

수학 인지적 속성에 따른 TIMSS 2011 8학년 성취도 상위국 특성 비교¹⁾

박 지 현* · 김 수 진**

본 연구는 우리나라 학생들의 수학 인지적 성취 특성을 국제수준에서 파악하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 TIMSS 2011 평가틀과 평가문항을 바탕으로 인지적 속성을 추출하고, TIMSS 2011 8학년(중2) 수학 성취도 자료를 이용하여 우리나라를 포함한 수학 성취도 상위 15개국의 인지적 성취 특성을 비교, 분석하였다. 분석결과 TIMSS 2011의 인지영역은 9가지 인지적 속성으로 재분류되었으며, 인지적 속성에 따라 국가별로 상대적으로 쉽거나 어렵게 생각하는 경향에 차이가 있는 것으로 나타났다. 특히, 우리나라 학생들은 다른 성취도 상위국에 비해 상대적으로 회상/인식하기, 계산하기, 분류/측정하기, 표현하기를 쉽게 생각하고, 해석하기, 실행하기, 일반화하기를 어려워하는 것으로 나타났다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 우리나라 학생들이 어려워하는 각각의 속성에 따라 교육적 처방을 마련해야 할 것이다.

1. 서론

학생들의 수학적 능력은 개념적 지식에 해당하는 내용영역과 과정적 지식에 해당하는 인지영역²⁾의 복합적인 발달을 통해 향상된다. 수학 학습에서 인지영역에 대한 관심은 수학 교육계를 중심으로 지속적으로 이어져 왔다. 특히 최근에는 핵심역량의 개념이 대두되면서 교육과정의 개발 및 실행에서도 무엇을 알고 있는가와 더불어 무엇을 어떻게 할 수 있는가에 대한 논의에 초점이 맞추어지고 있다.

우리나라는 2009 개정 교육과정에서 수학적

과정이라는 영역을 명시적으로 설정하여 수학의 인지영역이라 할 수 있는 과정적 지식을 강조하고 있다. 학생들의 수학 성취도를 국제적으로 비교하는 TIMSS 및 PISA와 같은 국제 평가의 평가틀에서도 내용영역과 인지영역을 동등한 수준의 축으로 설정하고, 문항을 개발할 때 이 두 가지 영역을 모두 고려하고 있다. 또한, 결과를 해석할 때에도 내용영역과 인지영역은 동일한 비중을 두고 있다.

이처럼 수학 학습과 평가에서 학생들의 과정적 지식 습득에 대한 관심이 높아지고 다양한 연구가 이루어지고 있지만, 아직까지 우리나라의 수학 교육에서는 결과 중심의 내용 이해 교육이

* 한국교육과정평가원, pjh210@kice.re.kr (제1 저자)

** 한국교육과정평가원, sjkim@kice.re.kr

1) 본 논문은 한국교육과정평가원에서 2013년도에 수행한 ‘TIMSS 2011 결과에 따른 수학·과학 교육 현황 국제비교’의 일부 내용을 수정, 보완한 것임.

2) 수학적 사고 또는 과정적 지식을 나타내는 영역은 평가에 따라 인지영역(TIMSS), 수학적 과정 영역(PISA), 행동영역(국가수준 학업 성취도 평가, 대학수학능력시험) 등으로 불리고 있다. 본 연구는 TIMSS를 기반으로 진행되므로 TIMSS에서 사용하는 인지영역으로 통일하여 사용하였다.

이루어지고 있음은 부인할 수 없는 사실이다. 현재 우리나라는 수학적 과정을 강조한 2009 개정 교육과정에 따른 교과서 적용이 완료되어가는 시점임에도 불구하고 아직까지 수학의 인지영역에 대한 실제적인 진단이나 인지영역의 교수·학습에 대한 이해와 인식은 높지 않다. 또한, 인지영역에 대한 평가를 통해 학생들의 성취를 파악하고 피드백하는 것에 큰 관심을 두고 있지 않다. 단위학교에서 학생들의 수학 성취도 평가에 사용하는 이원목적분류표를 작성할 때에도 각 문항에 대한 성취기준 설정과 내용영역의 안배에 주안점을 두고 있으나, 인지적 능력과 관련된 행동영역을 설정할 때에는 타 교과와 동일하게 지식, 이해, 적용 또는 문제해결 등으로 설정하는 경우가 많고, 수학적 사고 특성을 반영한 명확한 정의를 바탕으로 요인들을 설정하여 문항을 분류하는 경우는 많지 않다.

인지영역은 수학 학습을 위한 중요한 요인이지만 그 중요성에 비해 우리나라 학생들의 성취 수준에 대한 분석 결과가 많지 않으며, 실제 교수·학습 현장에서 의식적으로 지도되고 있지 않은 실정이다. 이에 본 연구에서는 다양한 평가에서 다루어지고 있는 수학 인지영역을 살펴보고, 우리나라 학생들의 수학 인지적 성취 특성을 국제수준에서 파악하고자 하였다. 이를 위해 TIMSS의 가장 최근 결과인 TIMSS 2011 8학년(중2) 수학 성취도 자료를 이용하여 우리나라를 포함한 성취도 상위 15개국의 인지적 성취 특성을 분석할 수 있는 방안을 모색하였다. 또한, 다른 성취도 상위국과 비교·분석을 통해 우리나라 학생들의 인지적 성취 특성을 파악하고, 우리나라의 수학 인지영역에 대한 교육이 나아가야 할 방향을 탐색하였다.

II. 수학 인지적 속성

1. 수학 평가에서 다루어지는 인지영역

수학적 능력을 측정하는 많은 평가에서 수학적 지식을 측정하는 내용영역과 함께 수학적 사고 또는 과정을 측정하는 인지영역을 평가틀로 구성하고 있다. 그러나 각각의 평가마다 추구하는 목적과 방향에 따라 측정하는 수학적 내용이나 인지적 요소는 다르게 선정된다.

우리나라의 단위학교 수준에서는 내용과 행동을 이원화한 이원목적분류표를 이용하여 평가틀을 구성한다. 이때 행동영역의 하위요소로는 지식, 이해, 문제해결을 선정하여 사용하는 경우가 많은데, 한국교육개발원(강욱기 외, 1991)에서는 이 세 가지 행동영역을 다음과 같이 정의하고 있다.

- **지식**: 수학적 언어 사용, 적절한 해결 절차를 선정하고 적용하고 응용, 해결 절차의 적용과 응용이 옳음을 입증
- **이해**: 개념들의 예와 반례를 인식하고 분류하고 제시, 개념을 나타내는 데 모형 도식, 기호를 사용, 원리를 확인하고 응용, 개념의 다른 형태의 표현 사이의 관계, 개념과 원리를 비교, 대조, 통합, 개념을 표현하기 위한 기호를 인식하고 설명하고 응용, 개념을 포함하는 가정과 관계를 설명
- **문제해결**: 문제를 인지하고 형성, 전략, 자료, 모형을 사용, 해결 절차를 만들고 확장하고 수정, 추론, 풀이의 타당성과 옳음을 판단, 풀이의 일반화 (pp.105-106)

또한, 우리나라의 국가단위 평가인 국가수준 학업 성취도 평가와 대학수학능력시험에서는 행동영역의 하위요소로 계산, 이해, 추론, 문제해결을 선정하고 있다. 특히 국가수준 학업성취도 평가(이봉주, 조운동, 김미경, 2010)에서는 행동영역을 다음과 같이 정의하고 있다.

- **계산**: 여러 가지 계산 방법뿐 아니라 문제 해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉, 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력
- **이해**: 기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성을 이해하여 의미 충실한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력
- **추론**: 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납, 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력, 증명을 읽고 이해할 수 있으며 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력
- **문제해결**: 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력, 수학과 일상생활 및 타 교과와 관련성이 있는 통합 교과적인 소재의 응용문제를 해결할 수 있는 능력 (p.19)

국제수준의 수학 학업성취도 평가인 PISA와 TIMSS에서도 인지영역에 대한 평가들을 설정하고 있다. PISA 2012의 평가들에서는 ‘수학적 과정(Mathematical processes)’을 인지영역에 해당하는 것으로 볼 수 있다. PISA 2012의 수학적 과정은 문제가 발생한 상황을 수학과 연결하고 문제를 해결하기 위해 요구되는 능력을 의미한다(조지민 외, 2012). 이 영역은 상황을 수학적으로 형식화하기(Formulating situations mathematically), 수학적 개념, 사실, 절차를 이용하기와 추론하기(Employing mathematical concepts, facts, procedures and reasoning), 수학적 산출물을 해석하고, 적용하고, 평가하기(Interpreting, applying and evaluating mathematical outcomes)의 세 가지 하위 영역으로 구분된다(OECD, 2013, p.29).

