정(이항이나 약분을 적용한 중간식)이 있는지, <답>란에 답을 기재했는지의 세 부분으로 나누어 분석하였다.

<표 IV-7> 서답형 2_(2)번의 모범 답안

<풀이 과정> $x^2+xy=5xy$

$4xy=x^2$

$y=\frac{x^2}{4x}$

$y=\frac{x}{4}$

<답> $y=\frac{x}{4}$

<표 IV-8>은 도입식의 유무, 중간식의 유무, <답>란에 기재한 여부, 무응답으로 분류한 것이다. 이 문항의 답에서 도입식, 중간식, <답>란의 답이 모두 있는 경우는 49.35%(3952명)였다. <풀이 과정>과 <답>란의 어느 하나에도 기재하지 않은 것이 무응답인데, 이에 해당하는 것이 45.32%(3629명)이다. 이것은 문항 2_(1)보다 21.82%p가 많은 수치이다. 무응답을 제외하고 도입식, 중간식, <답> 가운데 어느 하나 이상을 쓰지 않은 경우가 5.32%(426명)이었다.

<표 IV-8> 2_(2) 식과 답의 유무에 따른 분류

응답 유무			도수(명)	백분율
도입식	있음	중간식 있음	4071	50.84
		중간식 없음	245	3.06
	없음		65	0.81
<답>	있음		4224	52.75
	없음		157	1.97
무응답			3629	45.32

※백분율은 표집 인원 8007명에 대한 비율임.

<표 IV-9>는 도입식을 등식으로 바르게 세웠는지 아닌지와 관계없이 그것을 등식, 방정식 형태로 분류한 것이다. 다항식은 등호 없는 순수한 다항식을 포함하여 $xy\times 5=5xy$, $5x^2+\frac{1}{2}(2xy)=5(x^2+xy)=5x^2+5xy$와 같이 도입한 다항식을 동치인 다항식으로 고친 것을 등호로 연결한 것도 다항식이라 하였다. 이러한 기준에서 문항 2_(1)에서는 다항식으로 나타낼 것을 등식으로 나타낸 것이 36.61%(1872명 중 685명)이었고 이 문항 2_(2)에서는 등식으로 나타낼 것을 다항식으로 나타낸 것이 8.02%(4381명 중 351명)이었다. 이것으로부터 문항에서 요구하는 식의 형태가 무엇인지를 정확히 파악하지 못하는 학생들이 많음을 알 수 있다.

<표 IV-9> 2_(2) 도입식의 유형에 따른 분류

도입식 유형	도수(명)	백분율
등식	3965	90.49
다항식	351	8.02
없음	65	1.49
계	4381	100

<표 IV-10>은 <풀이 과정>을 도입식과 중간식의 맞고 틀림에 따라 분류한 것이다. 도입식이 틀리고 중간 과정이 맞다는 것은 도입식을 제외한 풀이 과정에서 잘못된 도입식에 동치인 등식으로 중간 과정을 구성한 경우이다. 도입식이 틀리고 중간 과정도 틀렸다는 것은 도입식이 잘못되었는데 중간 과정도 도입식과 동치가 아닌 등식으로 구성한 경우이다. 이와 같이 도입식은 있으나 그것의 옳고 그름에 관계없이 중간 과정이 틀리거나 없는 경우가 20.02%(864명)로 많은 학생이 식을 정리하는 과정에서 도입식과 다르게 정리하는 것으로 나타났다. 풀이 과정을 기술하지 않았거나 식을 올바르게 변형하여 답을 이끌어 내지 못한 것은 계산의 실수도 있겠지만 분배법칙이나 동류항의 정리와 같은 계산의 기본 법칙을 바르게 이해하지 못하고 있거나 등식의 성질을 바르게 적용하지 못하는 것도 큰 영향이라고 판단된다. 그러므로 식의 계산과 관련된 개념 이해와 계산의 정확성 제고에 많은 노력이 요구된다.

<표 IV-10> 2_(2) 식의 정오에 따른 분류

<풀이 과정>의 정오		도수(명)	백분율
도입식	중간 과정		
맞음	맞음	2155	49.93
	틀림	253	5.86
	없음	34	0.79
틀림	맞음	1263	29.26
	틀림	401	9.29
	없음	210	4.87
계		4316	100

