대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 3, 367 ~ 379. Aug 2015

『유클리드 원론』 I 권 정리 22의 Diorism을 통해서 본 존재성

유 미 영* · 최 영 기**

고대 그리스에서 '수학적 대상이 존재하기 위한 조건'으로 사용된 diorism을 통하여 수학적 대상의 존재성에 대하여 살펴본다. Diorism이 제시된 대표적 예인『유클리드 원론』 I 권 정리 22를 중심으로 삼각형의 존재성을『원론』이 어떻게 다루었는지에 대하여 논의한다. 정의한 대상의 존재성을 공준이나 명제로 증명하는『원론』의 구조를 통하여 수학적 대상의 존재성은 인식가능성이고 공리체계 내에서 증명가능성임을 밝힌다. 이러한 관점에서 작도는『원론』에서 존재성을 보증하는 주요 방법이다. 또한 diorism의 맥락에서 전개도가 다면체를 구성할 수 있음을 살펴보았다. 이러한 내용을 바탕으로 수학적 대상의 존재성에 대해 학교수학에서 시사하는 점을 논의하였다.

Ⅰ. 서 론

정의, 공준, 공리, 정리의 순서로 기술되는 『유클리드 원론』의 첫 I 권을 살펴보면 23개의 정의목록에서는 삼각형(triangle)의 정의를 찾아볼 수 없다.『유클리드 원론』I 권의 48개의 정리 중 36개의 정리가 삼각형과 관련된 명제인 만큼 삼각형은『원론』I 권의 주요 주제이다. 그럼에도 불구하고 직선, 직각, 원, 정삼각형, 평행선 등이 제시된 정의목록에서 유클리드는 삼각형을 명확하게 정의하지 않고 있다. 다만 정의 19에서 '세 변으로 둘러싸인 도형(trilateral figures)' 으로 느슨하게 정의할 뿐이다[1].

유클리드는『원론』에서 정의한 수학적 대상의 존재성을 공준이나 정리로 보장한다(Heath, 1956).『원론』I 권을 살펴보면 가장 먼저 정의가 제시된다. 정의된 수학적 대상 중 직선이나 원은 공준에서 그 작도가 가능함을 받아들임으로써 존재성을 보장하고, 정삼각형이나 직각은 정리에서 그 작도법을 보여줌으로써 존재함을 증명한다. 한편 삼각형의 존재성은『원론』I 권의 정리 22에서 삼각형의 작도법을 보여줌으로 보장되는데 이 때 삼각형이 존재하기 위한 길이조건이 어떤 두 변의 길이를 더해도 나머지 한 변보다 더 길다는 것으로 제시된다.『원론』에서의 정의는 공준이나 정리에서 존재성이 보장되었을 때 그 정의가 완결된다고 볼 수 있고, 이러한 관점에서 삼각형의 정의는 정리 22에서 완결된다고 할 수 있다. 정의 19에서처럼 세 변으로 둘러싸인 도형을 삼각형이라고 정의할 수는 없다. 주어진 세 변의 길이에 따라 그러한 삼각형이 존재할

* 신림고등학교, glory@snu.ac.kr (제1 저자, 교신저자)
** 서울대학교, yochoi@snu.ac.kr

1) 이무현(1997)譯『기하학원론』에서는 삼각형(세모)로 번역되어 있다. 이하의『원론』의 번역은 이무현(1997)을 따른다.

수도 있고, 그렇지 않을 수도 있기 때문이다. 따라서『원론』에서는 주어진 길이를 갖는 세 변이 삼각형을 이룰 수 있는 조건을 삼각형의 정의에 포함시켜야 했고, 이를 위한 일련의 과정을 거친 후 정리 22에서야 삼각형이 존재하기 위한 길이조건을 포함하여 그 존재를 작도함으로써 증명한 것이다.

어떤 대상이 존재할 조건이나 한계를 명확히 하는 것을 고대 그리스에서는 diorism이라고 했다.『원론』 I권 정리 22에서의 길이조건은 삼각형이 존재하기 위한 조건으로서 diorism이다. '세 변으로 둘러싸인 도형'은 삼각형의 이데아일 수 있지만, 이 이상향이 실제로 존재하기 위해서는 diorism의 조건을 만족해야 한다. 따라서 diorism이 필요한지, 필요한 경우에는 그것이 무엇인지를 탐구하는 것은 존재성을 탐구하는 것이며 수학에서 중요한 문제이다.

수학적 대상을 다룰 때 그 대상이 존재하는지를 논하는 존재성의 문제는 반드시 필요한 개념이기는 하지만 그 명확한 의미에 대해서는 불분명하다. 일상에서 사용하는 존재의 의미와 비교하여 수학에서 다루는 수학적 대상의 존재성의 의미가 무엇이고, 어떠한 중요성을 갖고 있는지, 그리고 고대 그리스에서는 이것이 어떻게 다루어졌는지를 알아볼 필요가 있다.

II. '존재한다'의 의미

'존재한다'는 용어는 수학에서 뿐만 아니라 일상생활에서도 사용되는 용어이다. 또한 어떠한 대상이 존재하는지, 그 존재를 어떻게 알 수 있는지의 문제는 철학적 문제로서 수많은 논의가 있어온 개념이기도 하다. 수학에서는 '방정식의 해가 존재한다', '교점이 존재한다' 등으로 존재에 관해 수없이 다루고 있음에도 불구하고 수학에서 다루는 존재성이 일상의 용어나 혹은 철학에서 다루어지는 것과 관련하여 어떠한 의미를 가지고 있는지 분명하지 않다. 고대 그리스 이래 수학은 철학과 깊은 관계를 갖고 있다. 이에 철학에서의 존재에 대한 개념을 토대로 하여 수학에서의 존재성은 어떠한 의미인지를 논의하고자 한다.