또한, PISA 2012에서는 수학적 과정의 세 가지 하위영역에 따른 기본 수학 능력으로 의사소통(Communicating), 수학화(Mathematising), 표현(Representation), 추론과 논증(Reasoning and argument), 문제해결을 위한 전략 고안(Devising strategies for solving problems), 상징적·형식적·

기법적 언어와 조작의 사용(Using symbolic, formal and technical language and operations), 수학적 도구의 사용(Using mathematical tools)의 7가지 요소를 제시하고 있다(OECD, 2013, pp.29-32; 조지민 외, 2012, p.27). PISA에서 제시하는 인지적 요소들은 PISA가 추구하는 일상에서의 지식 활용에 대한 소양 점검이라는 평가 목적에 맞게 국내 평가에서 선정한 인지적 요소에 비해 더 실행적인 측면이 나타나 있음을 알 수 있다.

TIMSS 2011 평가들의 수학 인지영역(Cognitive domain)은 <표 II-1>과 같이 알기(Knowing), 적용하기(Applying), 추론하기(Reasoning)의 세 가지 영역과 하위요소로 이루어져 있다. 알기 영역은 사실, 개념, 절차를 아는 능력에 관한 것으로 6가지 하위요소로 구성되어 있으며, 적용하기 영역은 지식과 개념적 이해를 문제해결 또는 질문에 답을 하는데 적용하는 능력에 관한 것으로 5가지 하위요소로 구성되어 있다. 또한, 추론하기는 정형적인 문제해결을 넘어서 비정형적인 상황, 복합적 맥락, 여러 단계가 포함된 문제를 해결하는 능력에 관한 것으로 5가지 하위요소로 구성되어 있다(Mullis et al., 2009).

<표 II-1> TIMSS 2011 인지영역별 하위요소

인지영역	하위 인지 요소(요소 수)
알기	회상하기, 인식하기, 계산하기, 인출하기, 분류/정렬하기, 측정하기(6)
적용하기	표현하기, 모델링하기, 선택하기, 실행하기, 정형적 문제 해결하기(5)
추론하기	비정형적 문제 해결하기, 분석하기, 정당화하기, 일반화하기/특수화하기, 통합/종합하기(5)

이처럼 수학 평가에서 사용하는 인지영역의 요소들은 각 평가마다 다양하게 설정된다. TIMSS는 각 국에서 실행된 교육과정에 대한 질 관리를 목적으로 하기 때문에 평가들에 포함된

인지요소들이 국내 평가의 인지요소들과 좀 더 유사하다고 할 수 있다. 그러나 TIMSS 2011 수학 평가의 인지영역은 3가지 영역에 따른 16가지 하위 인지요소로 구성되어 국내 평가에 비해 매우 구체적이고 세분화되어 있다고 볼 수 있다.

또한, 다양한 수학적 사고들은 그 수준에 차이가 있기 때문에 수학 평가에서 다루고 있는 인지요소들은 요소들 사이에 수준 차이가 나타난다. 특히, TIMSS에서는 이러한 인지요소의 특징을 반영하고 있다. 예를 들어 TIMSS 2011에서 평가 대상학년인 4학년(초4)과 8학년(중2)의 수학 인지영역은 동일하게 설정되지만 각 영역이 차지하는 비중은 다르게 설정하고 있다. 8학년 수학 평가는 알기 35%, 적용하기 40%, 추론하기 25%인 반면, 4학년 수학 평가는 알기 40%, 적용하기 40%, 추론하기 20%이다(Mullis et al., 2009). 즉, 학년별 사고 수준을 고려하여 저학년은 고등 수학적 사고 영역의 비중을 비교적 낮게 설정하고 있다는 것을 알 수 있다.

2. 수학 인지적 성취 특성 분석에 관한 선행 연구

다양한 평가에서 수학 인지영역에 따른 학생들의 성취 특성을 파악하고 있다(Mullis et al., 2012; OECD, 2013; 김선희 외, 2008; 김수진 외, 2012; 김희경, 김부미, 2013; 송미영 외, 2013). 특히 국제 평가에서는 수학 인지영역을 내용영역과 대등한 요인으로 설계하고, 이에 따라 국제 비교 결과들을 산출한다. PISA 2012의 수학 평가 결과에 따르면 우리나라는 수학적 과정의 세 가지 영역 중 수학적 산출물을 해석하고, 적용하고, 평가하기 영역의 점수가 가장 낮은 것으로 나타났다(OECD, 2013; 송미영 외, 2013).

본 연구의 대상이 되는 TIMSS 2011의 8학년 수학 성취도 상위 15개국 인지영역 분석 결과는

<표 II-2>와 같다. TIMSS 2011 인지영역 중 ‘알기’는 싱가포르가 617점으로 가장 높았고, 우리나라는 616점으로 싱가포르와 큰 차이가 없었다. 또한, ‘적용하기’ 영역은 우리나라가 617점으로 가장 높았고, ‘추론하기’ 영역도 우리나라가 612점으로 전체 참여국 중 가장 높은 성취를 보였다(김수진 외, 2012).

<표 II-2> TIMSS 2011 8학년 인지영역별 성취도

구분	알기	적용하기	추론하기
대한민국	616	617	612
싱가포르	617	613	604
대만	611	614	609
홍콩	591	587	580
일본	558	574	579
러시아연방	548	538	531
이스라엘	516	513	520
핀란드	508	520	512
미국	519	503	503
영국	501	508	510
헝가리	507	505	502
호주	504	506	506
슬로베니아	508	502	500
리투아니아	502	508	493
이탈리아	494	503	496

*출처: Mullis 외(2012), 김수진 외(2012)

이처럼 국제 평가에 의한 성취도 결과는 우리나라 학생들의 수학 인지영역에 대한 능력이 매우 높다는 것을 보여주고 있지만, 많은 학생들이 여전히 수학 학습을 어려워하고 있다. 학생 평가의 궁극적인 목적은 학생들의 수학적 성취에 대한 측정 및 분석을 통해 향후 성장을 위한 정보를 제공하는 것이라 할 수 있다. 그러므로 우리나라 수학 교육 개선을 위해서는 수학 평가를 통해 산출된 대규모 자료들을 바탕으로 다양한 분석이 시도될 필요가 있으며, 다른 국가 학생에 비해 우리나라 학생들이 수학 학습과정에서 겪는 어려움이 무엇인지 파악할 수 있는 좀 더 심층적인 분석이 필요하다.

최근 대규모 성취도 자료에 인지진단모형을 적용하여 학생의 수학 인지적 성취 특성을 분석하는 연구가 시도되고 있다. 김선희 외(2008)는 TIMSS 2007의 인지영역 하위요소 중 계산하기, 모델링하기, 분석하기, 인식하기, 재발견하기를 인지적 요소로 추출하고, 국가수준 학업성취도 평가 문항을 이용하여 검사를 실시한 후, 수집된 자료를 바탕으로 인지진단모형을 적용하였다. 이를 통해 각 학생별 숙달 요소를 분석하여 학생 개개인의 인지적 성취 프로파일을 산출하였다. 김희경과 김부미(2013)는 2011년 국가수준 학업성취도 평가의 수학 인지영역을 계산하기, 이해하기, 추론하기, 표현하기, 해석하기의 다섯 가지로 나누고 세부 인지요소를 13가지로 분류하였으며, 인지진단모형을 적용하여 각 요소에 대한 학교급별 숙달도를 분석하였다. 또한, 이현숙과 고호경(2014)는 기하영역의 인지 요소에 따른 학생들의 숙달도를 분석하여 성별에 따른 차이를 파악하기 위해 인지진단모형을 활용하여 TIMSS 8학년 자료를 분석하였다.

이러한 선행 연구들은 인지진단모형을 적용하여 학생 수준에서 분석을 실시한 것으로, 학생 개개인의 성취 특성을 심층적으로 파악할 수 있다는 장점이 있다. 또한, 학생들의 수학 학습에 대한 진단과 처방을 위한 정보로서 활용이 가능하다(김선희 외, 2008). 학생 성취의 강약점에 대한 정확한 진단과 처방을 위해서는 이와 더불어 학생들이 속한 집단별 성취 특성을 파악하여 다른 집단과의 차이를 비교·분석한 결과가 유용하게 활용될 수 있다. 이에 본 연구에서는 인지진단모형을 활용하여 국가 수준에서 인지적 성취 특성을 분석하였다.