※ 무응답과 도입식이 없는 경우는 제외

<표 IV-11>은 도입식을 등식으로 나타내기는 하였으나 틀린 도입식에 어떤 오류가 있는지에 따라 분류한 것이다. 등식 $x^2+xy=5xy$을 기준으로 오류의 유형을 설명하고, 두 가지 오류가 함께 나타난 경우는 좀 더 근본적인 오류로 판단되는 쪽에 포함하여 분류하였다. 도입식을 등식으로 나타냈지만 잘못된 등식으로 나타낸 1523개의 답안 가운데 가장 많은 유형은 좌변에서 정사각형과 삼각형의 넓이를 구해서 더해야 하는데 정사각형의 넓이만을 구하여 나타낸 경우로 43.53%(663명)를 차지하였다. 이를테면 $x^2=5xy$, $x^2=5(2xy)$와 같은 것이 있다. 다음으로 많이 나타난 형태는 좌변과 우변에서 모두 삼각형의 넓이 대신에 사각형의 넓이를 사용한 경우이다. 좌변에서는 xy가 아닌 $2xy$를, 우변에서는 $5xy$가 아닌 $10xy$를 사용하였다. 사각형의 넓이를 양변에서 모두 사용한 것이 113개, 좌변에서 사용한 것이 17개, 우변에서 사용한 것이 25개로 총 10.23%(155명)를 차지하였다. 이를테면 $x^2+2xy=2xy\times 5$, $x(x+2y)=5xy$, $x^2+xy=10xy$와 같은 것이 있다.[2] 세 번째로 우변에서 삼각형의 넓이를 5배한 $5xy$를 사용해야 하는데 좌변에서 x^2+xy에 5배를 한 경우로 2.92%(45명)를 차지하였다. 이를테면 $5(x^2+xy)=xy$가 대표적이다. 좌변에서 정사각형의 넓이만 기술한 것은 문제의 뜻을 바르게 이해하지 못한 경우로 판단된다. 이것은 전체 넓이가 부분 넓이의 5배라는 조건을 부분끼리 비교하는 것으로 잘못 이해한 것으로 보인다. 사각형의 넓이를 삼각형의 넓이로 구한 경우는 나타나지 않고, 삼각형의 넓이가 아닌 사각형의 넓이를 구하여 사용한 것은 넓이 공식을 착각하여 잘못 적용한 경우가 대부분일 것으로 판단된다. 삼각형의 넓

2) <표 IV-6>에서 x^2이 아닌 $\frac{x^2}{2}$로 나타낸 것(사각형을 삼각형으로 구함)을 여기서는 $\frac{x^2}{2}+xy=5xy$, 곧 $x^2+2xy=10xy$로 나타낸 것 등에 포함하였다.

이는 초등학교 때부터 줄곧 다루어 오던 것으로 이것을 구하지 못하는 경우는 없어 보이기 때문이다. 도입식에서 나타난 오류로부터 문항을 바르게 읽고, 잘 알고 있는 공식이라도 정확하게 적용하여 푸는 습관을 기르도록 하는 것이 필요함을 알 수 있다.

<표 IV-11> 2_(2) 등식인 도입식의 오류에 따른 분류

구분		도수(명)	백분율
좌변	삼각형을 사각형으로 구함	1	1.15
	정사각형 넓이만 구함	663	43.53
	5배함	45	2.92
양변	삼각형을 사각형으로 구함	113	7.41
우변	삼각형을 사각형으로 구함	25	1.67
기타		660	43.32
계		1523	100

<표 IV-12>는 도입식을 정리하는 과정에서 나타난 오류에 따라 분류한 것이다. 도입식을 정리하는 과정에서 오류의 유형이 명확한 경우를 보면 인수분해(또는 전개)를 잘못한 경우를 포함하여 5가지 유형이 나타난다. 먼저 풀이 과정에서 인수분해를 이용하면서 그릇되게 사용한 경우와 두 다항식의 곱이나 제곱식을 잘못 전개한 경우로 2.92%(19명)가 있었다. 이를테면 $x^2+xy=5xy$ / $x^2-4xy=0$ / $x^2-4xy+16y^2=16y^2$ / $(x-4y)^2=16y^2$/ $x=4y\pm4y=8y$(/는 행 바꿈의 표시)와 같이 푼 경우였다. 다음으로 도입하는 식은 등식이었으나 다항식으로 바꾸거나 그 반대로 도입하는 식은 다항식이었으나 등식으로 바꾼 경우이다. 이를테면 $x^2+xy=5(xy)$ /$=x^2+xy=5xy$ /$=x^2-4xy$/$y=x^2-4xy$로 풀이한 것과 $5x^2+2y$ / $y=\frac{5x^2}{2}$와 같이 푼 경우로 18.48%(121명)가 있었다. 세 번째로 수, 문자의 곱셈이나 나눗셈으로 구성된 식을 덧셈이나 뺄셈으로 계산한 경우와 그 반대의 경우로 11.91%(78명)가 있었다. 이를테면 $x^2+xy=5xy$ /$x^2=4xy$ /$y=x^2-4x$와 같이 우변의 $4xy$를 $4x+y$로 계산한 경우와 $2y\times5+x=10xy$로 계산한 경우를 들 수 있다. 여기서 분류한 5가지 유형에 속하는 풀이 과정의 오류 33.25%(218명)를 포함하여 계산 과정에서 범하는 오류는 약간의 주의를 기울이는 것만으로도 충분히 막을 수 있는 것이므로 차분하게 문제를 해결하는 습관을 기르도록 지도해야 할 것이다. 특히 인수분해의 경우에는 인수분해를 하고 나서 거꾸로 계산(전개)해 보면서 점검하도록 지도해야 할 것이다.

