

Likelihood Approximation of Diffusion Models through Approximating Brownian Bridge

Eun-kyung Lee^a · Songyong Sim^b · Yoon Dong Lee^{c,1}

^aDepartment of Statistics, Ewha Womans University;

^bDepartment of Finance & Information Statistics Hallym University;

^cSogang Business School, Sogang University

(Received June 2, 2015; Revised July 30, 2015; Accepted October 1, 2015)

Abstract

Diffusion is a mathematical tool to explain the fluctuation of financial assets and the movement of particles in a micro time scale. There are ongoing statistical trials to develop an estimation method for diffusion models based on likelihood. When we estimate diffusion models by applying the maximum likelihood estimation method on data observed at discrete time points, we need to know the transition density of the diffusion. In order to approximate the transition densities of diffusion models, we suggest the method to approximate the path integral of the random process with normal random variables, and compare the numerical properties of the method with other approximation methods.

Keywords: diffusion models, transition density, maximum likelihood estimator, Brownian bridge

1. 서론

확률편미분방정식의 형태로 표현되는 확산모형(diffusion model)은 시간변수가 연속성을 갖는 것으로 가정되는 모형이다. 이에 반하여 모형의 추정을 위하여 관측되는 자료는 그 관측시간 간격의 조밀성 여부와 관계없이 본질적으로 이산적일 수 밖에 없다. 즉, 확산모형을 가정하고 자료로부터 모형모수를 추정하는 것은, 이산시간적으로 관측된 자료를 이용하여 연속시간적으로 정의된 모형의 모수를 추정하는 경우에 해당한다. 이 경우는 모형에 대입되어야 할 관측경로 값 중 띄엄띄엄 관측되는 극히 일부의 값만을 제외하고 거의 대부분의 값들이 결측치인 경우에 해당한다. 그러므로 확산모형의 추정을 위하여 최대우도 추정법을 적용하기 위해서는 확산모형에 대한 전이확률 밀도함수를 알아야 한다.

이의 해결을 위하여 전이확률 밀도함수를 구하거나 근사하기 위한 다양한 연구들이 선행되었다. 관련된 주요 선행 연구로는 Pederson (1995), Kessler (1997), Shoji와 Ozaki (1998), Durham과 Gallant (2001), Elerian 등 (2001), Eraker (2001), Ait-Sahalia (2002), Egorov 등 (2003) 등의 연구가 있고, Hurn 등 (2007)에는 이 연구들에서 제안된 방법들에 대한 비교 연구가 제시되어 있다. 근래에는

Research of the third author was supported by the Sogang University Basic Research Supporting Grant of 2014.

¹Corresponding author: Sogang Business School, Sogang University, 1 SinSoo-Dong, Mapo-Gu, Seoul 121-742, Korea. E-mail: widylee@sogang.ac.kr

Beskos 등 (2006), Ait-Sahalia (2008), Lee 등 (2014) 등의 연구가 있다. 이 연구들 중 가장 주목 받는 연구인 Ait-Sahalia (2002)는 전이확률 밀도함수를 허미타다항식을 이용한 급수전개법으로 근사하는 방법을 제안하였고 이후 많은 다양한 연구들이 이로부터 파생되었다.

Flipović 등 (2013)은 Ait-Sahalia (2002)에서 제안한 허미타다항식을 이용한 전이확률 밀도함수의 급수전개법에서, 그 급수항의 일반식이 구해지지 않는다는 단점을 극복하기 위한 대안으로, 허미타다항식 대신 라게르다항식(Laguerre polynomial)을 이용한 급수근사법을 제안하고, 이를 이용하여 베이즈추정 방법을 적용하는 경우를 살펴보았다. 또한 Ait-Sahalia (2002, 2008), Chang과 Chen (2011), Li (2013), Flipović 등 (2013) 등의 연구에서는 명확한 증명 없이, Ait-Sahalia (2002)에서 제안한 허미타다항식을 이용한 급수전개법에서 급수항을 Δ 의 차수로 전개하게 된다면 Ait-Sahalia (1999)에서 제시된 Schrödinger 방정식의 급수해와 동일해지는 것으로 간주하여 왔다.

Lee 등 (2010)과 Lee 등 (2014)은 Ait-Sahalia (2002)에서 제안한 허미타다항식을 이용한 급수전개법에서 급수항의 일반식을 구체적으로 제시하고, 이로부터 급수항들을 관측시간간격 Δ 의 차수에 따라 배열하는 급수전개법을 제시하고 이를 델타확장법(delta expansion)이라 명명하였다. 결국 Lee 등 (2014)은 Ait-Sahalia (2002)가 제시한 허미타다항식을 이용한 확장법을 Δ 의 차수로 재배열 한다고 하더라도 그 결과는 Ait-Sahalia (1999)에서 제시된 Schrödinger 방정식의 급수해와는 전혀 다른 별개의 결과가 됨을 보인 것이다. Choi와 Lee (2013), Lee와 Lee (2013)은 델타확장법에서 얻어지는 전이확률 분포의 적률 값과 누울값을 이용하여 일반화적률추정법을 개선하는 방법, 정규분포 형태의 가우도를 설정하는 추정 방법을 살펴보았다.

Rogers (1985)와 Dacunha-Castelle와 Florens-Zmirou (1986)에서는 거사노프 정리(Girsanov theorem)를 이용하여 Fokker-Planck 방정식의 해를 구하는 방식으로, 확산모형의 전이확률 밀도함수를 브라운다리 확률과정의 함수의 형태로 표현하여 제시하였다. 본 논문에서는 이에 제시된 함수의 형태를 수리적으로 근사하는 방법을 제안하여, 전이확률 밀도함수에 대한 새로운 근사방법을 제안하고 그 성질을 살펴보게 된다. 다음 2절에서는 확산모형의 전이확률밀도 근사법과 관련된 기본적인 용어를 정의하고, 그 다음 제3절에서는 브라운다리(Brownian bridge) 확률과정을 근사하여 전이확률 밀도함수를 근사하는 방법을 제안한다. 제4절에서는 이 방법의 수치적 성질을 예를 들어 살펴보게 된다.