III. TIMSS 2011 수학 인지영역에 따른 인지적 속성의 분류

1. 인지진단이론을 적용한 인지적 속성의 분류

학생들의 수학 학습을 돕기 위한 교수·학습 방안을 마련하기 위해서는 학생들의 성취 특성에 대한 이해가 선행되어야 한다. 특정 속성에 대한 진단 정보는 학생들에게 더 학습이 필요한 영역을 파악하고 이에 비중을 두어 학습하는 계기를 마련해준다(김선희 외, 2008). 이때 개인의 점수 또는 정답률로 성취 특성을 파악할 수 있는 내용영역과 달리 과정적 요인을 포함하고 있는 인지영역은 다른 집단과의 상대적 비교 자료가 유용할 수 있다.

학생들의 인지적 성취 특성에 대한 정보는 인지진단이론을 통해 얻을 수 있다. 인지진단이론은 학생의 학습 정보를 보완하는 것과 관련한 이론으로(Chipman et al., 1995, p.2), 검사에 의해 측정되는 인지적 속성(attribute)들에 대한 학습자의 숙달도에 관한 정보를 제공한다(Tatsuoka, 1983; 1995). 인지진단이론을 적용하기 위해서는 타당한 인지적 속성을 추출하고 그에 따른 Q행렬을 개발하여야 한다. Q행렬은 <표 III-1>과 같이 검사 문항과 인지적 속성 간의 관계를 나타낸 $k \times i$ 행렬(k = 인지적 속성의 수, i = 문항의 수)이다(Tatsuoka, 1983; 1990; 1995).

<표 III-1> TIMSS 2011 수학 문항 Q행렬 예시

문항 ID	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
M032094	1	1	0	0	0	0	0	0	0
M032662	0	1	0	0	1	0	1	0	0
M032064	0	1	0	0	0	0	1	0	0
M032419	0	0	0	0	1	0	0	0	0
M032477	0	0	0	0	1	0	0	0	0

이러한 Q행렬을 이용하여 개인이나 집단에 대한 인지적 속성의 숙달도를 분석할 수 있다. 이

때 Q행렬 개발을 위해 추출되는 인지적 속성은 대부분 같은 수준이어야 하고, 서로 독립적이며, 문항에서 측정하고자 하는 것을 모두 포함하여야 한다(De la Torre, 2008; DiBello et al., 1995; Tatsuoka, 1995). Q행렬 개발에 활용되는 인지적 요소의 수가 너무 적은 경우 각 요소가 상호 독립적이지만, 학생들의 성취 특성을 파악하기에 너무 포괄적일 수 있다. 반대로, 요소의 수가 너무 많은 경우 학생들의 성취 특성을 면밀히 분석할 수 있지만, 요소들 간에 요구하는 능력이 중복되는 경우가 나타날 수 있다. 또한, 학교 교육에서 각각의 요소에 따른 교수학적 처방을 내리기 어렵기 때문에 실효성이 떨어질 수 있다.

TIMSS와 같은 국제수준의 평가는 국내 평가에 비해 인지적 요소가 세분화되어 있어 Q행렬 개발에 용이할 수 있다. 그러나 TIMSS의 경우 정형적/비정형적 문제해결하기는 선택하기, 실행하기 등과 요구하는 능력이 일부 겹친다고 볼 수 있다. TIMSS 자료를 이용하여 학생 성취 특성을 분석한 기존의 연구들은 TIMSS의 인지영역을 그대로 사용하는 경우가 많았다. 그러나 TIMSS 2011의 세 가지 인지영역은 학생 특성을 해석하기에 너무 포괄적이기 때문에 성취 특성을 면밀히 파악하기 어렵다. 반면, 16가지 하위 인지 요소는 Q행렬을 개발하기에 너무 세분화되어 있으며, 수준에 따라 위계적인 경우가 있다. 또한, 정의가 서로 독립적이지 않기 때문에 Q행렬을 구성하는 인지적 속성들이 서로 독립적이어야 한다는 가정에 부합하지 않았다. 이에 본 연구에서는 TIMSS 2011의 인지영역 하위요소들을 재구조화하여 수학 인지적 속성을 추출하였다.

2. TIMSS 2011 인지영역 재분류에 따른 인지적 속성 추출

김희경과 김부미(2013)의 연구에 따르면 Q행렬의 개발은 인지적 속성 추출, Q행렬 초안 개발, Q행렬 확정 순서로 진행된다. Q행렬 개발 절차에 따라 먼저 TIMSS 2011의 인지영역의 하위요소들을 재구조화하여 인지적 속성을 추출하였다. 수학교육 전문가 1인과 경력 5년 이상의 중학교 수학 교사 2인이 TIMSS 2011 평가들에 포함된 인지 요소들을 검토하여 TIMSS 2011의 16가지 인지 요소들을 <표 III-2>와 같이 9가지 인지적 속성으로 재구조화하였다.

<표 III-2> 본 연구에서 추출한 인지적 속성

추출된 인지적 속성	TIMSS 2011 인지요소	
A1 회상/인식하기	회상하기 인식하기	알기
A2 계산하기	계산하기	
A3 해석하기	인출하기	
A4 분류/측정하기	분류/정렬하기 측정하기	적용하기
A5 표현하기	표현하기 모델링하기	
A6 실행하기	선택하기 실행하기 정형적 문제 해결하기 비정형적 문제 해결하기	추론하기
A7 분석하기	분석하기	
A8 정당화하기	정당화하기	
A9 일반화하기	일반화하기/특수화하기 통합/종합하기	

인지적 속성의 선정 기준은 첫째, TIMSS 2011의 3가지 인지영역을 좀 더 세분화하고, 16가지 하위 인지 요소를 통합하는 방향으로 진행하였다. 이는 타당한 Q행렬의 개발 및 연구 결과의 해석을 위해 인지적 속성의 수를 적정화하기 위함이다. 둘째, TIMSS 2011 문항들은 TIMSS의 인지영역 분류를 기반으로 하기 때문에 인지적 속성을 새로 정의하기 보다는 기존의 인지 요소에 대한 정의들 중 유사한 것을 통합하여 새로운 속성에 대한 정의를 내렸다.

TIMSS 2011 8학년 수학 문항에서 측정하는

것으로 분류한 9가지 속성은 다음과 같다. 첫째, ‘회상/인식하기(A1)’는 TIMSS 2011의 회상하기와 인식하기를 통합한 속성으로 TIMSS 2011 회상하기의 정의에 해당하는 정의, 용어, 수의 성질, 기하학적 성질, 표기법을 회상하는 것과 인식하기의 정의에 해당하는 수학적 대상, 모양, 수와 식, 수학적으로 동치인 수학적 대상 등을 인식하는 것을 포함한다.

둘째, ‘계산하기(A2)’는 TIMSS 2011의 계산하기를 하나의 속성으로 선정한 것이다. 이 속성은 TIMSS 2011 계산하기의 정의와 동일하게 범자연수, 분수, 소수, 정수를 가지고 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 및 혼합 계산과 관련된 알고리즘 절차를 수행하거나 근삿값을 취하여 계산 결과를 어렵하고, 정형적인 대수적 절차를 수행하는 것으로 정의하였다.

셋째, ‘해석하기(A3)’는 TIMSS 2011의 인출하기에 해당하는 속성이다. 인출하기는 그래프, 표, 또는 다른 자료 표현으로부터 정보를 읽는 것과 간단한 눈금을 읽는 것으로 정의되어 있다. 이와 관련한 TIMSS 문항을 검토하여 더 보편적으로 사용하는 해석하기로 속성의 명칭을 변경하였다.

넷째, ‘분류/측정하기(A4)’는 TIMSS 2011의 분류/정렬하기와 측정하기 요소를 통합한 것이다. 분류하기를 정렬하기보다 더 포괄적인 속성으로 보고 분류/측정하기로 명칭을 결정하였다. 이는 물체, 모양, 수, 식 등을 공통적인 성질에 따라서 분류하거나 모으고, 모임(class)의 구성에 대해 올바른 결정을 하며, 수와 물체를 속성에 따라 정렬하는 것을 말한다. 또한, 측정 도구를 사용하고, 측정 단위를 적절하게 선택하는 능력도 포함된다.

다섯째, ‘표현하기(A5)’는 TIMSS 2011의 인지 요소 중 표현하기와 모델링하기를 통합한 속성이다. 표현하기에 해당하는 다이어그램, 표, 차트, 그래프로 수학적 정보와 자료를 나타내는 것

과 모델링하기에 해당하는 주어진 수학적 대상이나 관계의 동치 표현을 만들거나, 정형적인 문제를 풀기 위해 방정식이나 도형, 다이어그램과 같은 적합한 모델을 만드는 것을 말한다.