1. 존재에 관한 탐구

보편자의 존재는 유사 이래로 인간이 끊임없이 탐구해 온 주요 주제 중 하나이다. 이에 대하여 크게 세 가지 철학적 흐름이 있다. 실재론에서는 보편자가 인간이 감각적으로 경험할 수 없는 인간의 인식 너머에 이상적으로 존재한다고 한다. 반면 근대의 개념론은 보편적 진리를 인간이 인식할 수 있는 것으로 보아 이성으로 진리를 추구할 수 있는 가능성을 열었다. 유명론에서 보편자는 언어적 기호에 불과하며 언어적 기호가 지시하는 보편자는 존재하지 않는다고 본다 (Quine, 1948).

수학적 진리를 보편적 진리의 하나로 볼 때 실재론에서는 수학의 추상적 실체가 정신과는 독립적으로 존재하는 것으로 본다. 개념론에서는 수학적 대상이 정신이 창조해 낸 것, 즉 사유에 의해 생겨난 추상적 실체라는 견해를 가졌다. 괴델의 불완전성 정리로 완전한 수학적 체계의 가능성이 없어진 이후 유명론에서는 수학적 대상을 공리체계를 만족하는 변수 기호로 보았다 (Barker, 1983; 이지현, 2011).

2. 수학에서의 존재성 - 인식의 장(場)

플라톤(BC 427 ~ BC 347)과 비슷한 시대의 수학자인 유클리드(BC 325 ~ BC 265)는 플라톤의 이데아를 염두에 두고『원론』을 집필했을 것이

다.[2] 초월적 이데아의 존재를 받아들이는 당시의 철학적 풍토 속에서 유클리드는 수학적 대상의 존재에 대하여 어떻게 생각하고 이를『원론』에 어떻게 적용시켰을까?『원론』이 존재성을 중요하게 여겼음은 분명하다.『원론』은 정의한 수학적 대상의 존재성을 공준이나 명제로 확인시켜준다. Eves(1995)는『원론』에서 정의만으로는 정의된 대상들의 존재에 대해서 아무것도 알려주지 않는다고 했다. 따라서 주제와 기초적인 대상의 존재는 공준으로 받아들이며 다른 모든 대상의 존재는 증명되어야만 했다(p.54). 이는『유클리드 원론』의 체계에서 다루는 대상들은 모두 공리와 정리를 통하여 우리가 수학적으로 인식할 수 있는 것들로만 이루어져 있기 때문이다.

『원론』의 방법론은 공리로부터 연역하는 논리적인 방법이다. 유클리드 기하 체계에는 증명 없이 받아들여지는 기본 명제로서의 공리가 있고, 이미 체계 안에 받아들여진 명제로부터 논리적으로 연역된 정리가 있다. 여기에서의 '체계'란 우리 인식의 장(場, field)이라 할 수 있다. 즉『원론』에서 공준이나 정리를 통하여 체계 안에 받아들여지게 된 수학적 대상의 존재성이란, 우리의 인식 안으로 받아들여져 인식 안에 존재하는 존재성이라고 볼 수 있다.

플라톤은 인간의 경험세계와 관계없이 초월적으로 실재하는 형상 혹은 이데아가 존재한다고 보았다(임재훈, 2004). 실재론에서 이데아의 존재는 인간의 인식과는 독립적인 것이다. 이상적으로 우리가 인식할 수 있는지의 여부와는 상관없이 존재하는 이데아와 우리가 그것을 인식할 수 있는지의 여부를 따지는 존재성은 서로 구분이 되는 개념이다. 즉 '존재한다'는 것에는 우리의 인식 밖의 이상적인 이데아로서 존재하는 것과 우리의 인식의 영역 안에 들어옴으로써 인간의 마음속에 존재하는 것의 두 가지 다른 의미가 있다(Knorr, 1983, p.141). 이상적인 대상을 정의하는 것으로 그치지 않고 항상 그 존재성을 공준이나 정리로 보장하는『유클리드 원론』에서의 존재성은 후자에 해당한다.『원론』에서는 이상적인 수학적 대상이 인식의 장의 울타리 안에 들어오도록 하는 인식 체계의 문(門)의 역할을『원론』의 공준이 담당한다고 볼 수 있다.『원론』에서 수학적 대상이 존재한다는 것은 공준에 근거하여 증명되어『원론』의 공리체계의 장 안에서 인식된 대상으로 다루어진다는 것을 의미한다. 그리고 이것이 수학에서의 존재성이라 할 수 있다.

수학에서의 존재성은 기본적으로 주어진 공리체계 내에서의 존재성을 말하는 것이다. 그리고 이 공리체계는 우리의 인식 안에 있다고 할 수 있다. 수학적 대상은 이데아로서 존재할 수 있지만 우리가 학문과 교육의 장에서 다루는 수학[3]은 인식의 영역 안에 존재하는 것이다.

3. 인식으로서의 존재성

수학에서 다루는 존재성을 우리가 인식할 수 있는지의 존재성, 즉 우리 인식의 장 안에 존재하는 것으로 본다면 보편자가 어디에, 그리고 어떻게 실재하는 지와의 문제와는 다른 관점으로 수학적 대상의 존재성의 문제를 해석할 수 있다. 실재론에서의 존재성 문제는 인간 감각과 상관없이 어딘가에 존재하는 이데아를 인간이 인식할 수 있는지의 여부로 볼 수 있고, 개념론에서는 인간의 이성 안에 숨겨져 있는 수학적 진리를 깨달아 이해하는지의 여부로 볼 수 있다. 비유클리드 기하의 발견으로 우리가 수학적 대상을 인식할 수 있는 장인 공리체계가 유일하지

---

2) 유클리드는 아테네의 플라톤 학교에서 수학교육을 받았다고 여겨진다(Eves, 1990, p.47).
3)『유클리드 원론』은 교육과 학문의 수단으로 사용되고 있다.