<표 IV-12> 2_(2) 풀이 과정의 오류에 따른 분류

구분	도수(명)	백분율
인수분해의 잘못 적용	19	2.92
등식에서 다항식으로	92	14.10
다항식에서 등식으로	29	4.38
곱셈을 덧셈으로	62	9.48
덧셈을 곱셈으로	16	2.43
기타	436	66.69
계	654	100

<표 IV-13>은 <답>란을 가장 간단히 정리하였는지 여부로 분류한 것이다. 미정리는 답의 옳고 그름에 관계없이 약분을 비롯한 사칙연산을 끝까지 마무리하지 않은 답을 <답>란에 쓴 경우로 16.52%(723명)를 차지하고 있다. 이 가운데 특히 $y=\frac{x^2}{4x}$(41명, 0.94%), $x(x-4y)=0$(1.53%, 67명), $x^2-4xy=0$(2.40%, 105명), $2x^2=8xy$(0.07%, 3명)와 같이 문제의 뜻은 파악했으나, 정확하게 반영하지 않은 채로 정리하지 않고 답을 한 경우가 4.93%(216명)나 나왔다. 계산이 끝까지 마무리된 것인지를 판단하게 하는 교육도 필요함을 보여주는 사례라고 하겠다.

<표 IV-13> 2_(2) 답의 정리 여부에 따른 분류

구분	도수(명)	백분율
정리	3499	79.92
미정리	723	16.52
없음	156	3.56
계	4378	100

<표 IV-14>는 <답>을 기재한 형식에 따라 분류한 것이다. <답>란에 제시된 답은 쓰지 않은 경우(없음)와 기타를 제외하고 6가지 유형으로 분류하였다. 첫 번째로 이 가운데 가장 많은 비중을 차지하는 것이 함수 형태이다. 방정식과 함께 등식으로 묶을 수 있으나, 이 문항에서 요구하는 것이 등식을 y에 대하여 풀어 답을 해야 하는 것이므로 따로 분류하였다. y를 x에 관해서 나타낸 식이 65.98%(2888명), x를 y에 관해서 나타낸 식이 6.94%(304명)로 나타났다. 후자의 예로는 $x=4y$, $x=5y$를 들 수 있다. 후자는 y를 x에 관해서 나타내라는 요구 사항을 숙지하지 못했다고 할 수 있다. 그러므로 문항을 잘 읽고 문항이 요구하는 것을 바르게 숙지하도록 지도해야 할 것이다. 두 번째는 x, y 가운데 하나 이상의 문자에 관한 다항식으로 나타낸 경우(10.78%, 472명)인데, 이 가운데 두 문자 x, y에 관한 다항식이 대부분(다항식 형태 가운데 85.52%)이었다. 이를테면 $5xy$, $5x^2+5xy$, x^2+5xy를 예로 들 수 있다. 처음부터 등식으로 나타내면서 풀어야 하는 것이므로 다항식 형태로 답을 했다는 것은 문제 자체를 이해하지 못한 것이라고 판단된다. 세 번째는 방정식 형태로써 좌변이 문자식이고 우변이 0인 경우, 좌변과 우변이 모두 문자식인 경우이다. 이는 8.79%(385명)를 차지하였는데 $x^2-4xy=0$, $x(x-4y)=0$, $x^2=5xy$와 같은 것을 예로 들 수 있다. 네 번째로 x나 y의 값(예: $x=2$)으로 나타낸 경우가 1.31%(57명)이었고, 수만을 답으로 쓴 경우가 2.21%(97명)이었다. 이 두 경우를 방정식을 풀어 얻은 결과라고 하여 방정식에 포함하면, 방정식 유형의 답은 모두 12.31%(539명)가 된다. 뒤의 두 경우는 첫 번째와 마찬가지로 y를 x에 관해서 나타내라는 요구 사항을 숙지하지 못한 것으로 보인다. 특히 네 번째는 등식은 방정식이고 방정식은 풀어서 미지수의 값을 구해야 한다는 생각이 강하기 때문인 것으로 여겨진다. 따라서 등식과 방정식을 구별하여 정확히 이해할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

<표 IV-14> 2_(2) 답의 유형에 따른 분류

답의 유형	도수(명)	백분율
함수 형태(x)	304	6.94
함수 형태(y)	2888	65.98
다항식	472	10.78
방정식	385	8.79
근	57	1.31
수	97	2.21
기타	19	0.44
없음*	156	3.56
계	4,222	96.45

* '없음'은 무응답을 제외하고서 도입식이나 풀이 과정이 있으나 <답>란에 답을 쓰지 않은 경우

마지막으로 여기서는 별도의 분류 항목으로 제시하지는 않았지만 풀이 과정에서 등호를 잘못 사용하는 경우가 122명 있었는데 풀이 과정이 틀린 경우(654명)의 18.65%를 차지하고 있다. 이를테면 $x^2+xy=5(xy)$ / $=x^2+xy=5xy$ / $=x^2-4xy$로 계산하고 결과를 $y=x^2-4xy$와 같이 나타낸 경우를 들 수 있다. 이것은 등호에 대한 개념을 바르게 이해하고 있지 못한 것이므로 등호의 의미와 사용법에 대해서 적절한 지도가 필요하다고 판단된다.