2. 확산모형과 전이확률 밀도함수

확산과정 X_t 는 확률편미분방정식

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (2.1)$$

에서 특정한 수리적 조건을 만족하는 다양한 추세계수 $\mu_t = \mu(t, X_t)$ 와 확산계수 $\sigma_t = \sigma(t, X_t)$ 에 따라 정의된다. 본 연구에서는 논의의 단순화를 위하여 추세계수와 확산계수가 $\mu_t = \mu(X_t)$ 이고 $\sigma_t = \sigma(X_t)$ 인 형태로, 시간변수 t 에 대하여 직접 영향을 받지 않는 이토확산과정(Itô diffusion process)을 중심으로 서술한다.

대표적인 확산모형으로는 Vasicek 모형, Cox-Ingersoll-Ross 모형, Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders 모형(CKLS 모형) 등이 있다. CKLS 모형은 다음 확률편미분방정식의 해로 정의된다.

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t. \quad (2.2)$$

특별히 $\gamma = 0$ 인 경우가 Vasicek 모형이고, $\gamma = 1/2$ 인 경우가 Cox-Ingersoll-Ross 모형(CIR 모형)이다. 또 $\beta = 0$ 이고 $\gamma = 1$ 인 경우는 기하브라운운동(Geometric Brownian Motion)에 해당한다. 이 외의 다양한 확산모형 등에 대하여는 Chan 등 (1992)에서 찾아볼 수 있다.

확률편미분방정식 (2.1)의 추세계수 μ_t 와 확산계수 σ_t 는 특정 모수들을 포함하는 형태로 정의된다. 예를 들어 CKLS 모형은 모수 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \gamma)$ 를 포함하고 있고, Vasicek 모형은 모수 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$ 를 포함하고 있다. 추세계수와 확산계수에 모형모수가 개입되어 있음을 명시적으로 나타내기 위하여 $\mu(\theta, \cdot)$ 혹은 $\sigma(\theta, \cdot)$ 와 같이 표현한다.

확산확률과정 X_t 는 극한적으로 짧은 시간사이의 동적관계를 규정하는 모형이다. 이에 반하여 실제에서 확산과정을 관측하여 자료를 얻는 경우, 관측 사이의 시간간격이 발생하게 된다. 즉, 확산과정을 관측하여 얻은 값을 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^n$ 이라 하면 관측시점 t_i 들은 이산적인 특성을 갖는다. 규칙적인 시간간격으로 관측이 이루어진 경우를 가정하면 $\Delta = (t_{i+1} - t_i)$ 이다. 결국 확산모형은 연속시간 모형인데 반하여, 관측되는 자료는 이산적인 시간간격으로 관측되는 것이므로, 관측시점 사이의 모든 값들이 결측치가 된다.

확산모형의 추정을 위하여 우도추정법이나 베イズ추정법을 적용하기 위하여는 가장 먼저, 관측시간간격 Δ 사이에 확산과정의 확률적 변화를 규정하는 전이확률밀도(transition density)를 구하여야 한다. 그러나 Vasicek 모형이나 CIR 모형과 같이 비교적 단순한 모형들의 경우를 제외하고는 확산모형의 전이확률밀도가 잘 알려져 있지 않고 간단한 형태로 주어지지 않는다. 때문에 보통 확산모형의 추정을 위하여는 우도추정법이나 베イズ추정법과 같은 확률밀도함수가 필요한 추정법 대신에, 오일러근사법이나 일반화적분법과 같은 확산모형에 특화되어 개발된 방법들이 주로 사용되어 왔고, 한편으로는 앞서 언급한 선행 연구들과서와 같이 확산모형의 전이확률밀도를 근사하기 위한 다양한 방법들이 연구되어 왔다.

전이확률밀도 $p^\Delta(x_0, x)$ 는, 확률과정이 $X_0 = x_0$ 인 조건으로부터 $X_\Delta = x$ 로 변화될 조건부 확률밀도를 의미한다. 즉,

$$\Pr(X_\Delta \in dx | X_0 = x_0) = p^\Delta(x_0, x)d\lambda(x)$$

이다. 여기서 $\lambda(\cdot)$ 는 르베그측도(Lebesgue measure)이다. 확산계수가 $\sigma(x)$ 와 같이 x 의 함수로 주어진 경우, $1/\sigma(u)$ 에 대한 부정적분으로 주어지는 Lamperti 변환,

$$h(x) = \int^x \frac{du}{\sigma(u)}$$

을 이용하여 정의되는 확산과정 $Y_t = h(X_t)$ 는 확산계수가 1인 단위확산과정이 된다. 즉,

$$dY_t = a(Y_t)dt + dW_t \quad (2.3)$$

이다. 여기서

$$a(h(x)) = \frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2} \sigma'(x) \quad (2.4)$$

이다. 이때 확산과정 X_t 에 대한 전이확률밀도 $p^\Delta(x_0, x)$ 와 변환된 단위 확산과정 Y_t 에 대한 전이확률밀도 $q^\Delta(y_0, y)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$p^\Delta(x_0, x) = \frac{q^\Delta(h(x_0), h(x))}{\sigma(x)} \quad (2.5)$$

때문에 단위확산과정 (2.3)의 전이확률밀도 $q^\Delta(y_0, y)$ 를 구할 수 있다면, 예외적인 경우 (Beskos 등, 2006)를 제외하고 원래의 확산과정의 전이확률밀도 $p^\Delta(x_0, x)$ 를 구할 수 있다.

Rogers (1985)와 Dacunha-Castelle와 Florens-Zmirou (1986)는 확산모형 (2.3)에 대한 전이확률밀도를 다음과 같이 제시하였다.

$$q^\Delta(y_0, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}}\right) \cdot e^{A(y) - A(y_0)} \cdot E\left[e^{-\frac{1}{2} \int_0^\Delta g(\tilde{W}_t) dt}\right], \quad (2.6)$$

여기서 $A(y) = \int_0^y a(v)dv$ 이고 $g(y) = a^2(y) + a'(y)$ 이며 $\phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률밀도이다. 또 브라운다리 확률과정 $\tilde{W}_t, t \in (0, \Delta)$ 는 $\tilde{W}_0 = y_0$ 이고 $\tilde{W}_\Delta = y$ 인 조건을 만족한다. 식 (2.6)을 이용하여 전이확률밀도를 구할 때의 가장 큰 어려움은 브라운다리 확률과정의 경로적분의 함수로 주어지는 값에 대한 기대치를 구해야 한다는 점이다. 결국 식 (2.6)에서 주어지는 기대치를 어떻게 구할 것인지 혹은 어떻게 근사할 것인지에 따라 전이확률 밀도함수 $q^\Delta(y_0, y)$ 를 구하기 위한 다양한 방법들이 제시된다.