않다는 것이 밝혀졌으므로 유명론에서 수학적 대상의 존재는 주어진 각각의 공리체계에 부합하는 지(Knorr, 1983, p.138)로 판명할 수 있을 것이다.

이렇게 수학적 대상의 존재성이란 철학의 흐름에 따라 그 의미가 달라졌다기 보다는, 각각의 철학에서 그 체계 안에 인식할 수 있는지의 여부로 해석할 수 있다.

Ⅲ. 수학에서의 존재성과 Diorism

1. 분석의 결과로서의 diorism

고대 그리스에서는 존재성을 중요시했고, 존재하기 위한 조건으로 diorism을 논했다. 수학에서의 존재성은 우리 인식으로의 존재성이었기 때문에 우리 인식 안에 존재하기 위한 조건인 diorism을 찾고, diorism이 있는 경우에 이를 밝히는 것은 그리스 기하의 구조상 필수적인 것이라 볼 수 있다. Diorism은 플라톤의 제자 Leon이 처음 사용한 것으로 알려져 있으며, 분석의 한 단계이거나, 혹은 분석의 결과로 얻는 것으로써 문제의 해가 존재하기 위해 필요한 조건을 기술하는 것이다(Knorr, 1986, p.73). Diorism은 문제의 해나 수학적 대상이 존재하도록 하기 위하여 조건의 범위를 한정하거나, 특정한 조건을 제시하는 방법으로 사용되며, 주로 문제가 제시될 때 함께 언급된다. 이 diorism은 현대에는 거의 논의되지 않고 있지만 분석의 분야로 알려진 고대 문제 해결에서는 중요한 역할을 했다. 기본적인 의미의 diorism은 특정한 기하 문제가 해결될 가능성을 논의하는 것이다. 그리고 이는 종종 풀이가 가능하도록 하는 제한조건의 형식을 갖는다. Proclus는 diorism의 역할은 구하는 것이 어떠할 때 존재하는지를 판별하는 것이라고 했다(Mahoney, 1968, p.328). Saito와 Sidoli(2010)는 diorism으로 해의 제한점을 구체화하고, 해의 가능한 경우들을 나누고, 모든 해를 정교화한다고 한다.

Hankel(1874)은 수학의 발전과정에서 분석의 방법으로 발견하고 종합의 방법으로 기술하는 과정을 다음과 같이 나타냈다(Saito & Sidoli, 2010에서 재인용, p.588).

1. Analysis 분석 (a) Transformation (b) Resolution	→	2. Synthesis 종합 (a) Construction (b) Proof

[그림 III-1] 분석과 종합 (Saito & Sidoli, 2010, pp.584-588)

이 때 분석의 결과 수학적 대상이나 해가 존재하기 위한 어떠한 조건이 필요할 경우 그 조건에 해당하는 diorism이 추가된다.

1. Analysis 분석 (a) Transformation (b) Resolution	→	2. Diorism	→	3. Synthesis 종합 (a) Construction (b) Proof

[그림 III-2] diorism이 추가된 분석과 종합 (Saito & Sidoli, 2010, pp.584-588)

이렇게 분석, diorism, 종합의 과정으로 기술된 것은 Apollonius의 『Cutting off a Ratio』나 Archimedes의 『Sphere and Cylinder II』(Heath, 1897, p.85) 등 여러 고대 그리스 문헌에서 찾아볼 수 있다. 그러나 그리스 수학에서는 분석에 의한 발견의 과정은 숨기고 종합적으로 기술하는 경우가 대부분이어서 일반적으로는 문제와 diorism이 함께 제시되고 이후에 종합적 진술인 construction과 proof가 제시된다. 분석적 내용을 고대 그리스의 수학교재에서 찾아보기 어려운 이유도 이와 같다.

수학에서 분석은 발견도구이고, 종합은 설명수단이다. 수학을 만들어내는 과정에서 발견술적인 역할을 분석이 하고, 이를 정리하여 설명할 때 논증적 방법으로 종합하여 기술한다. 대표적인 공리 논증적 기술인『유클리드 원론』의 경우도 그리스 기하학이『원론』의 공리, 정의, 명제, 증명의 방법으로 정리되기 훨씬 이전부터 그리스 수학자들에 의해 수많은 분석의 과정을 거쳤고, 그 결과로『원론』이라는 종합적으로 기술된 결과를 얻어냈던 것이다. 이를 두고 Lakatos(1996, p.180)는 '그리스 기하학의 가장 흥미로운 분석은 전(前)유클리드 때의 것이며 그 결과로 유클리드 공리체계가 창출되었다'고 하였다.

『유클리드 원론』에서도 수학적 내용의 발생과정인 분석 내용이 대부분 생략되어 있다. 그러나『원론』도 분석의 결과이므로 분석과정이 약간씩 드러나는 경우가 있는데, 그 대표적인 예가 diorism을 제시한 I권의 정리 22이다.

2.『유클리드 원론』 I권 정리 22에서의 diorism[4)]

Saito & Sidoli(2010)와 Mahoney(1968)는 diorism의 대표적인 예로『유클리드 원론』 I권의 정리 22를 들고 있다. 유클리드는『원론』 앞부분의 정의목록에서는 삼각형을 명시적으로 정의하지 않고 '세 변으로 둘러싸인 도형(trilateral figures)'이라고만 제시한다. 임의의 세 변으로는 삼각형을 구성할 수 없다. 삼각형의 세 변은 특정한 길이조건을 만족해야 하는데 이 길이조건은『원론』 I권 정리 20에서 나타나게 된다.