2. 서답형 4번의 답지 반응 분석 결과

서답형 4번의 하위문항에 대한 모집단의 부분 점수별 반응 결과는 <표 IV-15>와 같다.

<표 IV-15> 4번에 대한 모집단의 반응 결과

문항 번호	정답률 (%)	변별도	부분 점수 반응 분포(%)			
			0	1	2	3
4_(1)	22.65	0.63	77.31	0.08	22.62	-
4_(2)	31.84	0.66	68.16	0.00	31.84	-

두 변수 x와 y 사이의 관계를 파악하여 등식(일차함수식)을 세우는 4_(1)번의 경우, 두 미지수 x와 y에 관한 방정식을 세우는 2_(2)번과 비슷한 정답률을 나타냈다(2_(2)의 정답률은 23.20%). 2_(2)번의 경우에 먼저 등식을 세우고 그것을 변형하여 y를 x에 대한 식으로 나타내는 과정을 기술하므로 4_(1)번보다 만점을 받은 비율은 낮지만 부분점수를 받은 경우의 비율을 포함하면 비슷한 정답률을 나타냈다. 이러한 사실로부터 방정식이든 함수식이든 등식을 세우는 것을 학생들이 매우 어려워함을 알 수 있다. 4번의 하위문항에서 (1)번보다 (2)번의 정답률이 높게 나왔다. 이는 (2)번을 (1)번에서 세운 식과 관계없이, 즉 일차함수의 개념을 적용하는 것과 관계없이 비례식이나 간단한 방정식을 세워 풀 수 있기 때문이다. 4_(2)번를 해결한 학생들은 문제 상황을 이해하고 있다고 판단되므로 그러한 상황을 함수 관계를 바탕으로 이해할 수 있게 하기 위한 교수･학습 방법을 강구해야 할 것이다.

4번에서는 앞서 기술한 바와 같이 계산의 결과만 쓰는 하위문항 (2)번을 분석 대상에서 제외하고 (1)번에 대해서만 분석 내용을 기술한다. 4_(2)번의 모범 답안은 $y=\frac{4}{5}x+250$이다. $y=250+\frac{4}{5}x$, $y=0.8x+250$ 등과 같이 소수로 표현하거나 항의 위치가 바뀐 것은 정답으로 처리하고, x에 관한 식(다항식)만 쓴 것은 틀린 것으로 처리하였다(x의 범위는 고려하지 않았음).

<표Ⅳ- 16>은 답지를 정답과 오답, 무응답으로 분류한 것이다. 이 문항에서는 $y=\frac{8}{10}x+250$처럼 약분하지 않은 것도 정답으로 인정하고 있기 때문에, 미정리 답을 오답에서만 살펴보면 이러한 것은 0.98%(78명)로 나타났다. 구해야 하는 식이 비교적 복잡한 2번에서는 식을 정리하지 않은 비율이 높았던 것에 비해, 이 문항에서는 수만 정리할 필요가 있는 간단한 일차함수 문제이기 때문에 정리하지 않은 답의 비율이 매우 낮게 나왔다고 판단된다.

<표 IV-16> 4_(1) 정오답의 분류

구분	도수(명)	백분율
정답	2102	26.25
오답	2826	35.30
무응답	3079	38.45
계	8007	100

<표 IV-17>은 어떤 방식으로 답을 했는지를 기준으로 유형을 분류한 것이다. 이 문항에서는 답의 형태를 모두 10가지로 분류할 수 있었다. 정답을 포함한 형태인 y를 x에 관한 일차함수 형태로 나타낸 경우는 90.06%(4438명)이고 이 가운데 정답은 47.36%(2102명)를 차지하였다. 정답을 제외하고서 이 유형의 예를 들면 $y=\frac{4}{5}x$(13.41%, 595명), $y=25.8x$(5.08%, 226명), $y=x+250$(4.81%, 213명), $y=250x$(3.79%, 168명), $y=10x$(3.12%, 138명), $y=10x+250$(2.57%, 114개), $y=\frac{5}{4}x$(2.51%, 111명)와 같은 것들이 있다. 다음으로 1% 이상 나타난 유형을 보면, 먼저 x, y에 관한 일차나 이차의 다항식으로 나타낸 경우가 2.62%(129명)이고, $x+y$, xy를 예로 들 수 있다. y를 x에 관한 이차함수 형태로 나타낸 경우가 2.01%(99명)이고, $y=x^2$, $y=x^2+250$, $y=250x^2$을 예로 들 수 있다. y를 x에 관한 분수함수 형태로 나타낸 경우가 1.70%(84명)이고, $y=\frac{250}{x}$, $y=\frac{1}{x}$을 예로 들 수 있다. 숫자로 나