3. 경로적분의 근사

식 (2.6)에서 주어진 브라운다리 확률과정에 대한 기대치를 일반적인 확산모형의 경우에 대하여 그 일반해를 구하는 문제는 매우 어려운 문제이다. 많은 연구들에서 이를 근사하기 위한 다양한 방법이 제시되었으나 모든 경우에 만족할만한 방법은 아직 제시되지 못하고 있다. 예외적으로 Vasicek 모형이나, CIR 모형, GBM 등 일부 경우들에 대하여는 그 기대값의 함수를 구할 수 있다. 잘 알려져 있는 Vasicek 모형의 전이확률 밀도함수로부터 역으로 정리하면

$$\begin{aligned} & E \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^\Delta (\tilde{W}_t - \beta)^2 dt \right\} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha\Delta}{1 - e^{-\alpha\Delta}}} \exp \left\{ c_1(\alpha, \Delta)(y - \beta)^2 - c_2(\alpha, \Delta)(y_0 - \beta)^2 - c_3(\alpha, \Delta)(y - \beta)(y_0 - \beta) - \frac{\alpha\Delta}{2} \right\}, \\ & c_1(\alpha, \Delta) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\Delta} - \frac{1}{2\Delta_\alpha}, \\ & c_2(\alpha, \Delta) = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\Delta} + \frac{(\alpha\Delta_\alpha - 1)^2}{2\Delta_\alpha}, \\ & c_3(\alpha, \Delta) = \frac{1}{\Delta} - \frac{(\alpha\Delta_\alpha - 1)}{\Delta_\alpha} \end{aligned}$$

임을 확인할 수 있다. 여기서 $\tilde{W}_t, t \in (0, \Delta)$ 는 $\tilde{W}_0 = y_0$ 이고 $\tilde{W}_\Delta = y$ 인 브라운다리 확률과정이고,

$$\Delta_\alpha = \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta})}{\alpha}, \quad \Delta_{2\alpha} = \frac{(1 - e^{-2\alpha\Delta})}{(2\alpha)}$$

이다.

일반적인 모형에 대하여 식 (2.6)에서의 기대값을 구하기 위하여, 먼저 브라운다리 확률과정의 경로를 근사하는 새로운 함수를 만들고 이를 이용하여 경로적분을 대체하는 방법을 고려할 필요가 있다. 이를 위하여 다양한 대안이 고려될 수 있으나, 여기에서는 이론적으로 잘 정리되어 있는 번스타인 다항식(Bernstein polynomial)을 이용하여 다음과 같이 브라운다리 확률과정에 대한 경로를 근사한다.

$$g_M(\tilde{W}_t^*) = \sum_{m=0}^M g\left(\tilde{W}_{\frac{\Delta m}{M}}\right) \binom{M}{m} \frac{t^m (\Delta - t)^{M-m}}{\Delta^M} \quad (3.1)$$

라 하면, 연속함수 $g(\cdot)$ 에 대하여

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \Delta]} |g_M(\tilde{W}_t^*) - g(\tilde{W}_t)| \rightarrow 0$$

와 같이 $g_M(\tilde{W}_t^*)$ 는 $g(\tilde{W}_t)$ 로 균등수렴 하고, $M \rightarrow \infty$ 일 때,

$$\int_0^\Delta g_M(\tilde{W}_t^*) dt \rightarrow \int_0^\Delta g(\tilde{W}_t) dt$$

이다. 이로부터 유계수렴정리에 따라, $M \rightarrow \infty$ 일 때,

$$E \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\Delta g_M(\tilde{W}_t^*) dt \right\} \right] \rightarrow E \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\Delta g(\tilde{W}_t) dt \right\} \right]$$

이다. 즉,

$$q_M^\Delta(y_0, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi \left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}} \right) \cdot e^{A(y) - A(y_0)} \cdot E \left[e^{-\frac{1}{2} \int_0^\Delta g_M(\tilde{W}_t^*) dt} \right] \quad (3.2)$$

이라 정의하면, $M \rightarrow \infty$ 일 때, $q_M^\Delta(y_0, y)$ 은 $q^\Delta(y_0, y)$ 으로 수렴한다.

다음에서는 일반적인 M 에 대한 $q_M^\Delta(y_0, y)$ 을 근사하는 방법을 찾기 위하여, M 이 크지 않은 경우에서, $q_M^\Delta(y_0, y)$ 이 어떻게 표현되고 어떻게 근사될 수 있는지를 살펴보기로 한다. 먼저 $M \leq 2$ 인 경우를 중심으로 살펴보고, 이를 일반적인 $M > 2$ 으로 확장하는 방법을 고려하기로 한다. 식 (3.2)에서 $M = 0$ 인 경우의 $q_0^\Delta(y_0, y)$ 는 다음과 같다.

$$q_0^\Delta(y_0, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi \left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}} \right) \cdot e^{A(y) - A(y_0)} \cdot \exp \left\{ -\frac{\Delta}{2} g(\tilde{W}) \right\},$$

여기서 \tilde{W} 는 \tilde{W}_t , $t \in [0, \Delta]$ 상의 임의의 값이다. \tilde{W} 의 값으로 y_0 혹은 y , $(y_0 + y)/2$ 등을 고려할 수 있다. $M = 1$ 인 경우는, 매우 간단하게

$$q_1^\Delta(y_0, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi \left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}} \right) \cdot e^{A(y) - A(y_0)} \cdot \exp \left\{ -\frac{\Delta}{4} (g(y_0) + g(y)) \right\}$$

임을 확인할 수 있다.