Proposition 20.
In any triangle the sum of any two sides is greater than the remaining one.
삼각형에서 두 변의 길이를 더하면 나머지 한 변보다 더 길다.

이 길이조건이 삼각형이 존재하기 위한 diorism이 된다. 따라서 유클리드는『원론』I권 정리 22에서 삼각형이 존재하기 위한 diorism을 추가하고, 그러한 경우에 삼각형이 존재함을 작도함으로써 증명한다.

Proposition 22.
To construct a triangle out of three straight lines which equal three given straight lines: **thus it is necessary that the sum of any two of the straight lines should be greater than the remaining one.**
세 개의 직선을 주었을 때, 변들의 길이가 이들과 같은 삼각형을 만드시오, **그러니 이 경우 두 직선의 길이를 더하면 나머지 한 직선보다 더 길다는 것을 가정해야 한다.**
(굵은 글씨가 diorism)

이로써『원론』에서의 삼각형 정의는 diorism의 제시와 그 존재성의 증명을 포함한『원론』I권 정리 22에서 완결된다. 여기에서 diorism은 삼각형의 존재성을 보장하기 위해서 필수적인 요소이다. 정리 22로서 비로소 삼각형이『원론』의 인식의 장에 들어오게 되었고, 이를 위해서 diorism에 의한 존재성의 보증이 필요했던 것이다.

Diorism에 대한 탐구가 삼각형의 정의를 완결짓는 촉매제가 되었다. 비형식적인 수학이 형식적인 수학이 되어『원론』의 체계 안에 들어오게 하는 주요 동인이 존재성과 존재하기 위한 조건을 논의하는 diorism이다. 그리스 수학에서는 존재성의 문제가 중요한 필수적인 요소이다. 그리고 diorism은 이 존재성을 드러내어 나타낸 것

4) 유클리드 원론 I권 정리 22와 관련된 존재성의 문제는 diorism 외에도 삼각형의 작도과정에서 두 원의 교점의 존재를 암묵적으로 가정한 연속성의 원리에 관한 문제와 주어진 직선 또는 점의 존재성에 관한 문제가 있다. 이 글에서는 diorism으로 그 내용을 한정한다.

이라 볼 수 있다. 존재하기 위한 조건인 diorism을 탐구함으로써 존재성에 대해 명시적으로 인지하게 되고 존재성을 탐구하는 것이 주요한 수학적 사고 방법의 하나임을 분명히 알 수 있다.

3. 작도와 존재성

『원론』 I권 정리 22에서의 diorism인 길이조건은 직접적으로는 작도를 위한 조건이다.『원론』에서 작도는 어떠한 대상을 그리는 것 이상의 의미를 갖고 있다. Zeuthen(1896)은『원론』에서 수학적 대상의 존재성을 보증하는 방법으로 작도를 사용한다고 하였다(Knorr, 1983).『원론』에서의 작도는 엄밀히 말하면 특정한 하나의 작도를 제시하는 것이 아니라 '작도법'을 알려준다. 이는 특정한 대상을 직접 그려서 보여준다는 의미보다는 조건을 만족하는 모든 경우에 제시된 '작도법'으로 작도하여 그려낼 수 있음을 알려주어, 모든 경우에 대하여 대상이 존재함을 보여주는 것이다.『원론』에서의 작도는 존재함을 증명하는 수단이다.『원론』 1권 정리 22에서 삼각형의 존재성을 보여줄 때에도 삼각형이 존재하기 위한 길이조건인 diorism을 제시한 후 diorism을 만족하는 삼각형이 존재함을 작도함으로 증명한다. Diorism이 삼각형이 존재하기 위한 필요조건이라면 작도법은 그 충분조건이 된다(Knorr, 1983). 작도가 존재함을 증명하는 것은 자와 컴퍼스를 사용하여 도형을 그리는 것이『원론』의 공리와 밀접한 관계를 맺고 있기 때문이다.

『원론』에서 수학적 대상의 존재성은 유클리드 공리의 약속 안에서 허용되었다는 의미의 존재성이다. 즉 공리를 토대로 하여 증명되어야만 『원론』의 장 안에 들어올 수 있고, 존재한다. 『원론』외부의 대상이『원론』 안으로 들어올 수 있는 유일한 통로는 공리라고 할 수 있다. 즉 어떠한 수학적 대상이『원론』에서 존재한다는 것은 공리의 토대 위에, 그리고 공리만을 근거로 하여 증명되었다는 의미이다.

작도는 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것이다. 이 때 눈금 없는 자를 이용하여 그리는 것은 '모든 점에서 다른 모든 점으로 직선을 그을 수 있다'는 <공준1>과 '유한한 직선이 있으면, 그것을 얼마든지 길게 늘일 수 있다'는 <공준2>를 표상하는 것이다. 또한 컴퍼스를 이용하여 그리는 것은 '모든 점에서 모든 거리를 반지름으로 해서 원을 그릴 수 있다'는 <공준3>을 표상한다. 자와 컴퍼스는 이데아인 공리가『원론』의 장(場, field)안에서 구체적인 대상으로 존재할 수 있는 수단이 되어주는 것이다. 결국 자와 컴퍼스만을 사용하는 작도는 공리를『원론』의 구체적인 장 안에 들어가게 해주는 존재의 징검다리 역할을 한다. 따라서 어떠한 대상을 작도할 수 있다는 것은 공리에 근거하여 『원론』의 장 안에 들어와 존재한다는 것과 같은 의미이다. 그렇기 때문에『원론』에서는 대상의 존재성을 증명할 때 이를 작도할 수 있는 방법을 보여주는 것으로 마무리한다. 기하학적 대상의 존재성은 작도할 수 있음과 같은 의미이다.