타낸 경우도 1.10%(54명)가 나왔는데, 방정식을 풀어서 얻은 값으로 본다면 근으로 나타나낸 것과 합쳐서 1.59%(78명)가 된다. 아주 적은 수로 나온 유형으로는 x를 y에 관한 일차함수 형태로 나타낸 경우, y를 x와 y에 관한 식으로 나타낸 경우와 x를 x와 y에 관한 식으로 나타낸 경우, x, y의 분수식으로 나타낸 경우, 우변을 0이나 다른 상수로 나타낸 경우와 좌변에 x항만 있더라도 계수가 1이 아닌 경우 등이 있다. 이상에서 오답의 경우 상수항(애벌레가 맨 처음에 있던 높이)을 고려하지 않는다든지 일차항의 계수(시간에 대한 높이의 변화율)에 대한 개념 자체를 잘못 알고 있는 경우가 대부분이었다. 이 문항에서는 변화율(일차항의 계수)을 잘못 구하는 경우가 많은 것으로부터 변화하는 양들 사이에서 독립과 종속의 관계를 바르게 파악하고 독립변수의 변화량에 대한 종속변수의 변화량의 비로 변화율을 구한다는 것을 이해할 수 있도록 지도하는 데에 노력을 기울여야 한다는 것을 알 수 있다.

<표 IV-17> 4_(1) 답의 유형에 따른 분류

답의 유형	도수(명)	백분율
일차함수(y)	4438	90.06
일차함수(x)	15	0.30
분수함수	84	1.70
이차함수	99	2.01
기타 함수 형태	42	0.85
다항식	129	2.62
분수식	9	0.18
방정식	34	0.69
수	54	1.10
근	24	0.49
계	**4,904**	100

Ⅵ. 맺는 말

본 연구에서는 국가수준 학업성취도 평가의 서답형 문항에서 문제를 해결하는 과정에 나타나는 오류를 살펴보기 위하여 236개 학교 8007명의 답안을 분석하였다. 분석에 사용한 문항은 국가성취도 평가 서답형 2번과 4번 문항으로 내용 영역은 문자와 식, 함수이고 행동 영역은 문제해결과 계산이다. 두 문항은 등식을 세우고 특정한 조건에 맞는 결과를 산출하는 문제를 다루고 있다. 문자와 식에서 출제된 문항은 문자를 이용하여 주어진 상황을 식으로 나타내고, 그것을 바탕으로 등식을 만든 다음 등식을 변형하는 과정과 그 결과를 쓰는 문항이다. 함수에서 출제된 문항은 독립-종속관계에 있는 두 변수 사이의 관계를 파악하여 등식(일차함수)를 세우는 문항이다. 답안을 분석한 결과, 각 문항에서 문항 풀이 과정이나 결과에서 다양한 오류들이 나타났다. 본 연구에서는 이에 대한 원인을 추론하고 교수학적 시사점을 이끌어 내고자 하였다.

우선, 본 연구의 서답형 2번 문항에서 학생들은 다항식 형태로 답을 하는 것이 아닌 다항함수, 방정식, 수, 분수식, 분수함수 등의 유형으로 답을 한 경우가 많았다. 이는 문항에서 요구되는 것이 다항식인지, 함수인지, 방정식인지를 구별하지 못하거나 근본적으로 다항식, 함수, 방정식 자체를 구별하지 못하는 사례라 할 수 있다. Sfard(1992)는 학생들은 함수를 구조적 대상으로 보거나 함수를 계산 과정으로 인식하는 경향이 나타나는데, 연산 개념이 구조적 개념에 앞서 나타난다고 보고한 내용과 흡사하다. 다시 말하면, 함수를 대상으로서 바라보기 전에 계산 과정으로 생각하고 대수식으로 나타내야하는 상황에서도 함수식으로 나타내는 경향이 있다고 볼 수 있다. 이것은 학생들이 함수를 대수식과 관련짓는 경향이 강하다는 것을 의미하므로 수학을 가르치는 교사들이 특별히 주의를 기울여야 할 내용(Sfard, 1992)이라는 주장 역시 고려해야 할 것이다. 또한 다항식을 방정식 형태로 표현하고 있는데, 다항식이 요구되는 상황과 방정식이 요구

되는 상황을 명확히 구별하지 못하는 것에 대해서는 방정식의 개념을 바탕으로 둘을 구별할 수 있도록 하는 지도하는 것이 필요할 것이다.

2_(2)에서 나타나는 가장 많은 오류는 식을 정리하는 과정에서 정교하지 못하거나 등식의 활용에서의 오류, 제시해야 할 답 형태가 문항에서 요구하는 것이 아닌 경우 등이 많이 나타났다. 이는 등식의 성질을 이해하지 못한 채 방정식을 기계적으로 푸는 경우(신인숙, 1996)일 수도 있어 보다 세심한 지도가 필요하며, 학생들이 기호와 수식을 정확히 사용하고 그 표현을 명확히 이해하도록 하는 것과 수학적 표현에 유의하여 학습할 수 있도록 해야 할 것이다(김래영 · 이민희, 2013; 이종희 · 김부미, 2006). 또한 계산이 끝까지 마무리 되지 못하거나 문항에서 요구하는 답안의 형태를 제시하지 못한 답안이 많은 것으로 미루어 자신의 답안이 잘 마무리 되었는지 혹은 문항에서 요구하는 것인지를 다시 한 번 점검하는 태도를 가질 수 있도록 지도해야 할 것이다.