다음에서는 $M = 2$ 인 경우를 살펴보기로 하자. 위의 식 (3.1)에서 $M = 2$ 인 경우에 근사식 $g_2(\tilde{W}_t^*)$ 은, 세 개의 값 \tilde{W}_0 , $\tilde{W}_{\Delta/2}$ 그리고 \tilde{W}_Δ 를 통하여 근사된다. 이 때 경계값이 $\tilde{W}_0 = y_0$, $\tilde{W}_\Delta = y$ 로 주어져 있으므로 $\tilde{W}_{\Delta/2}$ 만 주어지면 $g_2(\tilde{W}_t^*)$ 가 결정된다. $\tilde{W}_{\Delta/2}$ 는, 경계값 $\tilde{W}_0 = y_0$ 이고 $\tilde{W}_\Delta = y$ 인 브라운다리 확률과정에서 $t = \Delta/2$ 일 때의 값으로

$$\tilde{W}_{\frac{\Delta}{2}} \sim \mathcal{N} \left(\frac{y_0 + y}{2}, \frac{\Delta}{4} \right)$$

와 같이 평균이 $(y_0 + y)/2$ 이고, 분산이 $\Delta/4$ 인 정규분포를 따른다. 이를 간단히 표현하여, 표준정규분포를 따르는 어떤 확률변수 Z 가 있다고 할 때,

$$\tilde{W}_{\frac{\Delta}{2}} = \frac{y_0 + y}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} Z$$

와 같이 표현할 수 있다. 식 (2.6)에서의 기대값에 $g(\tilde{W}_t)$ 대신 $g_2(\tilde{W}_t^*)$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$E \left[e^{-\frac{1}{2} \int_0^\Delta g_2(\tilde{W}_t^*) dt} \right] = \exp \left\{ -\frac{\Delta}{6} \{g(y_0) + g(y)\} \right\} \cdot E \left[\exp \left\{ -\frac{\Delta}{6} g \left(\tilde{W}_{\frac{\Delta}{2}} \right) \right\} \right]. \quad (3.3)$$

이때 $u_{\Delta/2} = (y_0 + y)/2$ 라고 하고, $g(\tilde{W}_{\Delta/2})$ 를 다음과 같이 확장하여 식 (3.3)에 대입하자.

$$g \left(u_{\frac{\Delta}{2}} + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) Z \right) = g \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} g' \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right) Z + \frac{\Delta}{8} g'' \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right) Z^2 + \dots \quad (3.4)$$

이때 Z 는 표준정규분포를 따르므로 다음과 같이 표현된다.

$$E \left[\exp \left\{ -\frac{\Delta}{6} g \left(\tilde{W}_{\frac{\Delta}{2}} \right) \right\} \right] \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{\Delta^2 g''(u_{\frac{\Delta}{2}})}{24} \right) z^2 + \left(\frac{\Delta^{\frac{3}{2}} g'(u_{\frac{\Delta}{2}})}{6} \right) z \right\} \right\} dz.$$

이로부터 식 (3.2)에 정의된 함수 $q_M^{\Delta}(y_0, y)$ 은, $M = 2$ 인 경우, 다음과 같이 정의된 $\tilde{q}_2^{\Delta}(y_0, y)$ 에 의하여 근사된다.

$$\begin{aligned} \tilde{q}_2^{\Delta}(y_0, y) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi \left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}} \right) \cdot e^{A(y) - A(y_0)} \cdot \sqrt{\frac{24}{24 + \Delta^2 g''(u_{\frac{\Delta}{2}})}} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \frac{\Delta}{6} \left[\frac{\Delta^2 (g'(u_{\frac{\Delta}{2}}))^2}{48 + 2\Delta^2 g''(u_{\frac{\Delta}{2}})} - (g(y_0) + g(u_{\frac{\Delta}{2}}) + g(y)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

여기서 $u_{\Delta/2} = (y_0 + y)/2$, $A(y) = \int_0^y a(v)dv$ 이고 $g(y) = a^2(y) + a'(y)$ 이며 $\phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률밀도함수이다.

이를 일반적인 $M \geq 3$ 인 경우로 확장하기 위해서는, 시점 $t_m = m\Delta/M$, $m = 1, \dots, (M - 1)$ 에서의 브라운다리 확률과정의 값 $\tilde{\mathbf{W}}_M = (\tilde{W}_{t_1}, \dots, \tilde{W}_{t_{(M-1)}})^t$ 의 결합분포를 브라운다리 확률과정의 특성에 따라 다음과 같이 설정해야 한다.

$$\tilde{\mathbf{W}}_M = \mathbf{u}_M + V_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M,$$

여기서 \mathbf{u}_M 는 $u_{t_m} = ((M - m)y_0 + my)/M$ 으로 이루어진 열벡터이고, \mathbf{Z}_M 는 $(M - 1)$ 개의 표준정규분포를 따르는 서로 독립인 확률변수 Z_m , $m = 1, \dots, (M - 1)$ 으로 이루어진 열벡터이다. 또 행렬 V_M 은 m_1 행 m_2 열에

$$v_{m_1, m_2} = \frac{\Delta}{M^2} \min(m_1, m_2) (M - \max(m_1, m_2))$$

를 원소로 갖는 $(M - 1) \times (M - 1)$ 대칭행렬이다.

여기에서 식 (3.4)와 동일한 방법을 적용하면,

$$\frac{\Delta}{M+1} \sum_{m=0}^M g \left(\tilde{W}_{\frac{m\Delta}{M}} \right) = \frac{\Delta}{M+1} \sum_{m=0}^M g \left(u_{\frac{m\Delta}{M}} \right) + 2\mathbf{d}'_M V_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M + \mathbf{Z}'_M V_M^{\frac{1}{2}} D_M V_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M + \dots$$

이다. 여기서 \mathbf{d}_M 은 $(1/2)\Delta g'(u_{m\Delta/M})/(M + 1)$, $m = 1, \dots, (M - 1)$ 로 이루어진 열벡터이고, D_M 은 대각원소로 $(1/2)\Delta g''(u_{m\Delta/M})/(M + 1)$ 을 갖는 $(M - 1) \times (M - 1)$ 대각행렬이다. 계산을 단순화하기 위하여, D_M 의 대각원소를 $(1/2)\Delta g''(u_{\Delta/2})/(M + 1)$ 로 동일하게 잡고 이를 \tilde{D}_M 이라 하자. 또 V_M 의 대각원소만으로 구성된 대각행렬을 \tilde{V}_M 이라 하고, $\tilde{\mathbf{d}}_M$ 은 동일한 값 $(1/2)\Delta g'(u_{\Delta/2})/(M + 1)$, $m = 1, \dots, (M - 1)$ 로 구성된 열벡터라고 하자.