라파엘로의「아테네학당」(1510-1511)[5]에서 유클리드는 컴퍼스로 작도를 하고 있는 모습으로 나타난다. 이는『유클리드 원론』의 본질이 작도임을 상징적으로 보여주는 것이다.『원론』은 이데아인 수학적 대상을 우리의 인식에 공리를 통해서 존재하게 하는 것이므로 이의 구체적인 도구인 자와 컴퍼스를 이용한 작도는『원론』의 핵심일 것이다.

『유클리드 원론』을 자세히 살펴보면 공준, 공리는 그림이 아닌 말로 나타내어지고 있다.『원

5) 르네상스의 걸작인 라파엘로의 「아테네 학당」(1510-1511) 은 밑변의 길이가 820cm 인 벽화로 바티칸 미술관 <서명실>에 있다.

론』의 정리도 모두 말로(언어로) 표현된다. 그림은 언어로 기술된『원론』의 하나의 표상이다. 유클리드는 언어로『원론』을 표현했지만 기하적인 이미지를 염두에 두었다고 여겨진다(Greenberg, 1974). 하나의 표상인 그림이『원론』의 전개에 도움이 되었음에는 분명하나, 후대에 발견된『원론』의 몇몇 논리적인 틈은 역설적으로 그림에 기인한 것으로 보인다.[6)]『원론』을 이루는 핵심적인 요소는 말로 나타내어지는 언어이고, 이의 한 구체적인 표상이 그림이다. 작도 역시 그 본질적인 의미인 공리가 핵심적인 요소이고, 이를 자와 컴퍼스로 그릴 수 있음은 공리를 나타내는 구체적인 표상이다. 표상은 어디까지나 그 본질과 함께 구현될 때 빛을 발한다. 그런데 이 표상이 그 본질을 잃고 표상만 남게 되면 의미없는 공허한 작업이 되고 말 것이다.

학교수학에서의 작도는 그 이면에 공리를 포함하여 수학적 대상의 존재성을 드러내는 도구로서의 역할을 하는 것임에도 불구하고 이 본질적인 의미를 찾기가 어렵다. 단지 자와 컴퍼스만을 이용하여 주어진 도형을 그려내는 기술적인 의미, 혹은 도구를 최소화한 흥미 있는 퀴즈 정도로 여겨지기도 한다. 작도를 그 행동만으로 보지 않고 그 이면에 있는 의미를 본다면 수학적 대상의 존재성을 나타내는 결정적인 단계로서 수학에서의 핵심적인 역할을 하는 것이라고 볼 수 있다. 이데아가 인식 내에 존재하도록 하는 징검다리 역할을 하는 것이 바로 작도이다. 따라서 작도는 학교수학에서 필수적인 역할을 하는 것이다. 공리의 효과적인 표상인 작도는 학교수학 수준에 맞으면서도 그 안에 공리의 주요한 의미를 품고 있으므로 수학의 핵심적인 아이디어인 존재성을 도입하는 좋은 수단이 될 수 있을 것이다.

4. 전개도와 존재성

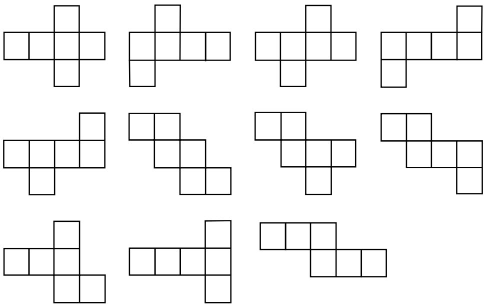
정다면체는 오직 다섯 개만 존재한다는 내용이 중학교 교과서에 제시되어 있다(김서령 외, 2013, pp.305-308; 정상권 외, 2013, pp. 238-239, 264). 정다면체가 다섯 개 존재하고 이것뿐임은『유클리드 원론』XIII권의 정리 13부터 마지막 정리인 정리 18에 이르기까지의 내용으로서『원론』의 최종적인 결론이라고 할 수 있다.『원론』XIII권에서 정다면체가 존재함은 각각의 정다면체를 구 안에 구체적으로 작도하여 보여주고 있다. 정다면체가 5개 뿐임은『원론』XIII권의 정리 18에 이어 기술되는 데 입체를 구성하기 위해서는 세 개 이상의 면이 있어야 하고 이 때 모인 각의 크기의 합이 네 직각 보다 작아야 한다는 원리를 이용한다. 즉, 정삼각형으로 구성할 수 있는 정다면체는 한 꼭지점에 정삼각형이 세 개 모여 있는 정사면체, 네 개 모여 있는 정팔면체, 다섯 개 모여 있는 정이십면체이고, 여섯 개 이상은 모일 수 없다. 정사각형으로 구성할 수 있는 정다면체는 한 꼭지점에 정사각형이 세 개 모여 있는 정육면체뿐으로 네 개 이상은 모일 수 없다. 정오각형으로 구성할 수 있는 정다면체는 한 꼭지점에 정오각형이 세 개 모여 있는 정십이면체뿐이다. 한편 한 꼭지점에 세 개의 정육각형이 모이면 각의 크기의 합이 네 직각이 되어 입체를 구성할 수 없으므로 이 밖의 정다면체는 존재하지 않는다. 이 때 다면체의 존재성과 전개도의 관련을 생각해 볼 수 있다.