4_(1)번 분석에서 학생들에게 나타난 오류 중에 상수항을 고려하지 않았거나 변화량을 바탕으로 변화율을 구해야 하는데, 변화량을 잘못 구하는 경우가 많이 나타났다. 함수적 사고는 실생활에서 변화의 종속성에 따라 한 변수가 변함에 따라 다른 한 변수가 변화함을 변수들 사이의 특성을 파악하여 식이나 그래프로 나타내고 이를 통하여 현상을 해석하고 예측할 수 있는 능력을 의미한다. 따라서 다양한 현상을 통하여 종속 관계를 다룸으로써 함수 개념을 형식화할 수 있어야 하며(정영옥, 1997), 학교 수학에서는 변화를 다룰 수 있는 기회가 보다 많이 제공되고 변화에 대한 개념을 지도하는데 노력을 기울려야 할 것이다. 그동안 선행 연구에서도 많은 학생들이 함수의 개념 정의를 이해하지 못한 상태이며 진술 능력이 빈약하므로, 그래프, 문장, 화살표 및 다이어그램 등 다양한 방법을 동원할 필요가 있고(조완영 · 양재식, 2003), 또한 지필환경에 국한하지 말고 '테크놀로지를 활용한 교수학적 환경을 시도하여 지필 환경에서 제시되는 오류를 완화할 기회를 제공할 필요가 있음(안가영 · 권오남, 2002)을 주장해왔다. 따라서 학생들이 함수의 정의를 이해하고 이를 정확히 활용하기 위한 다양한 교수 · 학습 방안이 고안되어야 할 것이다.

이와 같은 오류들 중 가장 중요한 사항을 정리하자면, 우선 문자와 식 영역이나 함수 영역 모두에서 학생들이 문제를 이해하지 못해서 나타나는 오류들이 많이 나타난다고 보인다. 박장희 외(2012)에서 지적한 바와 같이 문장제 문항에서 학생들이 '문제 이해의 오류'는 문제를 해결하는 과정에서 '풀이 과정의 오류'와 '풀이 과정의 생략'이라는 오류가 계속해서 나타난다. 따라서 문제 자체를 이해하는 데 보다 초점을 두어야 하며 이를 위하여 문장제 문장을 읽는 기술이나 주어진 정보와 의도를 파악하는 연습이 병행되어야 할 것이다(박장희 외, 2012).

학생들에게 보이는 오류를 분석하는 것으로는 1차적인 연구에 지나지 않을 것이다. 이를 보다 적극적으로 교수 · 학습 상황에 접목시킬 필요가 있다. 학생들은 자신들의 오류를 발판으로 새로운 맥락의 수학 지식을 탐구하는 '탐구적 개념 성장 학습 활동'에 참가한다면 발견적 개념 성장이 가능하다 하였다(김부미, 2009). 예를 들어, 학생들은 일차함수의 관계식과 직선의 방정식이 같은 직선(그래프)을 나타내는 식이라는 것을 해석하지 못하는 오류를 범하였지만 방정식과 함수의 서로 다른 문자 사용의 의미를 토론하면서 일차함수와 일차방정식의 관계를 발견하였다는 것이다. 따라서 수학 교수 · 학습 장면에서 오류를 직접 활용하여 개념 학습을 할 수 있다는 가능성을 열어두고 이를 보다 적극적으로 활용하

여야 할 것이다(김수미, 2003; 박장희, 2012; Clayton et al.,1990; Tatto et al.,2008). 그러나 이용하·박지현(2011)의 연구에 따르면 우리나라 교사들은 문제 풀이 과정상에서 나타나는 오류에 대하여 수업 준비 과정에서 대체로 오류를 고려하지 않았으며, 오류는 문제의 풀이 과정에서 나타나는 것으로 생각하고 미리 교정 수업을 계획하기보다는 수업 중간에 학생들의 풀이 과정을 확인하면서 즉석에서 잘못된 점을 지적하고 고쳐주어야 한다는 교수학적 내용 지식을 가지고 있다고 한다. 따라서 학생들이 보이는 오류들을 교수·학습에 보다 적극적으로 도입하여 적절한 지도방법을 모색할 필요가 있을 것이다.

끝으로, 인지적 능력이나 특성, 지식의 구조나 과정을 다루는 것은 평가의 차원을 결정하는 본질적인 초점이 되고(Glaser, 1991), 평가의 결과로 나타난 점수를 통해 설명할 수 있는 인간의 인지구조나 과정에 대한 이론을 마련하고 그것에 근거하여 평가를 실시하는 것은 현재의 평가 결과에 대한 정보와는 다른 구조의 평가 결과를 도출할 수 있는 가능성을 의미한다(김성훈, 2001). 따라서 학생들의 오류를 통해 교수·학습을 개선해 나갈 수 있다는 명제를 전제로 받아드린다면, 여러 해에 걸쳐 시행된 평가 자료를 활용하여 분석하면 수학과 전체 내용에 대하여 교수·학습에 도움이 되는 결과를 얻을 수 있으므로 향후 국가수준 학업성취도 평가에서는 학생들의 다양한 오류를 적절히 평가할 수 있는 문항을 개발하는 것도 필요할 것이다.