이로부터 일반적인 M 에 대하여 다음과 같이 $\tilde{q}_M^{\Delta}(y_0, y)$ 를 정의하여 $q^{\Delta}(y_0, y)$ 을 근사한다.

$$\begin{aligned} \tilde{q}_M^{\Delta}(y_0, y) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi \left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}} \right) \cdot \exp \left\{ A(y) - A(y_0) - \frac{\Delta}{2(M+1)} \sum_{m=0}^M g \left(u_{\frac{m\Delta}{M}} \right) \right\} \\ &\quad \cdot E \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(2\tilde{\mathbf{d}}'_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M + \mathbf{Z}'_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \tilde{D}_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

이때 \mathbf{Z}_M 은 $(M-1)$ -차원의 다변량 표준정규분포를 따르는 확률벡터이므로,

$$\begin{aligned} & E \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(2\tilde{\mathbf{d}}'_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M + \mathbf{Z}'_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \tilde{D}_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M \right) \right\} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{M-1}} (2\pi)^{-\frac{M-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[2\tilde{\mathbf{d}}'_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{z} + \mathbf{z}' \left(I + \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \tilde{D}_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{z} \right] \right\} d\mathbf{z} \end{aligned}$$

이다. 어떤 $k \times k$ 크기의 양정치 행렬 B 에 대한 다변량 가우스적분 공식은 다음과 같다.

$$\int_{\mathbb{R}^k} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (2\mathbf{b}'\mathbf{z} + \mathbf{z}'B\mathbf{z}) \right\} d\mathbf{z} = (2\pi)^{\frac{k}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\mathbf{b}'B^{-1}\mathbf{b}},$$

여기에 $B = I + \tilde{V}_M^{1/2} \tilde{D}_M \tilde{V}_M^{1/2}$ 과 $\mathbf{b} = \tilde{V}_M^{1/2} \tilde{\mathbf{d}}_M$ 을 대입하여, 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} & E \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(2\tilde{\mathbf{d}}'_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M + \mathbf{Z}'_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \tilde{D}_M \tilde{V}_M^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_M \right) \right\} \right] \\ &= |I + \tilde{V}_M \tilde{D}_M|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{d}}'_M \left(I + \tilde{V}_M \tilde{D}_M \right)^{-1} \tilde{V}_M \tilde{\mathbf{d}}_M \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

대각행렬의 $I + \tilde{V}_M \tilde{D}_M$ 의 행렬식은 다음과 같이 근사된다.

$$\begin{aligned} & \Pi_{m=1}^{M-1} \left[1 + \frac{\Delta^2}{2(M+1)} g'' \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right) \left(\frac{m}{M} \right) \left(\frac{M-m}{M} \right) \right] \\ &= 1 + \frac{\Delta^2}{2} g'' \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right) \cdot \frac{1}{M+1} \sum_{m=1}^{M-1} \left(\frac{m}{M} \right) \left(\frac{M-m}{M} \right) + \dots \approx 1 + \frac{\Delta^2}{12} g'' \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right). \end{aligned}$$

또 식 (3.6)에서 지수항은 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{d}}'_M \left(I + \tilde{V}_M \tilde{D}_M \right)^{-1} \tilde{V}_M \tilde{\mathbf{d}}_M = \frac{1}{M+1} \frac{\left(g' \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right) \right)^2}{24} \Delta^3 + \dots,$$

여기서 M 이 매우 커지는 경우를 고려하면,

$$\tilde{\mathbf{d}}'_M \left(I + \tilde{V}_M \tilde{D}_M \right)^{-1} \tilde{V}_M \tilde{\mathbf{d}}_M \rightarrow 0$$

이다.

이 때 추가로 고려할 사항은, 조건변수의 값 y_0 와 달리 분포변수의 값 y 는 단순히 그 값으로써의 의미 이외에도 근사되는 분포의 형태를 결정하는 역할을 하기 때문에 변수 y 는 가능한 조심스럽게 사용되어야 할 필요가 있다. 이러한 고려 하에서 $q^\Delta(y_0, y)$ 에 대한 여러 가지 대안들을 고려해 볼 수 있다. 다양한 대안들을 다음과 같이 $\tilde{q}_{(B,C)}^\Delta(y_0, y)$ 의 형태로 통합적으로 표현하기로 한다.

$$\tilde{q}_{(B,C)}^\Delta(y_0, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi \left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}} \right) \cdot \exp \left\{ A(y) - A(y_0) - \frac{\Delta}{2} B \right\} \cdot \sqrt{\frac{12}{12 + \Delta^2 C}},$$

여기에서 B 의 대안으로 다음과 같은 $B_0, B_{1/2}, B_1, B_u$ 을 고려할 수 있고, C 의 대안으로 다음과 같은 $C_0, C_{1/2}, C_1, C_u$ 을 고려할 수 있다.

$$\begin{aligned} B_0 &= g(y_0), & C_0 &= g''(y_0), \\ B_{\frac{1}{2}} &= \frac{g(y_0) + g(y)}{2}, & C_{\frac{1}{2}} &= \frac{g''(y_0) + g''(y)}{2}, \\ B_1 &= g(y), & C_1 &= g''(y), \\ B_u &= g \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right), & C_u &= g'' \left(u_{\frac{\Delta}{2}} \right), \end{aligned}$$