전개도는 입체도형을 평면에 펼쳐놓은 그림으로 학생들이 입체를 머릿속에서 연상하기 어려울 때 이를 비교적 용이하게 이해할 수 있도록 한다. 특히 입체도형을 구성하는 면의 모양이나 성질, 각 다각형에서 모서리와 꼭짓점의 관계 등

6) 유클리드는『원론』의 첫 번째 정리인 정삼각형의 존재성을 보여준『원론』 I권 정리 1에서도 두 원의 교점이 존재함을 암묵적으로 가정했다.

에 관해서는 평면에 펼쳐놓은 전개도를 통하여 탐구하는 것이 더 쉬울 때가 있다.

그러나 다면체의 전개도가 유일하게 존재하지는 않는다. 한 다면체에도 여러 개의 전개도가 존재한다. [그림 III-3]과 같이 정육면체의 전개도는 11개가 존재한다.



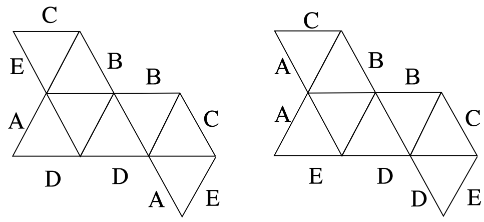
[그림 III-3] 정육면체의 전개도 (Buekenhout & Parker, 1998; Malkevitch, 2014)

Buekenhout와 Parker(1998)는 정다면체의 전개도의 개수를 <표 III-1>과 같이 정리하였다.

<표 III-1> 정다면체의 전개도의 개수

정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
2	11	11	43380	43380

하나의 다면체에 대한 전개도가 유일하지 않을 뿐만 아니라, 전개도에 대한 다면체도 유일하지 않다. [그림 III-3]와 같이 하나의 전개도에서도 서로 맞붙이는 모서리에 따라 다른 입체도형이 얻어질 수 있다(Malkevitch, 2014).



[그림 III-3] 하나의 전개도가 서로 다른 입체도형을 구성하는 예(Malkevitch, 2014)

사실 임의의 다면체에 대하여 그 전개도가 적어도 하나 존재하는지도 증명되어 있지 않다. Shephard(1975)는 모든 볼록 다면체는 면들이 서로 겹치지 않는 전개도를 갖는다는 conjecture를 발표했지만, 대부분의 수학자들이 사실이라고 믿고 있음에도 불구하고 아직 증명되지 않았다(Malkevitch, 2014).

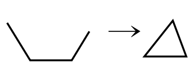
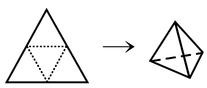
이렇듯 다면체와 그 대응하는 전개도에 대해서 서로 존재하는지, 유일한지는 단순하지 않은 문제이다. 그러나 어떠한 전개도가 일정한 조건을 만족하면 그에 대응하는 다면체가 존재한다는 사실은 Alexandrov's Theorem으로서 증명되어 있다. 그 내용은 간단히 어떤 전개도가 주어져 있어 이를 다면체로 만들 때 각각의 꼭지점에서의 각의 결손(defect)[7]의 합이 정확히 4π이면 이 전개도에 대응하는 다면체가 유일하게 존재한다는 정리이다(Alexandrov, 1950). 이것은 삼각형의 diorism인 세 선분의 길이 관계와 관련지어 생각해 볼 수 있다.

다면체의 존재성과 유일성에 대한 탐구는 Alexandrov 이전에 Cauchy로 거슬러 올라가고 그 이전에 유클리드로부터 유래한다. 유클리드는 『원론』에서 다면체의 존재를 직접 작도함으로 증명한다. Cauchy(1813)는 두 개의 삼차원 공간

7) 다면체의 꼭지점에서의 결손(defect)이란 꼭지점에 모인 모든 각의 크기를 2π에서 뺀 값이다. 예를 들면 정육면체의 한 꼭지점에서의 결손은 $2\pi - 3\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$이다.

에 있는 볼록다면체 P와 Q에 대하여, P의 표면으로부터 Q의 표면으로 연속적인 대응이 있어 각각의 면이 합동이면 P와 Q는 합동이라는 사실을 1813년에 발표했다. 코시정리는 볼록다면체는 면의 모양과 연결성에 따라 유일하게 결정된다는 것이다. Descartes는 볼록다면체의 각 꼭지점에서의 각의 결손의 모든 합은 정확히 4π[8] 임을 보였다. Alexandrov's Theorem은 그 역에 해당하는 것이다. Alexandrov는 볼록다면체가 유일하게 존재하기 위한 전개도의 조건을 보여주었고, 이 조건은 전개도가 다면체가 되기 위한 diorism이라 볼 수 있다. 이는 전개도가 입체도형을 구성하는 것을 세 선분이 diorism인 길이조건을 만족할 때 삼각형을 구성하는 것과 관련지어 생각해 볼 수 있다.

<표 III-2> Diorism과 관련된 삼각형과 볼록다면체의 존재성

	삼각형	볼록다면체
예		
Diorism	임의의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 길다	Alexandrov's Theorem에서의 조건
존재정리	<유클리드 원론의 I-22> 세 개의 선분이 주어져 두 선분의 길이의 합이 나머지 한 선분의 길이보다 항상 길면 이 세 선분으로 이루어진 삼각형이 존재한다.	<Alexandrov's Theorem> 어떠한 전개도가 주어져 있어 Alexandrov's Theorem의 조건을 만족하면 이에 대응하는 다면체가 존재한다.
역	<유클리드 원론의 I-20> 삼각형에서 두 변의 길이를 더하면 나머지 한 변보다 더 길다.	<Descartes의 다면체정리> 볼록다면체의 각 꼭지점에서의 각의 결손의 모든 합은 정확히 4π이다.
차원	세 선분(1차원)으로부터 삼각형(2차원)을 구성	전개도(2차원)로부터 다면체(3차원)를 구성

실제로 Alexandrov는 그의 책『Convex polyhedra』의 서문에서 다면체를 삼각형과 비교하며 다음과 같이 기술하였다.