여섯째, ‘실행하기(A6)’는 TIMSS 2011의 선택하기, 실행하기, 정형적 문제해결하기, 비정형적 문제해결하기를 통합한 것이다. 이 속성들은 문제해결과 관련하여 전략을 선택하고 실행하는 것을 통해 문제를 해결하는 일련의 인지적 과정으로 해석하여 실행하기 속성으로 선정하였다. 실행하기는 알려진 절차, 알고리즘, 해결 방법이 있는 문제를 풀기 위해 효율적인 또는 적합한 연산, 방법, 전략을 선택하는 것, 일련의 수학적 지시 사항을 실행하는 것, 수학적 또는 실생활 맥락의 문제를 해결하며, 수학적 사실, 개념, 절차를 적용하는 것을 의미한다.

일곱째, ‘분석하기(A7)’는 TIMSS 2011의 분석하기와 동일한 속성이다. TIMSS 2011에서는 분석하기를 수학적 상황에서 변수나 대상들 사이의 관계를 결정하고 나타내고 사용하는 것을 의미하며, 또한, 주어진 정보로부터 타당한 추리를 하는 것으로 정의하고 있다.

여덟째, ‘정당화하기(A8)’도 TIMSS 2011의 정당화하기와 동일하게 선정하였다. TIMSS 2011에서 정당화하기는 수학적 결과나 성질을 참조함으로써 명제의 참 또는 거짓을 정당화하는 것으로 정의하고 있다.

마지막으로 ‘일반화하기(A9)’는 TIMSS 2011의 일반화하기/특수화하기와 통합/종합하기를 통합한 속성이다. TIMSS 2011에서 일반화하기/특수화하기는 수학적인 사고와 문제해결 결과를 더 일반적이고 폭넓게 적용 가능한 용어로 재서술하여 결과가 적용될 수 있는 영역을 확장하고, 지식 요소들과 표현을 연결하고, 관련된 수학적 아이디어를 연결하는 것이다. 또한, 통합/종합하기는 수학적 사실, 개념, 절차를 조합하여 결과

를 수립하고, 여러 결과를 조합해서 이후의 결과를 산출하는 것이다. 이 정의들의 의미를 검토하여 일반화하기를 가장 포괄적이며 일반적인 명칭으로 선정하였다.

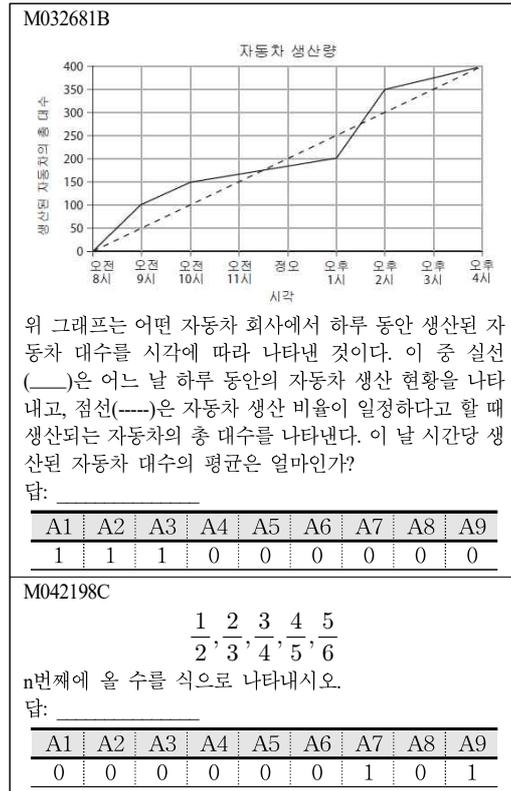
본 연구에서 분류한 9가지 속성과 TIMSS 2011 인지영역의 관련성을 살펴보면 다음과 같다. 회상/인식하기, 계산하기, 해석하기, 분류/측정하기는 알기 영역에 해당하며, 표현하기와 실행하기는 적용하기 영역에 해당한다. 단, 실행하기는 대부분 적용하기 하위요소로 구성되어 적용하기에 가까운 속성으로 볼 수 있지만 추론하기 영역 하위요소인 정형적 문제해결하기 요소도 포함되어 있다. 그리고 분석하기, 정당화하기, 일반화하기는 추론하기 영역에 해당하는 속성이다.

3. Q행렬 개발 및 타당화

인지적 속성을 분류한 결과에 따라 TIMSS 2011 8학년 수학 검사 문항 217개에 대한 코딩을 진행하여 Q행렬 초안을 작성하였다. Q행렬 초안 작성을 위해서 인지적 속성을 추출한 수학 교육전문가 1인과 수학교사 2인이 TIMSS 2011 8학년 문항별로 포함하고 있는 속성을 분석하였다. 이를 바탕으로 각각의 문항에 대해 9가지 인지적 속성 중 문제를 해결하는 데 필요한 속성에는 '1', 필요하지 않는 속성에는 '0'을 부여하여 코딩하였다.

예를 들어, TIMSS 2011 공개문항(김수진, 박지현, 2013) 중 M032681B는 그래프로 표현된 자료를 해석하여 평균을 계산하는 것으로, TIMSS 2011에서 적용하기 영역으로 분류되었던 문항이다. 본 연구에서는 이 문항을 해결하기 위해서는 9가지 인지적 속성 중 회상/인식하기, 계산하기, 해석하기 속성이 필요한 것으로 분류하였다. 또한, M042198C는 문항에 주어진 분수의 패턴을 분석하여 변수를 사용하여 일반화하는 것으로, 분석하기와 일반화하기의 두 가지 속성이 포함

된 것으로 분류하였다. 이를 바탕으로 작성한 Q행렬은 [그림 III-1]에 제시한 것과 같다.



* 문항 출처: 김수진, 박지현(2013)

[그림 III-1] 문항별 Q행렬 개발 예시

이와 같은 방법으로 217개 문항에 대해 속성을 부여하여 Q행렬을 작성하였다. Q행렬과 인지적 속성을 확정하기 위해서는 Q행렬 초안에 대한 타당성을 점검해야 한다. 이를 위하여 자카드 유사성 계수(Jaccard similarity coefficient)를 산출하고, Fusion 모형에 의한 문항 모수를 추정하였다. 먼저, Q행렬에 서로 중복되거나 유사한 인지적 속성이 있는지를 살펴보기 위해서 자카드 계수를 산출하였다. 자카드 계수는 ‘자카드 계수 > .50’ 일 때 속성 간 유사성이 있다고 판단한다(Henning, 2004; 김희경, 김부미, 2013, p.69, 재인용). 본 연구에서 개발한 Q행렬에 대한 자카드

계수를 산출한 결과 모든 속성에 대한 계수가 .50 미만으로 나타나 9가지 인지적 속성 간 유사성이 낮은 것으로 확인되었다. 이와 더불어, Fusion 모형을 이용해 타당화를 실시하였다. Fusion 모형은 피험자와 문항이 측정하고자 하는 속성 간의 연관성을 모형화하여 피험자 모수와 문항 모수에 대한 진단적인 정보를 제공해 주고 Q행렬에 포함되지 않은 속성들까지도 모형에서 고려한다(Hartz, 2002). Arpeggio Version 3.1(Hartz et al., 2002)을 사용하여 Fusion 모형에 따라 네 차례에 걸쳐 문항 모수치를 추정하고 검토하였다.

Q행렬 타당화 결과 두 가지 또는 세 가지 속성이 선택되었던 일부 문항에서 속성이 제거되었다. <표 III-3>과 같이 각 문항에 대해 선택된 속성의 수는 Q행렬 초안에서 302개였으나 최종안에서 282개로 줄어들었으며, 최종적으로 문항 1개당 약 1.3개의 속성으로 이루어져 있는 것으로 분석되었다. 대부분의 인지적 속성이 해당하는 문항 수가 줄어들었지만, 회상/인식하기는 Q행렬 초안에서 58개였으나 최종안에서 60개로 늘어났고, 일반화하기는 초안에서 7개였으나 최종안에서 9개로 증가하였다.

<표 III-3> Q행렬에 따른 속성별 문항 수

속성	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	계
초안	58	57	39	14	30	32	56	9	7	302
최종	60	54	34	11	26	30	51	7	9	282

이와 같이 TIMSS 2011의 인지 요소들을 기반으로 타당화 과정을 거쳐 9가지 수학 인지적 속성을 추출하고, Q행렬을 개발하였다. 이 속성들은 TIMSS 2011의 세 가지 인지영역(알기, 적용하기, 추론하기)에 비해 세분화되어 있으며, 속성 간에 구분이 가능한 것으로 분석되었다. 그러므로 이를 바탕으로 학생들의 성취도를 분석하여 학생들의 성취 특성을 좀 더 면밀히 파악할 수 있다.