여기서 $(B_{1/2}, 0)$ 인 경우는 $q_1^\Delta(y_0, y)$ 과 동일하다. (B_0, C_0) 인 경우인 $\tilde{q}_{(B_0, C_0)}^\Delta(y_0, y)$ 는 다음과 같이, $(y - y_0)^2$ 항과 $A(y)$ 항 이외에 별도로 변수 y 가 개입되지 않는 형태가 된다.

$$\tilde{q}_{(B_0, C_0)}^\Delta(y_0, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi\left(\frac{y - y_0}{\sqrt{\Delta}}\right) \cdot \exp\left\{A(y) - A(y_0) - \frac{\Delta}{2}g(y_0)\right\} \cdot \sqrt{\frac{12}{12 + \Delta^2 g''(y_0)}},$$

B 와 C 에 대한 여러 가지 대안들을 (B_0, C_1) 과 같이 교차하여 구성할 수도 있으나, 논의의 단순화를 위하여 다음 절에서는 (B_0, C_0) , $(B_{1/2}, C_{1/2})$, (B_1, C_1) , (B_u, C_u) 를 중심으로 그 수치적 성질을 살펴보게 된다.

4. 수치적 비교

위에서 제시된 다양한 근사법들의 평가하기 위하여, Vasicek 모형과 CIR 모형을 중심으로 그 성능을 살펴보게 된다. 다른 확산모형들에 비하여, Vasicek 모형과 CIR 모형은 활용도가 높기도 하고 정확한 전이확률 밀도함수가 알려져 있기 때문에 그 근사법의 성능을 평가하는 연구들에서 자주 이용되는 모형이다. Vasicek 모형을 따르는 확산과정 X_t 의 추세계수와 확산계수는 각각 $\mu(\theta, x) = \alpha(\beta - x)$ 이고 $\sigma(\theta, x) = \sigma$ 이므로, Lamperti 변환을 통하여 얻게 되는 단위확산 Y_t 에 대한 추세계수는 $a(y) = (\alpha/\sigma)(\beta - x) = \alpha(\beta/\sigma - y)$ 이고, $a'(y) = -\alpha$ 이다. CIR 모형에서는 $\mu(\theta, x) = \alpha(\beta - x)$ 이고 $\sigma(\theta, x) = \sigma x^{1/2}$ 이므로, $y = 2\sqrt{x}/\sigma$ 이고, 이에 대한 단위 확산과정 Y_t 에서의 추세계수 $a(y)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a(y) &= \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) (\beta - x)x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\sigma x^{-\frac{1}{2}}, \\ a'(y) &= -\frac{1}{2} \left\{ \alpha + \left(\alpha\beta - \frac{1}{4}\sigma^2\right) x^{-1} \right\}, \\ a''(y) &= \frac{1}{2}\sigma \left(\alpha\beta - \frac{1}{4}\sigma^2\right) x^{-\frac{3}{2}}, \\ a'''(y) &= -\frac{3}{4}\sigma^2 \left(\alpha\beta - \frac{1}{4}\sigma^2\right) x^{-2}. \end{aligned}$$

수치적 비교 연구를 위해서 확산모형의 모수 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$ 는, Lee 등 (2014)에서와 동일하게, CIR 모형에서는 $\theta = (0.2, 0.08, 0.1)$ 인 경우를, Vasicek 모형에서는 $\theta = (0.5, 0.06, 0.3)$ 인 경우를 시험하였다. 관측시각의 간격은 $\Delta = 1/4$ 인 경우를 시험한다. 관련 연구들에서 월간단위 관측을 의미하는 $\Delta = 1/12$ 인 경우나, 주간단위 관측을 의미하는 $\Delta = 1/52$, 일일 관측을 의미하는 $\Delta = 1/300$ 의 경우 등도 고려되고 있기는 하나, 근사 방법의 차이를 가장 명확하게 볼 수 있는 대표적인 경우로 $\Delta = 1/4$ 인 경우를 대상으로 전이확률 밀도함수 근사방법들의 수치적 특성을 시험한다.

본 연구에서 고려한 여러 가지 근사함수들을, 오차항의 차수가 $O(\Delta^2)$ 이거나 $O(\Delta^{5/2})$ 인 델타확장법과 비교하기로 한다. 확산과정에 대한 가장 단순한 근사법인 오일러 근사법의 경우 그 오차가 너무 커서 함께 비교하여 그림으로 제시하기 어려운 이유로 본 연구에서는 비교 대상에서 제외하기로 한다. 확산과정 X_t 에 대한 전이확률 밀도함수에 대한 근사함수 $\tilde{p}^\Delta(x_0, x)$ 는, 단위확산과정 Y_t 에 대한 전이확률 밀도함수의 근사함수 $\tilde{q}^\Delta(y_0, y)$ 를 식 (2.5)와 같이 변환하여 얻게 된다. 즉

$$\tilde{p}^\Delta(x_0, x) = \frac{\tilde{q}^\Delta(h(x_0), h(x))}{\sigma(x)}$$

이다. 이 때 사용되는 근사함수 $\tilde{q}^\Delta(y_0, y)$ 로는 $\tilde{q}_{(B_{1/2}, C_{1/2})}^\Delta(y_0, y)$ 와 $\tilde{q}_{(B_u, C_u)}^\Delta(y_0, y)$, 혹은 델타확장법에 서 얻어지는 근사함수 $\tilde{q}_\Delta^\Delta(y_0, y)$ 를 고려한다.