> 이 책에서는 다면체를 결정짓는 요소가 무엇인지를 탐구하고자 한다. 나는 다면체의 구성요소가 다면체를 유일하게 결정짓는 것을 마치 세 선분이 삼각형을 유일하게 결정하는 것과 관련하여 살펴보고자 한다. ....(중략)....나는 볼록다면체가 존재하기 위한 필요충분조건을 찾고자 한다. 이것은 '세 변의 길이가 a,b,c인 삼각형이 존재하기 위한 필요충분조건은 세 개의 부등식 $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$을 모두 만족한다'는 것과 비슷한 맥락이다. 여기에서 필요조건은 상대적으로 쉬운 문제이기 때문에 충분조건을 찾는 것이 관건이 될 것이다. 따라서 나는 볼록다면체에 대한 존재정리, 즉 다면체를 결정짓는 조건에 대해 살펴보고자 한다. 이것은 특별한 조건을 만족하는 a,b,c가 삼각형을 결정하는 것에 대응하는 것이다(Alexandrov, 2005, p.1).

즉, 삼각형이 존재하기 위한 diorism이 세 변의 길이조건이었던 것처럼, Alexandrov's Theorem은 다면체가 존재하기 위한 diorism을 제시한 것이라 볼 수 있다.

Ⅳ. 논의 및 결론

『원론』에서의 존재성은 그 대상을 정의한다고 보장되는 것이 아니고 존재함을 증명함으로 보장된다. 이는 인간의 인식 밖에 이상적으로 존재하는 이데아를 논증을 통하여 인간의 인식 안에

8) $4\pi=2\pi\times2$(오일러표수) 인데 이것은 가우스 보네 정리(Gauss-Bonnet theorem)의 특별한 경우이다.

존재하도록 하는 것으로 볼 수 있다. 인간의 인식 안에 존재하는 조건을 주는 diorism은 이데아를 인간이 인식하도록 하는 징검다리라고 할 수 있다.

존재성은 수학적 사고의 주요 특징임에도 불구하고 수학교육현장에서는 존재성이 잘 드러나 있지 않다. 그러나 학교수학의 곳곳에는 존재성을 포함하는 내용이 들어 있다. 일례로 위에서 언급한 삼각형의 존재, 정다면체의 존재는 학교수학에서 가르쳐지는 것이다. 그 이면에 있는 수학적 내용 즉, 작도가『원론』의 공리를 구현한다는 사실이나 Alexandrov's Theorem등은 수학적 대상의 존재성에 대하여 더 깊이 숙고하게 해준다. 이러한 내용을 학교수학의 현장에서 직접 가르칠 필요는 없으나 수학교사들이 충분히 인지하고 있을 필요는 있다. 수학적 대상을 배우고 학습한다는 사실은 학생들이 수학적 대상을 개개인의 인지에 존재하게 한다는 것과 다름 없다. 따라서 수학의 교수학습 현장에서 수학적 대상의 존재성을 드러내는 것이 수학을 다루는 수학적 방법일 것이다. 이를 위해 수학교사들은 수학적 대상의 존재성에 대하여 더욱 구체적으로 알고 있을 필요가 있다. 이러한 교수학적 내용지식(Shulman, 1986)을 갖춘 교사는 수학교수학습 현장에서 수학적 대상의 존재성을 드러내어 가르칠 수 있을 것이다.

삼각형의 길이조건을 삼각형의 한 성질로 학습하는 것과는 달리 삼각형이 존재하는지, 삼각형이 존재하기 위해서는 어떠한 조건을 갖추어야 하는지를 다루는 것은 더욱 흥미있는 수학적 문제이다. 다섯 개의 정다면체의 구성요소에 대하여 학습하는 것에서 나아가 주어진 다섯 개의 정다면체 외에 다른 정다면체가 존재하는 지를 탐구하는 것은 존재성에 관련된 질문이다. 이렇듯 존재성에 관한 문제는 존재성에 관련된 질문으로부터 시작된다. "존재하는가?"의 질문을 던질 수 있는 것이 존재성 고민의 시작이 된다. 이홍우(1997, p.21)는 학문(學問)이 질문(問)을 배우는(學) 것이라고 하며 질문의 중요성을 강조했다. 어떠한 질문을 언제 하는지를 가르치는 것은 교육의 중요한 문제이다. 특별히 존재성의 문제는 당연히 존재한다고 무비판적으로 받아들이던 대상에 대해 "과연 존재하는가?"를 물어볼 때 시작하는 것이다. 따라서 학생들이 수학적 대상이 과연 존재하는지 질문하도록 하는 것이 주요한 목표가 되어야 하고 이를 위해 질문하기를 가르쳐야 할 것이다. 학생들은 질문하기를 교사가 질문하는 것을 보면서 배운다. 따라서 교사가 수업현장에서 존재성에 관한 적절한 질문을 제시할 때 비로소 학생들은 존재성을 고민하고, 동시에 질문하기를 배우는 것이다. 이러한 질문을 제시하는 것이 교사의 역할이다. 학교수학에는 존재성을 그 중심 아이디어로 하는 개념들이 많이 있다. 이는 존재성이 수학적 사고방법의 핵심적인 요소이기 때문이다. 따라서 존재성의 개념을 드러내어 가르치는 것이 수학적 사고방법에 부합하게 가르치는 것이다. 이 구체적인 방법 중 하나가 적절한 질문을 교사가 제시하는 것이다. 존재성을 밝히는 것은 애매한 내용을 더욱 분명히 하는 것이므로 존재성을 드러내어 가르친다면 학교수학의 내용이 더욱 명쾌하게 제시될 수 있을 것이다.