IV. 인지적 속성에 따른 국가별 학생 성취 특성 분석

1. 분석 방법

본 연구는 국제적으로 실시하는 평가인 TIMSS 2011의 인지적 속성을 재설정된 후 학생들의 인지적 성취 특성을 국가 단위로 비교·분석하는 것이다. 인지적 속성에 대한 분석은 학생들의 수학 성취도 자료를 이용하기 때문에, 본 연구에서는 TIMSS 2011에 참여한 42개국 중 8학년 수학 성취도 상위 15개국을 연구 대상으로 선정하였다. TIMSS 2011 수학 성취도 상위 15개국과 각국의 TIMSS 2011 성취도 점수, 각국의 8학년 성취도 자료에 포함되어 있는 분석 대상 학생 수는 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> TIMSS 2011 8학년 수학 상위 15개국의 평균 점수와 분석 대상 학생 수

구분	평균점수*	분석 대상(명)
대한민국	613	5,166
싱가포르	611	5,927
대만	609	5,042
홍콩	586	4,015
일본	570	4,414
러시아연방	539	4,893
이스라엘	516	4,699
핀란드	514	4,266
미국	509	10,477
영국	507	3,842
헝가리	505	5,178
호주	505	7,556
슬로베니아	505	4,415
리투아니아	502	4,747
이탈리아	498	3,979

* 출처: Mullis 외(2012)

TIMSS 2011 성취도 결과를 살펴보면 우리나라 8학년(중2)의 수학 성취도 평균점수는 613점으로 참여국 중 가장 높았다. 싱가포르가 611점

으로 2위였으며, 대만이 609점으로 3위로 나타났다. 평균점수 600점대 이상인 이 3개국과 더불어 홍콩, 일본의 5개 동아시아 국가들의 평균점수를 살펴보면 6위인 러시아연방과의 점수 차이가 매우 크게 나타나 동아시아 국가들이 수학 성취도 최상위국임을 알 수 있다.

TIMSS 2011에 참여한 수학 성취도 상위국의 학생 응답 결과를 중심으로 수학 인지적 속성별 성취 특성을 분석하였다. 인지적 속성에 따른 국가별 성취 특성은 인지적 속성에 대한 타당화를 거쳐 개발된 Q-행렬을 토대로 다층 IRT (Multi-level IRT)를 사용하여 분석하였다. 박찬호 (2012)는 교육 검사 자료에 위계적인 구조가 존재하고 집단 내 개인이 동질적이어서 집단 간 이질성이 존재한다면 다층 IRT를 사용할 것을 제안한다. 이에 본 연구에서는 각 국가의 능력을 통제된 상태에서 상대적으로 어려움을 느끼는 요소를 찾아내고자 다층 IRT 모형을 적용하여 DIF(Differential item function) 개념으로 분석을 실시하였다. 다층 IRT를 적용하는 데 있어서 각 수준은 다음과 같다.

[1 수준]

$$p(X_{ijk} = 1 | \theta_{jk}; b_{ik}) = \frac{\exp(\theta_{jk} - b_{ik})}{1 + \exp(\theta_{jk} - b_{ik})}$$

[2수준]

$$\theta_{jk} = \mu_k + E_{jk},$$

[3수준]

$$\mu_k = \gamma_0 + U_k$$

$$b_{ik} = \delta_{i1} + \sum_l w_{kl} q_{il}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

1수준에서 $X_{ijk} = 1$ 은 k 국가에 속한 학생 j 가 문항 i 에 옳게 응답하는 것을 의미한다. 부분 점수가 있는 2점 문항은 $0 = 0, 1 = 0, 2 = 1$ 로 다시 코딩하여 완벽하게 옳은 경우만 정답으로

처리하였다. θ_{jk} 는 k 국가에 속한 학생 j 의 능력 수준을 의미하며, b_{ik} 는 k 국가에 속한 학생들이 시험을 본 문항 i 의 난이도 모수에 해당한다(Park, 2008, p.15). 2수준에서 μ_k 는 k 국가의 평균 능력 수준이며, E_{jk} 는 평균 0, 분산 1의 정규분포를 가정한다. 마지막으로 3수준에서 K 는 총 국가 수로 본 연구에서는 15개국이며, δ_{il} 는 국가 1(기준 집단)에 대한 문항 i 의 난이도를 의미한다. q_{il} 는 문항 i 와 관련된 인지적 속성 1 ($l = 1, \dots, L$)을 나타내는 지표(indicator) 변수로 앞서 개발한 Q행렬의 정보를 기반으로 한다. w_{kl} 는 k 국가에 대한 문항들의 난이도 특성의 효과를 나타내는 연속 변수로 $w_{11}, \dots, w_{1L} = 0$ 이다(Park, 2008, p.16). 각 국가 간 문항 난이도들은 국가들 간 θ 에 대한 비교 가능한 해석을 위해 기준 국가의 난이도에 상대적으로 정의된다. 모형은 전체 국가들의 평균(γ_0)과 기준 국가의 문항 난이도(δ_{i1})를 고정 효과로 포함하고 있다. w_{kl} 는 각 속성에 관련된 무선 효과라고 할 수 있다. 표준화되었을 때, 이러한 무선 효과는 평균 0, 추정된 분산 τ_1^2 인 정규분포를 따른다. U_k 는 평균 0, 분산 τ_0^2 인 정규 분포를 따른다고 가정한다(Park, 2008, pp.16-17).

다층 IRT를 적용하여 분석을 실시하면 각각의 인지적 속성에 대해 각 국가의 능력을 상대적으로 비교할 수 있게 된다. 본 연구에서는 다층 IRT 모형을 적용하여 다른 성취도 상위 국가에 비해 우리나라가 상대적으로 쉽거나 어렵게 여기는 인지적 속성을 분석함으로써 우리나라 학생들의 수학 인지적 성취 특성을 살펴보았다. 분석 결과에 따른 수치는 -1에서 1사이의 범위에서 나타난다. 인지적 속성이 문항 난이도에 기여하는 정도로 값이 양으로 클수록 다른 국가에 비해 상대적으로 어려워하는 것이고, 음으로 클

수록 상대적으로 쉽게 느끼는 것이다. 이와 함께 성취수준에 따른 차이를 살펴보기 위해 TIMSS 2011 IDB Analyzer를 이용해 가중치를 부여하여 우리나라 학생이 어려워하는 각 속성에 해당하는 문항들의 성취수준별 정답률 평균을 산출하였다.

2. 수학 인지적 속성에 따른 성취 특성 분석 결과

가. TIMSS 2011 중학교 성취도 상위 15개국 인지적 성취 특성

TIMSS 2011 수학 성취도 상위 15개국 학생들의 인지적 속성에 따른 성취 특성을 비교한 결과는 다음과 같다. 알기 영역과 관련이 있는 회상/인식하기, 계산하기, 해석하기, 분류/측정하기에 대한 분석 결과는 <표 IV-2>에 제시하였다.

<표 IV-2> '알기' 관련 속성 분석 결과

구분	회상/인식	계산	해석	분류/측정
대한민국	-0.45	-0.50	0.22	-0.31
싱가포르	-0.15	-0.31	-0.02	0.29
대만	0.42	0.20	0.51	0.38
홍콩	-0.02	-0.35	0.05	0.13
일본	-0.21	-0.03	0.00	0.02
러시아연방	0.25	-0.22	-0.03	-0.13
이스라엘	-0.27	-0.13	-0.20	-0.15
핀란드	0.24	0.40	-0.36	-0.05
미국	0.15	0.17	0.02	0.00
영국	0.01	0.24	-0.20	0.01
헝가리	0.19	-0.03	0.24	0.15
호주	-0.05	0.21	-0.39	0.04
슬로베니아	-0.03	0.40	-0.12	-0.18
리투아니아	0.00	-0.20	0.05	0.02
이탈리아	-0.07	0.17	0.24	-0.22

인지적 속성별로 살펴보면 회상/인식하기는 15개국 중 우리나라 학생들이 가장 쉽게 생각하고, 대만 학생들이 가장 어려워하고 있음을 알 수

있다. 계산하기도 우리나라 학생들이 가장 쉽게 생각하고 있으며, 핀란드, 슬로베니아 학생들이 상대적으로 어렵게 생각하고 있었다. 다음으로 해석하기는 호주와 핀란드 학생들이 상대적으로 쉽게 생각하고 있었으며, 대만 학생들이 가장 어려워하고 있었고, 우리나라 학생들도 어려워하는 편인 것으로 나타났다. 분류/측정하기는 우리나라 학생들이 가장 쉽게 생각하고 있었고, 대만 학생들이 가장 어렵게 생각하고 있었다.