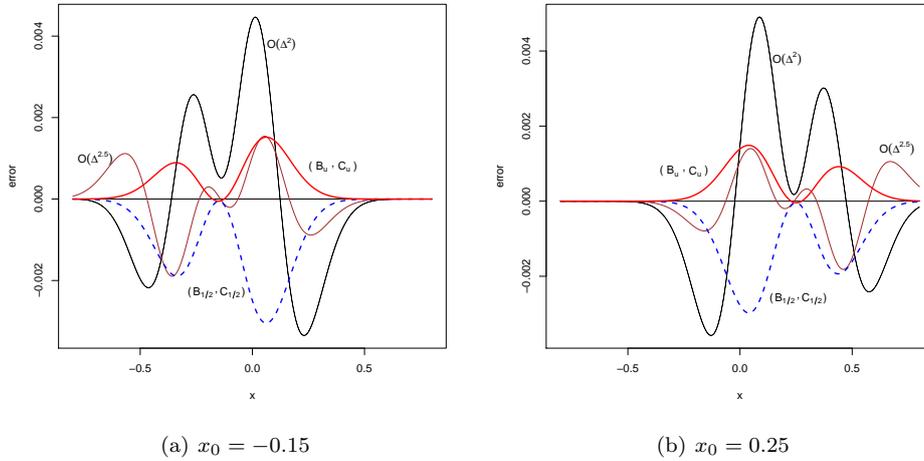


Figure 4.1. The pictures show the differences between the approximated values of the density functions, of the forward variable x , and the true values, when $\Delta = 1/4$ and $\theta = (0.5, 0.06, 0.3)$ for Vasicek model. For the backward variable x_0 , (a) for $x_0 = -0.15$, (b) for $x_0 = 0.25$. The thin dotted lines show the errors of the delta expansions of $O(\Delta^2)$ order. The thin solid lines show the errors of the delta expansions of $O(\Delta^{5/2})$ order. The thick dotted lines are for the cases of $(B_{1/2}, C_{1/2})$, and the thick solid lines for the case of (B_u, C_u) .

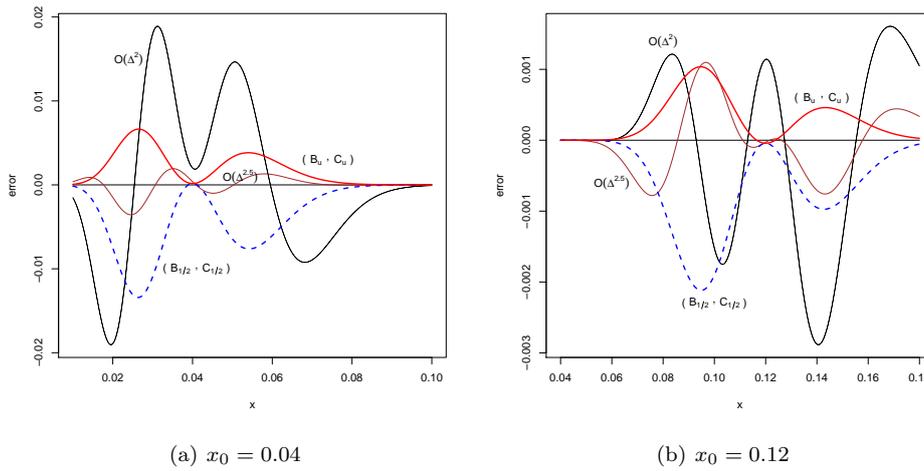


Figure 4.2. The pictures show the differences between the approximated values of the density functions, of the forward variable x , and the true values, when $\Delta = 1/4$ and $\theta = (0.2, 0.08, 0.1)$ for CIR model. For the backward variable x_0 , (a) for $x_0 = 0.04$, (b) for $x_0 = 0.12$. The thin dotted lines show the errors of the delta expansions of the $O(\Delta^2)$ order. The thin solid lines show the errors of the delta expansions of the $O(\Delta^{5/2})$ order. The thick dotted lines are for the cases of $(B_{1/2}, C_{1/2})$, and the thick solid lines for the case of (B_u, C_u) .

Vasicek 모형과 CIR 모형의 경우 정확한 전이확률 밀도함수가 알려져 있기 때문에

$$\text{error}(x_0, x) = \tilde{p}^\Delta(x_0, x) - p^\Delta(x_0, x)$$

와 같은 방법으로 근사함수에 대한 오차함수 $\text{error}(x_0, x)$ 를 구하여 비교하게 된다.

Figure 4.1은 Vasicek 모형에서의 오차함수를 비교한 것이고, Figure 4.2는 CIR 모형에서의 오차함수

를 비교한 것이다. x_0 값은 각 그림에서 각각 두 가지 경우들을 시험하였다. Figure 4.1에서는 $x_0 = -0.15$ 인 경우와 $x_0 = 0.25$ 인 경우에 대하여 x 값의 변화에 따라, 각 근사방법들이 보이는 $\text{error}(x_0, x)$ 값을 나타낸 것이다. Figure 4.2에서는 $x_0 = 0.04$ 인 경우와 $x_0 = 0.12$ 인 경우에 대하여 x 값의 변화에 따라, 각 근사방법들이 보이는 $\text{error}(x_0, x)$ 값을 나타낸 것이다. 수치적 시험에서 나타난 결과는 시험된 각 경우 모두 동일하게 (B_u, C_u) 인 경우와 델타확장법이 다른 방법들에 비하여 월등한 정확성을 보이고 있어서 다른 방법들에 비하여 매우 작은 오차함수를 갖게 되고, (B_0, C_0) 나 (B_1, C_1) 오일러 근사법은 다른 방법들과 비교가 불필요할 만큼 매우 큰 오차를 갖는 것으로 나타났다. 이런 이유로 오차함수 $\text{error}(x_0, x)$ 를 비교하기 위한 Figure 4.1과 Figure 4.2에서는, 오차항의 차수가 $O(\Delta^2)$ 혹은 $O(\Delta^{5/2})$ 인 델타확장법, 그리고 (B_u, C_u) 와 $(B_{1/2}, C_{1/2})$ 만을 대상으로 비교하였다. 시험된 모든 경우들에서 (B_u, C_u) 는 $O(\Delta^{5/2})$ 인 델타확장법의 경우와 비슷한 오차를 보여주고 있음을 확인할 수 있고, (B_u, C_u) 가 $(B_{1/2}, C_{1/2})$ 에 비하여 다소 우수한 성질을 보임을 확인할 수 있다.

5. 결론

확산모형은 시간 변수의 연속성을 가정하고 얻어지는 모형이다. 그에 반하여 확산모형의 추정을 위하여 사용되는 자료는 일정한 간격을 두고 이산 시간적으로 얻어지게 된다. 그러므로 확산모형에 대하여 최대우도추정법을 적용하기 위해서는, 이산적인 시간간격에 따라 확산과정의 확률적 성질의 변화를 설명하는 전이확률 밀도함수를 구해야 한다. 전이확률 밀도함수를 구하기 위한 여러 가지 시도가 이루어져 왔다.