프로이덴탈(1971)은 이미 완성된 수학보다는 발생상태의 수학을 강조하고 있다. 학생들이 완성된 수학을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 수학이 만들어지는 과정의 사고를 경험하는 것이 학교현장에서 이루어져야 할 일이다. 수학을 만들어내는 과정에서 발견술적인 역할을 분석이 하고, 이를 정리하여 설명할 때 공리 논증적 방법으로 종합하여 기술한다. 이 때 분석의 결과로 diorism이 얻어진다. Diorism을 얻는 존재성은 분석의 주요 문제, 수학의 발생과정에서의

주요 사고과정이다. 따라서 학교수학에서도 존재성의 문제를 드러내어 가르쳐 학생들이 발생과정의 수학에서의 주요 사고과정을 경험하도록 해야 할 것이다. 이를 위해서 새로운 수학내용을 추가할 필요는 없다. 학교수학 내용 곳곳에 존재성의 개념이 내재되어 있으므로 이를 분명히 하는 것이 필요하다. 따라서 학교 수학과 관련하여 존재성에 대한 구체적인 연구가 있어야 할 것이다.

참고문헌

김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 김원, 김양수, 신지영, 김윤희, 노창균, 정혜윤, 주우진 (2013). **중학교 수학1**, 서울:천재교육.

이지현 (2011). 수학에서의 정의 개념 변화에 대한 철학적 분석. **한국수학사학회지, 24**(1), 63-73.

이홍우 (1997). **증보 지식의 구조와 교과**. 서울: 교육과학사.

임재훈 (2004). **플라톤의 수학교육철학**. 서울:경문사.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 강은주, 오화평 (2013). **중학교 수학1**, 서울:금성출판사.

한대희 (2003). 기하학을 모르는 자는 이곳에 들어오지 말라. **대한수학교육학회 2003년도 하계 수학교육학연구 발표대회 논문집**, 429-445.

Alexandrov, A. D. (2005). *Convex Polyhedra* (English translated by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze and A. B. Sossinsky). Berlin: Springer. (러시아어 초판은 1950년 출판. GTI, Moscow)

Barker, S. F. (1983). **수리철학** (이종권 역). 종로서적. (원저는 1964에 출판)

Buekenhout, F. & Parker, M. (1998). The Number of Nets of the Regular Convex Polyhedra in Dimension ≤ 4. *Discrete Mathematics, 186*, 69-94.

Cauchy, A. L. (1813). Recherche sur les Polyèdres - Premier Mémoire. *Journal de l'Ecole Polytechnique, 9*, 66–86.

Demaine, E. D., Demaine, M. L., Lubiw, A., & O'Rourke, J. (2003). Enumerating Foldings and Unfoldings between Polygons and Polytopes, Computational Geometry: *Theory and Applications, 24*(2), 51-62.

Eves, H. (1995). **수학의 기초와 기본개념** (허민 오혜영 역). 경문사. (원저는 1990에 출판)

Euclid, Heath, T. L. (1998). **기하학 원론** (이무현 역). 서울: 교우사.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*(3&4), 413-435.

Greenberg, M. J. (2007). **유클리드 기하학과 비유클리드 기하학** (이우영 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1974년 출판)

Hankel, H. (1874). *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter*, Teubner, Leipzig. (Reprinted : 1965, Olms, Hildesheim)

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of the Euclid's Elements with Introduction and Commentary*. New York: Dover Publications.

Heath, T. L. (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge.

Knorr, W. R. (1983). Construction as Existence Proof in Ancient Geometry. *Ancient Philosophy, 3*, 125-148. Mathesis Publications, Inc.

Knorr, W. R. (1986). *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Birkhäuser Boston.

Lakatos, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis, Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1996). **수학, 과학 그리고 인식론** (이

영애 역). 민음사. (영어원작은 1978에 출판)

Mahoney, M. S. (1968). Another Look at Greek Geometrical Analysis. *Archive for History of Exact Sciences, 5*, 318-348.

Malkevitch, J. (2014). *Nets : A Tool for Representing Polyhedra in Two Dimensions.* http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-nets (2015.04.15. 검색)

Quine, W. V. (1948). On What There Is. *The Review of Metaphysics, 2*(1), 21-38.

Saito, K. & Sidoli, N. (2010). The Function of Diorism in Ancient Greek Analysis. *Historia Mathematica, 37*, 579-614.

Shephard, G. C. (1975). Convex Polytopes with Convex Nets. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 78*, 389-403.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand : Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Zeuthen, H. G. (1896). Die Geometrische Construction als 'Existenzbeweis' in der Antiken Geometrie. *Mathematische Annalen, 47*, 222-228.

The Diorism in Proposition Ⅰ-22 of 『Euclid Elements』 and the Existence of Mathematical Objects

Ryou, Miyeong (Sillim High School)
Choi, Younggi (Seoul National University)

The existence of mathematical objects was considered through diorism which was used in ancient Greece as conditions for the existence of the solution of the problem. Proposition Ⅰ-22 of Euclid Elements has diorism for the existence of triangle. By discussing the diorism in Elements, ancient Greek mathematician proved the existence of defined object by postulates or theorems. Therefore, the existence of mathematical object is verifiability in the axiom system. From this perspective, construction is the main method to guarantee the existence in the Elements. Furthermore, we suggest some implications about the existence of mathematical objects in school mathematics.

* Key Words : existence(존재성), diorism, triangle(삼각형), postulate(공준), construction(작도)

논문접수 : 2015. 7. 9
논문수정 : 2015. 8. 10
심사완료 : 2015. 8. 10