적용하기 영역과 관련이 있는 표현하기와 실행하기에 대한 분석 결과는 <표 IV-3>과 같다. 먼저 표현하기는 우리나라 학생들이 가장 쉽게 생각하였고, 대만과 싱가포르의 학생들은 어렵게 생각하는 것으로 나타났다. 반면, 실행하기는 15개국 중 우리나라 학생들이 가장 어렵게 생각하는 것으로 나타났으며, 홍콩과 이스라엘의 학생들이 상대적으로 쉽게 생각하고 있었다.

<표 IV-3> '적용하기' 관련 속성 분석 결과

구분	표현	실행
대한민국	-0.57	0.44
싱가포르	0.34	-0.04
대만	0.38	0.21
홍콩	0.26	-0.36
일본	0.08	-0.20
러시아연방	-0.06	0.19
이스라엘	-0.12	-0.31
핀란드	-0.01	-0.22
미국	-0.08	0.08
영국	0.01	0.06
헝가리	0.05	0.10
호주	-0.03	-0.09
슬로베니아	-0.06	0.08
리투아니아	0.03	-0.04
이탈리아	-0.21	0.12

마지막으로 추론하기 영역과 관련이 있는 분석하기, 정당화하기, 일반화하기에 대한 분석 결과는 <표 IV-4>와 같다. 먼저 분석하기는 호주와

우리나라 학생들이 쉽게 생각하는 반면, 헝가리와 슬로베니아의 학생들은 어렵게 생각하고 있었다. 정당화하기는 일본 학생들이 가장 쉽게 생각하고 있었고, 리투아니아 학생들이 가장 어렵게 생각하고 있었다. 일반화하기는 홍콩, 싱가포르, 이스라엘의 학생들이 쉽게 생각한 반면, 슬로베니아 학생들이 어렵게 생각하고 있었고, 우리나라 학생들도 상대적으로 어려워하는 것으로 나타났다.

<표 IV-4> ‘추론하기’ 관련 속성 분석 결과

구분	분석	정당화	일반화
대한민국	-0.20	-0.23	0.08
싱가포르	-0.07	0.07	-0.44
대만	0.17	0.04	-0.10
홍콩	-0.14	-0.08	-0.49
일본	-0.06	-0.44	0.10
러시아연방	-0.01	-0.08	-0.07
이스라엘	-0.09	0.18	-0.41
핀란드	-0.08	0.14	0.25
미국	0.05	0.09	0.13
영국	-0.02	-0.17	0.14
헝가리	0.30	0.17	-0.22
호주	-0.23	0.13	-0.06
슬로베니아	0.28	-0.22	0.66
리투아니아	0.18	0.64	0.04
이탈리아	-0.07	-0.23	0.39

인지적 속성에 따른 분석 결과를 전체적으로 보았을 때 각 속성에 대한 국가별 상대적인 어려움은 수학 성취도 순위와는 다르게 나타나는 것을 알 수 있다. 15개국 중 성취도가 가장 낮은 이탈리아는 학생들이 상대적으로 가장 어려워하는 것으로 나타난 인지적 속성이 없었고, 성취도 3위인 대만은 음의 값으로 나타난 인지적 속성이 일반화하기 1개밖에 나타나지 않아 학생들이 많은 속성에 대해 상대적으로 어려워하고 있음을 알 수 있다. 이는 각각의 인지적 속성별로 요구하는 능력이 수학 내용영역과는 다르다는 것을 의미하며, 수학 교육에서 내용영역과 구분되는 인지영역의 과정적 측면에 대한 평가 방법

설정 및 교수학적 처방을 마련할 필요가 있다는 것을 나타낸다.

특히, 우리나라 학생들은 다른 성취도 상위국 학생들보다 회상/인식하기, 계산하기, 분류/측정하기, 표현하기를 쉽게 생각한 것으로 나타났다. 뿐만 아니라 분석하기와 정당화하기도 우리나라 학생들이 쉽게 생각하는 편이라는 것을 알 수 있다. 반면, 우리나라 학생들이 어려워하는 인지적 속성은 해석하기, 실행하기, 일반화하기인 것으로 나타나 우리나라 수학 교육에서 이 속성들에 대한 지도 실태를 점검할 필요가 있는 것으로 나타났다.

나. 우리나라 학생들이 상대적으로 어려워하는 인지적 속성

수학 인지적 속성에 따른 국가별 비교 결과에 따르면 우리나라 학생들은 해석하기, 실행하기, 일반화하기를 어려워하는 것으로 나타났다. 본 절에서는 이 속성들에 대한 분석 결과를 좀 더 심층적으로 살펴보았다.

1) 해석하기

해석하기에 대한 분석 결과를 국가별 상대적 난이도 순으로 살펴보면 [그림 IV-1]과 같다.



[그림 IV-1] ‘해석하기’에 대한 국가별 상대적 능력 수준

해석하기는 호주(-0.39)와 핀란드(-0.36)의 학생들이 쉽게 생각하고 있으며, 영국(-0.20)과 이스라엘(-0.20)의 학생들도 쉽게 생각하는 편인 것을 알 수 있다. 이 속성에서는 대만의 학생들의 능력수준이 0.51로 가장 어려워하는 것으로 나타났다. 우리나라 학생들의 능력 수준은 0.22로 나타나 대만, 헝가리, 이탈리아 학생들 보다는 쉽게 생각하고 있었지만, 상위 15개국 중에서는 상대적으로 어려워하는 편인 것으로 나타났다.

본 연구에서는 해석하기를 학생들이 그래프나 표와 같이 표현된 자료를 해석하여 자료에 포함된 정보를 읽어내는 능력과 간단한 눈금을 읽을 수 있는 능력으로 정의하였다. 우리나라에서 해석하기와 관련이 있는 교수·학습 활동은 확률과 통계 영역에서 많이 이루어지고 있다. 김희경과 김부미(2013)는 2011년에 국가수준 학업성취도 평가를 본 중3 학생을 대상으로 인지영역 숙달도를 분석하였는데, 이 연구에서 설정한 해석하기 영역의 네 가지 하위요소(문제 상황의 글 해석하기, 함수와 도형의 방정식 영역의 자료 해석하기, 통계적 자료 해석하기, 도형, 다이어그램의 정보 해석하기) 중 통계적 자료 해석하기의 숙달 비율이 51.03%로 가장 낮게 나타났다. 즉, 우리나라 학생들이 해석하기가 사용되는 내용영역 중 통계적 자료 해석하기를 더 어려워하고 있음을 알 수 있다.

우리나라의 초등학교와 중학교 확률과 통계 학습내용을 살펴보면 자료를 표현하는 것이 대부분이며 자료를 해석하는 내용은 상대적으로 적은 실정이다. 앞서 표현하기 속성은 성취도 상위국 중 우리나라가 가장 쉽게 생각하는 것으로 나타난 결과에는 이러한 교육 내용 선정 및 교수·학습의 결과가 반영되었다고 볼 수 있다.

앞서 제시한 M032681B 문항([그림 III-1] 참조)

은 통계적 자료 해석과 관련된 것이다. 해석하기 전체 문항에 대한 평균 정답률이 78.2%인 것에 비해 이 문항에 대한 우리나라 학생들의 정답률은 49.7%로 낮았으며, 상위 15개국 중 10위로 나타났다. [그림 IV-2]를 통해 이 문항에 대한 우리나라 학생들의 성취수준별³⁾ 정답률을 살펴보면 가장 상위인 수월수준 70.4%와 두 번째 수준인 우수수준 31.9% 사이의 정답률 차이가 38.5%p로 크게 나타났다. 해석하기 속성이 포함된 문항들의 평균 성취수준별 정답률은 수월수준이 89.3%이고 우수수준이 77.3%로 두 수준이 12.0%p 정도 차이가 난 것을 고려해볼 때, 우리나라는 통계적 자료 해석과 관련된 부분에서 자료 해석하기가 포함된 이러한 문항을 성취도 중위권과 하위권 학생들이 어려워한다는 것을 의미한다.



[그림 IV-2] ‘해석하기’ 전체 문항과 M032681B 문항의 성취수준별 평균 정답률

전 세계적으로 빅 데이터 분석과 같은 대규모 통계 자료의 처리와 해석이 점점 더 중요시되고 있는 추세이며, 많은 국가에서 자료 해석을 수학 교육 내용으로 적극적으로 제시하고 있다. 예를 들어 뉴질랜드는 수학 과목의 세 가지 하위 영역 중 하나로 통계를 선정하고, 통계의 하위 영

3) TIMSS에서는 625, 550, 475, 400의 네 가지 분할점수를 중심으로 성취수준을 수월, 우수, 보통, 기초의 네 가지로 분류함. 기초 이하 수준은 해당하는 학생 비율이 낮아 분석하지 않음.