참고 문헌

고상숙(2012). 교육소외 학생들의 기초학력 신장을 위한 수학학습에서 나타난 수학적 오류: 탈북학생과 저소득층 학생을 대상으로. **수학교육학연구, 22**(2), 203-227.

권영인·정종규(2002). 수학문제 해결에 있어서의 오류 분류 및 그 지도방안에 대한 연구. **중등교육연구, 14**, 5-51.

권효진·김성훈 (2010). 수학과 성취도 검사 결과의 자기평가를 통한 오답원인 유형화. **교육평가연구, 23**(4), 843-868.

김경희·김성숙·시기자·노은희·김수진·이인호·신진아·박인용·구남욱·김도남·김완수·구슬기·김부미·우석진(2014). **국가수준의 기초학력 점검을 위한 초등학교 학업성취도 평가 방안**. 한국교육과정평가원 연구보고 CRE 2014-2.

김래영·이민희(2013). 중학교 2학년 서술형 평가문항 반응에서 나타난 오류 분석: 대수 영역을 중심으로. **수학교육학연구, 23**(3), 389-406.

김부미(2005). 경험적 구조주의에 의한 수학적 오류의 분류가능성 탐색. **수학교육학연구, 15**(4), 461-488.

김부미(2009). 수학적 오류를 활용한 개념 성장 학습 활동의 실제 적용가능성 탐색. **교과교육학연구, 13**(2), 393-415.

김성훈(2001). 학업성취 평가결과 정보의 유형과 교육적 의의. **교육평가연구, 14**(2), 1-15.

김수미(2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구. **학교수학, 5**(2), 209-221.

김윤영(2003). **일차방정식 풀이 과정에서 보이는 오류의 유형 분석 및 교정 지도**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

박도순(2007). **교육평가-기해와 적용-**. 서울: 교육과학사.

박장희·유시구·이중권(2012). 실생활 문장제의 해결과정에 나타나는 오류유형 분석, **한국학교수학회논문집, 15**(4), 699-718.

박효진(2008). 문자와 식 단원에서 학생들이 보

이는 오류분석; 중학교 1학년 수학을 중심으로. **교육문화연구, 14**(1), 105-133.

서울시교육청(2011). **수학과 서술형 평가 문항 자료집-중학교용-**. 서울: 서울특별시교육정보연구원.

성태제・송미영・전현정(2010). 국가수준 학업성취도 평가의 점수화를 위한 문항반응이론의 적용. **교육과학연구, 41**(3), 29-52.

송순희・오정현(1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구. **수학교육, 36**(1), 11-22.

송영무・양두레(1997). 산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 장애에 관한 연구. **수학교육프로시딩, 5**, 423-442.

시기자・신진아・박인용・구남욱・김완수・구슬기・김준엽・박찬호(2014). **2013년 국가수준 학업성취도 평가 결과: 인지적·정의적 특성 및 변화 추이**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2014-8.

신인숙(1996). 중학생의 함수에 대한 오개념 및 오류에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

심상길・최재용(2008). 함수 학습에 나타난 수학 학습부진아의 오류에 대한 사례 연구, **수학교육논문집, 22**(3), 275-288.

안가영・권오남(2002). 함수 그래프 과제에서의 오류 분석 및 처치-테크놀로지를 활용한 교수학적 환경에서-. **수학교육 논문집, 13**(2), 337-360.

오정윤・노영순(2007). 남녀학생들의 도형 문장제 해결 오류 및 해결력에 대한 비교 분석. **한국학교수학회논문집, 10**(3), 353-367.

오정윤・노영순(2007). 남녀학생들의 도형 문장제 해결 오류 및 해결력에 대한 비교 분석-중학교 3학년 대상으로-. **한국학교수학회논문집, 10**(3), 353-367.

우현철 (2000). **이차방정식과 부등식 문제해결과정에서 나타나는 오류원인분석과 교정에 관한 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

이기석・이두호(2010). 무리함수의 가역성에 대한 학생들의 오개념 분석. **학교수학논문집, 24**(3), 709-730.

이대현・박배훈(2001). 수학교육에서 직관과 그 오류에 관한 고찰. **수학교육, 40**(1), 15-25.

이용하・박지현(2011). 학습자의 오개념과 오류에 대한 수학 교사들의 PCK. 교과교육학연구, 15(1), 223-242.

이인호・조윤동・이광상(2014). **2013년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석- 수학 -**. 한국교육과정평가원 연구보고 ORM 2014-30-3.

이정은・김원경(1999). 중학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결 전략 및 오류 분석. **수학교육, 38**(1), 77-85.

이종희・김부미(2006). 일차방정식에서 오류 탐지-교정 학습법의 교수학적 효과 분석. **교과교육학연구, 10**(2), 461-483.