역인 통계적 소양에서 통계 기반 자료, 보고서, 연구 등을 해석하고 평가하는 것을 제시하고 있다(MOE, 2007). 그러므로 우리나라에서도 학생들의 해석하기 능력 향상을 위해 수학 교육 내용을 점검하고 학생들의 이러한 능력을 강화하기 위한 교수·학습 방안을 마련할 필요가 있을 것이다.

2) 실행하기

실행하기에 대한 분석 결과를 살펴보면 [그림 IV-3]과 같이 홍콩(-0.36) 학생들이 가장 쉽게 생각하고 있으며, 이스라엘(-0.31), 핀란드(-0.22), 일본(-0.20)의 학생들도 상대적으로 쉽게 생각하고 있다는 것을 알 수 있다. 이 속성에 대한 우리나라 학생들의 능력 수준은 0.44로 상위 15개국 중 가장 어려워하는 것으로 분석되었다. 또한, 우리나라 다음으로 어렵게 생각한 나라인 대만(0.21)과도 차이가 큰 것으로 나타났다.



[그림 IV-3] '실행하기'에 대한 국가별 상대적 능력 수준

본 연구에서 정의한 실행하기는 알려진 절차, 알고리즘, 해결 방법이 있는 문제를 풀기 위해 효율적인/적합한 연산, 방법, 전략을 선택하거나, 일련의 수학적 지시 사항을 실행하고, 수학적 또는 실생활 맥락의 문제를 해결하며, 수학적 사실, 개념, 절차를 적용하는 것으로 문제해결과

관련이 있는 속성이라 할 수 있다. 문제해결력은 수학과 교육과정이 개정될 때마다 지속적으로 강조되어온 속성 중의 하나이다. 그럼에도 불구하고 우리나라 학생들이 실행하기를 성취도 상위 15개국 중 가장 어렵하다는 것은 문제해결을 비롯한 실행하기에 해당하는 인지적 속성들과 관련된 교육이 적절하게 이루어지지 못하고 있음을 나타내는 것이다.

TIMSS 2011 공개문항 중 [그림 IV-4]에 제시한 M052061은 문제를 푸는데 실행하기 속성 1가지가 필요한 것으로 분류된 문항이다. 이 문항에서 우리나라 학생들의 정답률은 74.1%로 나타났다. 실행하기와 관련된 문항을 가장 쉽게 생각하는 것으로 나타난 홍콩은 이 문항에서 88.7%의 정답률을 나타냈다. 우리나라 학생들의 답지 반응을 살펴보면 15, 15.6, 15.67, 15.7, $15\frac{2}{3}$ 등을 답으로 작성한 경우가 18.4%이고, 그 이외의 오답을 쓴 경우가 7.5%였다. 즉, 우리나라 학생들은 전혀 몰라서 틀린 경우 보다는 문제해결 과정에서 소수점 처리를 버림으로 하거나 처리하지 않는 등 문제해결전략을 잘못 선택하여 틀린 경우가 많았다는 것을 알 수 있다(김수진, 박지현, 2013).

M052061

수진이가 달걀을 상자에 담아 포장하고 있다. 각 상자에는 달걀이 6개씩 들어간다. 수진이는 달걀을 94개 가지고 있다. 수진이가 달걀을 모두 포장하려면 최소한 몇 개의 상자가 필요한가?

답: _____ 개

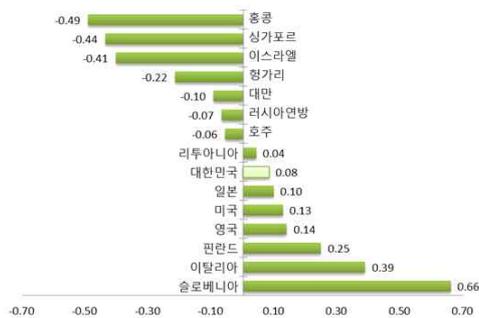
[그림 IV-4] '실행하기' 속성을 포함한 문항

조건을 파악하고 전략을 세워서 스스로 문제를 해결하는 이러한 유형의 문제들은 일반적으로 우리나라 교과서 각 단원의 마지막에 제시된다. 이때 교과서 구성 순서에 의해 종합 문제로

서 다양한 수학적 내용이나 사고를 복합적으로 이용하는 난이도가 높은 문제들이 제시되고 있다. 이러한 문제들을 접한 경험에 의해 학생들에게 이러한 문제들에서 사용되는 전략을 선택하거나, 수학적 지시 사항에 따라 실행하거나, 문제를 해결하고 사실, 개념, 절차를 적용하는 등의 과정이 어렵다고 각인되어 있으며, 응용문제는 무조건 어렵다고 인식하고 있다. 그러므로 교과서를 구성할 때 학생들이 수월하게 해결할 수 있는 간단한 응용문제를 제시하여 전체적으로 응용문제에 대한 난이도를 조정하는 것을 고려할 필요가 있을 것이다. 이를 통해 응용문제에 대한 학생들의 부담감을 줄이고 수학이 어렵다는 인식을 바꿀 수 있을 것이다.

3) 일반화하기

일반화하기에 대한 분석 결과를 살펴보면 [그림 IV-5]와 같이 홍콩(-0.49) 학생들이 가장 쉽게 생각하고 있으며, 싱가포르(-0.44), 이스라엘(-0.41)의 학생들도 상대적으로 쉽게 생각하고 있다는 것을 알 수 있다. 이 속성을 가장 어렵게 생각한 나라는 슬로베니아(0.66)이었으며, 우리나라 학생들의 능력 수준은 0.08로 양의 값으로 나타나 상위 15개국 중에서 어려워하는 편에 속하는 것으로 분석되었다.



[그림 IV-5] ‘일반화하기’에 대한 국가별 상대적 능력 수준

본 연구에서는 일반화하기를 수학적인 사고와 문제 해결 결과를 더 일반적이고 폭넓게 적용 가능한 용어로 재서술하여 결과가 적용될 수 있는 영역을 확장하거나, 지식의 요소들과 표현을 연결하고, 관련된 수학적 아이디어를 연결하는 것으로 정의하였다. 또한, 수학적 사실, 개념, 절차를 조합하여 결과를 수립하고, 여러 결과를 조합해서 이후의 결과를 산출하는 능력도 포함한다. TIMSS 2011 분류에 따르면 이러한 능력들은 추론하기 영역의 하위요소이다.

일반화하기 속성에 해당하는 문항들의 성취수준별 정답률 평균을 살펴보면, 수월수준의 정답률은 74.3%, 우수수준의 정답률은 33.2%로 나타나 상위 두 수준 간 정답률 차이(41.1%p)가 매우 큰 것을 알 수 있다. 또한, 보통수준의 정답률이 10.0%이고, 기초수준의 정답률이 3.1%로 하위수준 학생들의 정답률이 매우 낮았다. 본 연구에서 정의한 일반화하기는 고등 수학적 사고가 요구되는 속성인 만큼 성취 수준에 따른 정답률 차이가 매우 크고, 성취도 하위권의 많은 학생들이 어려워하고 있음을 알 수 있다. 일반화하기는 수학 학습을 위해 매우 중요한 속성이다. 그러므로 수학 교수·학습에서 성취도 하위권 학생들의 일반화하기 능력을 점검하고, 이를 강화할 수 있도록 쉬운 수준의 일반화하기 문제들이 추가적으로 제공할 필요가 있다.

우리나라 2009 개정 교육과정에서는 수학적 과정의 하나로 수학적 추론을 강조하고 있다. 2009 개정 교육과정에서 수학적 추론은 귀납, 유추를 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고, 이를 정당화하거나, 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하는 것, 합리적으로 사고하고 일상생활에서 자신의 의견을 정당화할 때 적절한 근거에 기초하여 논지를 전개하는 것(교육과학기술부, 2011)으로 보고 있다. 이는 본

연구에서 정의한 일반화하기의 속성을 포함하는 것으로, 더 포괄적으로 정의되어 있다고 볼 수 있다. 그러므로 2009 개정 교육과정에 따른 수학적 추론 능력의 신장 방안을 마련할 때, 일반화하기 능력을 강화할 수 있는 방안을 모색할 필요가 있을 것으로 보인다.

V. 결론 및 논의

수학은 미래 인재 양성을 위한 핵심적인 교과임에도 불구하고, 최근 우리나라에서 수학을 기피하는 현상이 초·중등 교육을 중심으로 나타나고 있다. 국제적으로 우리나라 학생들의 성취도가 높지만, 국가 내에서는 성취도가 높은 학생들 간에 발생하는 단순한 성적 경쟁이 학생들을 수학을 싫어하게 만드는 원인 중 하나일 것이다. 우리나라의 최근 수학 교육은 학생들의 흥미 향상을 위해 학습 내용을 감축하는 방향으로 전개되고 있다. 학생들이 수학을 싫어한다고 해서 단순하게 가르치지 않으면 된다는 생각은 학생들이 더 나은 삶을 살아갈 수 있도록 도움을 주어야 하는 교육의 책무성 측면에서 옳지 않을 것이다. 글로벌 시대에 우리나라 학생들이 타 국가 학생들과의 경쟁에서 살아남을 수 있는 경쟁력을 갖추도록 하기 위해서는 수학에 대한 어려움의 원인을 분석하여 이를 극복할 수 있도록 돕는 방안을 찾아야 할 것이다.

TIMSS 및 PISA와 같은 국제 비교 연구에서 우리나라 학생들의 수학 성취도는 매우 상위 수준으로 인정받고 있다. TIMSS 2011에서도 우리나라 8학년은 수학 성취도 1위를 차지하였다. 그러나 본 연구에서 TIMSS 2011 자료를 이용하여 수학 인지적 속성을 세분화하고, 성취도 상위국 학생들의 상대적 난이도를 비교한 결과 성취도 1위 국가인 우리나라 학생들도 해석하기, 실행하

기, 일반화하기는 다른 상위국 학생들에 비해 어려워하는 것으로 드러났다. 특히 실행하기는 문제해결과 직접적으로 관련된 속성으로 우리나라 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어왔음에도 불구하고 학생들이 어려워하고 있었다.

이러한 연구 결과를 바탕으로 우리나라 학생들이 어려워하는 세 가지 인지적 속성에 대해 다음과 같은 시사점을 제시할 수 있다. 첫째, 해석하기 능력을 신장해야 한다. 특히 자료 해석과 관련한 교육내용을 강화하고, 중하위권 학생들을 위한 교수·학습 자료 및 방안을 마련할 필요가 있다. 둘째, 문제해결 전략 선택 및 적용 능력을 향상시켜야 한다. 이를 위해 교과서의 응용문제의 수준을 낮추어 제시하는 방안을 고려해볼 수 있다. 셋째, 일반화하기 능력 향상을 위해 중하위권 학생들을 위한 낮은 수준의 문제를 추가적으로 제공할 필요가 있다.

본 연구의 진단 결과를 바탕으로 우리나라 학생들이 상대적으로 어려워하는 인지적 속성들을 효과적으로 지도할 수 있는 교수·학습 방안이 연구되어야 한다. 더불어 학교단위 이원목적분류표, 국가 및 국제 수준의 학업성취도 평가에서 활용되고 있는 수학 인지영역 평가를 개선에 관한 연구를 지속적으로 수행하여 수학 학습에서 내용 영역뿐만 아니라 인지영역에 대한 고려가 이루어질 수 있도록 해야 할 것이다. 또한, 학생들의 인지적 속성에 따른 국가별 성취 특성에 대한 성차 분석, 성차에 영향을 미치는 변인 분석 등을 통해 우리나라 학생들이 수학 학습에서 겪는 어려움을 거시적인 관점에서 좀 더 체계적으로 살펴볼 필요가 있다. 이러한 연구들을 통해서 우리나라 학생들이 수학을 어려워하고 싫어하게 되는 원인들을 밝힐 수 있으며, 이에 대한 교수학적 처방을 통해 수학에 대한 긍정적 사고를 하도록 도울 수 있을 것이다.

참고문헌

- 강옥기, 박교식, 강문봉(1991). **교육의 본질 추구를 위한 수학 교육 평가 체제 연구(II) : 수학과 평가 모형 및 예시 도구 개발**. 한국교육개발원. RR91-19-05
- 교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8호].
- 김수진, 박지현, 김현경, 진의남, 이명진, 김지영, 안윤경, 서지희(2012). **수학·과학 성취도 추이 변화 국제비교 연구: TIMSS 2011 결과 보고서**. 한국교육과정평가원. 연구보고 RRE 2012-4-3.
- 김수진, 박지현(2013). **TIMSS 2011 공개문항 분석 자료집 - 수학**. 한국교육과정평가원. 연구자료 ORM 2013-48-1.
- 김선희, 김수진, 송미영(2008). 수학 평가 결과의 분석을 위한 인지 진단 이론의 활용. **학교수학**, 10(2), 259-277.
- 김희경, 김부미(2013). 인지진단모형을 활용한 수학 학업성취 결과 분석 - 2011년 국가수준 학업성취도 평가 자료를 중심으로- **학교수학**, 15(2), 289-314.
- 박찬호(2012). 다층 구조를 이루는 이분문항 자료의 급내상관계수 추정 방안 비교. **교육평가연구**, 26(2), 459-476.
- 송미영, 임해미, 최혁준, 박혜영, 손수경(2013). **OECD 국제 학업성취도 평가 연구: PISA 2012 결과 보고서**. 한국교육과정평가원. 연구보고 RRE 2013-6-1.
- 이봉주, 조윤동, 김미경(2010). **2010년 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석-수학**. 한국교육과정평가원. 연구보고 RRE 2011-3-4.
- 이현숙, 고호경(2014). 인지진단모형을 적용한 TIMSS 8학년 수학 기하영역의 성차 분석. **학교수학**, 16(2), 387-407.
- 조지민, 동효관, 옥현진, 임해미, 정혜경, 손수경, 배제성(2012). **OECD 국제 학업성취도 평가 연구 : PISA 2012 본검사 시행 보고서**. 한국교육과정평가원. 연구보고 RRE 2012-3-1.
- Chipman, S. F., Nichols, P. D., & Brennan, R. L. (1995). Introduction. In P. D. Nichols, S. F. Chipman, and R. L. Brennan (Eds.), *Cognitively Diagnostic Assessment* (p.1-18). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- De la Torre, J. (2008). An Empirically based method of Q-matrix validation for the DINA model: development and applications. *Journal of Educational Measurement*, 45(4), 343-362.
- DiBello, L., Stout, W., & Roussos, L. (1995). Unified cognitive/psychometric diagnostic assessment likelihood-based classification techniques. In P. D. Nichols, S. F. Chipman, and R. L. Brennan (Eds.), *Cognitively Diagnostic Assessment*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hartz, S. (2002). *A Bayesian framework for the Unified Model for assessing cognitive abilities: blending theory with practice*. Doctoral thesis, The University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Hartz, S., Roussos, L., & Stout, W. (2002). *Skills Diagnosis: Theory and Practice*. User Manual for Arpeggio software. Princeton, NJ: ETS.
- Ministry of Education (MOE) (2007). *The New Zealand Curriculum* NZ: Ministry of Education.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Framework*. MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2012).

- TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing.
<http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- Park, C. (2008). *A Multilevel IRT Model for Group-Level Diagnostic Assessment with Application to TIMSS*. Doctoral dissertation, the University of Wisconsin-Madison.
- Tatsuoka, K. K. (1983). Rule space: An approach for dealing with misconceptions based on item response theory. *Journal of Educational Measurement*, 20(4), 345-354.
- _____. (1990). Toward integration of item response theory and cognitive error diagnoses. In N. Frederiksen, R. L. Glasser, A. M. Lesgold, and M. G. Shafto (Eds.), *Diagnostic monitoring of skills and knowledge acquisition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- _____. (1995). Architecture of knowledge structure and cognitive diagnosis: A statistical pattern recognition and classification approach. In P. D. Nichols, S. F. Chipman, & R. L. Brennan (Eds.), *Cognitively Diagnostic Assessment*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

The Analysis of Characteristic Achievement of TIMSS 2011 G8 High-Performing Countries According to the Mathematics Cognitive Attributes

Park Ji Hyun (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)

Kim Soojin (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)

This research purposes to find out the mathematical cognitive characteristics of Korean students and compare it with that of TIMSS 2011 high-achieving countries based on the Cognitive Diagnostic Theory.

Based on framework and questions of TIMSS 2011, we select cognitive attributes. Using the data of 8th grade students' mathematical achievement in TIMSS 2011, we compare and analyze the top 15-countries students' cognitive traits.

As a result, cognition domain of TIMSS 2011 is

reclassified as 9 cognitive attributes. we could distinguish between easy attributes and difficult attributes that students in each country relatively think. Especially, Students of Korea relatively think Recall/Recognize, Compute, Classify/Measure and Represent are easy. On the other hand, relatively they have difficulties in Retrieve, Implement, and Generalize. Based on this research result, It is necessary to establish an educational measures for each attributes which students have difficulties.

* Key Words : mathematics cognitive Attributes(수학 인지적 속성), mathematics cognitive domain(수학 인지 영역), Q matrix(Q행렬), TIMSS(수학·과학 성취도 추이변화 국제비교 연구)

논문접수 : 2015. 6. 28

논문수정 : 2015. 7. 29

심사완료 : 2015. 7. 29