장수연・안병곤(2010). 수와 연산영역의 오류유형에 따른 효과적인 지도 방안. **한국초등수학교육학회지, 14**(2), 355-376.

전영배・노은환・김대의・정찬식・김창수・강정기・정상태(2010). 미지수가 2개인 연립일차부등식의 문제해결과정에서 발생하는 오류 분석 및 지도방안 연구. **수학교육논문집, 24**(3), 543-562.

정영옥(1997). **Freudental의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

조완영・양재식(2003). 중학교 1,2학년 학생들의 함수 개념 이미지와 함수 정의 능력. **수학교육논문집, 15**, 147-152.

조윤동・강은주・고호경(2011). 2011년 수학과 국가수준 학업성취도 평가에서 나타난 다문

화·탈북 가정 학생의 학교급별 성취 특성 분석. **학교수학, 13**(2), 325-345.

천유영·임대근·류현아(2013). 수학 성취 수준에 따른 고등학생들의 함수적 표현의 번역 능력. **한국학교수학회논문집, 16**(1), 141-155.

최영기·홍갑주·도종훈·김민정(2002). 선다형 평가문항을 통한 오류분석. **수학교육논문집, 14**(3), 151-162.

최지선(2003). **중등학교 수학 학습에서 나타나는 오개념에 대한 고찰**. 서울대학원 석사학위논문.

한경민·고상숙(2014). 원의 방정식의 서술형 평가에서 오류유형 분석. **학교수학, 53**(4), 509-524.

허혜자·최정임(2009). 수학과 디지털교과서 자기주도적 학습에서 나타난 오개념에 대한 연구: 분수의 나눗셈을 중심으로. **학교수학, 11**(4), 643-644.

황혜정·김명수(2014). 수학 교과에서의 학생의 오답원인 자기평가에 관한 사례 연구. **수학교육논문집, 28**(2). 255-279.

Akkoc, H. & Tall, D. (2003). The Function Concept: Comprehention and Complication. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23*(1), 1-6.

Ashlock, R. B. (2002). *Error patterns in computation: using patterns to Improve instruction*, 8th edition. Upper SaddleRiver, NJ: Prentice Hall.

Bray, W. S. (2013). How to Leverage the Potential of Mathematical Errors. *Teaching children mathematics, 19*(7), 424-431.

Clayton, G. A, Wilson, B, Scott, K. B., & Dorough, L. (1990). *Successful Mathematics Teaching for Middle-school.* Washington, D.C. : office of educational Research and Improvement. ED 316-432.

Cortés, A.(1993). Analysis of Errors and a Cognitive Model in the Solving of Equations. *Proceedings of the 17th PME Conference.* Vol. I, 146-153.

Cortés, A & Kavafian(2004). Two Important Invariant Tasks in Solving Equations: Analyzing The Equation and Checking The Validity of Transformations. *Proceedings of the 28th PME Conference*, Vol 2, 247-254.

Demetriou, A., & Efklides, A. (1994). Structure, development, and dynamics of mind: a meta-piagetian theory. In A. Demetriou & A. Efklides (Eds.), *Intelligence, mind, and reasoning: structure and development* (pp. 75-109). Amsterdam: orth-Holland.

Glaser, R. (1991). *Expertise and Assessment in M.C.* NJ: Prentice Hall.

Harder, N. M., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Horacek, H., & Wolska, M., (2006) Handling Errors in Mathematical formulas. In Ikeda, M., Ashley, K. D., Chan, T. W. (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems.* vol. 4053 (pp. 339-348). Heidelberg: Springer.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education 10*, 163-172.

Ravizza, S. M., Anderson, J. R., & Carter, C. S. (2008). Errors of mathematical processing: The relationship of accuracy to neural regions associated with retrieval or representation of the problem state. *Brain Research, 1238*, 118-126.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin.

Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification- The case of function. In Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-85). United States of America: Mathematical Association of America.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics(TEDS-M) : Policy, Practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* Amsterdam: IEA.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image, and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Analysis of Errors by Response Assessments of Korean Middle School Students on the 2013 National Assessment of Educational Achievement in Mathematics

Jo, Yun Dong (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)
Ko, Ho Kyoung (Ajou University)

In the current study, answer sheets from 8007 students in 236 Korean schools were selected and analyzed to examine errors that emerge in the process of solving descriptive questions of the National Educational Achievement Assessment in mathematics. Questions used in the analysis were response assessment covering middle school mathematics topics: “mathematical symbols and equations” and “functions.” The behavioral domain of the questions was that of “problem solving and computation,” which requires establishing an equation for a word problem and allows the calculation of an answer that meets a certain condition. The analysis results revealed various errors in each stage of each question, from understanding to solving; the study attempts to conjecture causes for these errors and draw pedagogical implications.

* Key Words : response assessments(서답형 평가), Mathematics Errors(수학적 오류)

논문접수 : 2015. 6. 25
논문수정 : 2015. 8. 5
심사완료 : 2015. 8. 5