본 연구에서는 연속시간 확률과정의 경로적분에 대한 기대치로 표현되는 전이확률 밀도함수를 수리적으로 근사하는 방법으로 브라운다리 확률과정의 경로적분 함수를 근사하여 전이확률 밀도함수를 근사하는 새로운 방법을 제안하고 그 성질을 살펴보았다. 두 배의 포텐셜함수(potential function)와 두 배의 포텐셜함수의 이차미분 함수를 이용하여 보다 개선된 근사값을 얻을 수 있음을 수치적인 방법으로 확인하였다. 특히 두 배의 포텐셜함수의 이차미분 함수 $g''(\cdot)$ 를 이용한 보정항은,

$$\sqrt{\frac{12}{12 + \Delta^2 g''\left(u_{\frac{\Delta}{2}}\right)}}$$

와 같은 형태로 표현될 수 있음을 살펴보았다.

본 연구에서 제시한 근사적 방법을 통하여 확산모형의 추정에 있어서 최대우도 추정법 혹은 근사적 최대우도 추정법을 적용할 수 있게 되고 정확도가 높은 모형 추정이 가능하게 될 것이다. 또한 확산모형에 대한 다양한 형태의 가설검정 방법의 개발 등에도 유용하게 사용될 것이고, 금융현상의 해석을 위한 방법론으로도 매우 중요한 역할을 하게 될 것이다.

References

- Ait-Sahalia, Y. (1999). Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions, *Journal of Finance*, **54**, 1361–1395.
- Ait-Sahalia, Y. (2002). Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions: A closed-form approximation approach, *Econometrica*, **70**, 223–262.
- Ait-Sahalia, Y. (2008). Closed-form likelihood expansions for multivariate diffusions, *The Annals of Statistics*, **36**, 906–937.
- Beskos, A., Papaspiliopoulos, O., Robert, G. O. and Fearnhead, P. (2006). Exact and computationally efficient likelihood-based estimation for discretely observed diffusion processes, *The Journal of the Royal Statistical Society, Series B.*, **68**, 333–383.

- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, **47**, 1209–1227.
- Chang, J. and Chen, S. X. (2011). On the approximate maximum likelihood estimation for diffusion processes, *The Annals of Statistics*, **39**, 2820–2851.
- Choi, Y. and Lee, Y. D. (2013). Improved generalized method of moment estimators to estimate diffusion models, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **26**, 767–783.
- Dacunha-Castelle, D. and Florens-Zmirou, D. (1986). Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations, *Stochastics*, **19**, 263–284.
- Durham, G. and Gallant, R. (2001). Numerical Techniques for Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Diffusion Processes, Technical report.
- Egorov, A. V., Li, H. and Xu, Y. (2003). Maximum likelihood estimation of time inhomogeneous diffusions, *Journal of Econometrics*, **114**, 107–139.
- Elerian, O., Chib, S. and Shephard, N. (2001). Likelihood inference for discretely observed nonlinear diffusions, *Econometrika*, **69**, 959–993.
- Eraker, B. (2001). MCMC analysis of diffusion models with application to finance, *Journal of Business & Economic Statistics*, **19**, 177–191.
- Filipović, D., Mayerhofer, E. and Schneider, P. (2013). Density approximations for multivariate affine jump-diffusion processes, *Journal of Econometrics*, **176**, 93–111.
- Hurn, A., Jeisman, J. and Lindsay, K. (2007). Seeing the wood for the trees: A critical evaluation of methods to estimate the parameters of stochastic differential equations, *Journal of Financial Econometrics*, **5**, 390–455.
- Kessler, M. (1997). Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 211–229.
- Lee, E., Choi, Y. and Lee, Y. D. (2010). A note on series approximation of transition density of diffusion processes, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **23**, 383–392.
- Lee, Y. D. and Lee, E. (2013). An approximation of the Cumulant generating functions of diffusion models and the Pseudo-likelihood estimation method, *Korean Journal of Management Science*, **38**, 201–216.
- Lee, Y. D., Song, S. and Lee, E. (2014). The delta expansion for the transition density of diffusion models, *Journal of Econometrics*, **178**, 694–705.
- Li, C. (2013). Maximum-likelihood estimation for diffusion processes via closed-form density expansions, *The Annals of Statistics*, **41**, 1350–1380.
- Pederson, A. R. (1995). A New Approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **22**, 55–71.
- Rogers, L. (1985). Smooth transitional densities for one-dimensional diffusions, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **17**, 157–161.
- Shoji, I. and Ozaki, T. (1998). Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method, *Stochastic Analysis and Applications*, **16**, 733–752.

브라운다리 근사를 통한 확산모형의 우도 근사법

이은경^a · 심송용^b · 이윤동^{c,1}

^a이화여자대학교 통계학과, ^b한림대학교 금융정보통계학과, ^c서강대학교 경영학부

(2015년 6월 2일 접수, 2015년 7월 30일 수정, 2015년 10월 1일 채택)

요약

확산모형은 입자의 운동현상과 금융자산의 미시적 가격변동을 설명하기 위하여 사용되는 수리적 모형이다. 확산모형의 추정방법에 관한 논의는 다양한 분야에서 이루어져 왔다. 통계학적 관점에서 우도적 방법에 기반한 확산모형의 추정방법을 개발하려는 시도가 계속되어 왔다. 이산시간 간격으로 관측된 자료를 이용하여 확산모형을 추정할 때 최대우도 추정법을 적용하기 위해서는 확산모형에 대한 전이확률 밀도함수를 구해야 한다. 본 연구에서는 확산모형의 전이확률밀도를 근사하기 위하여, 정규분포를 따르는 확률변수를 이용하여 브라운다리 확률과정에 대한 경로적분을 대체하는 방법을 제안하고, 그 수치적 성질을 다른 방법들과 비교한다.

주요용어: 확산모형, 전이확률 밀도함수, 최대우도추정법, 브라운다리

본 연구는 2014년도 서강대학교 교내연구비(기초연구)의 지원에 의하여 수행된 연구임 (제3저자).

¹교신저자: (121-742) 서울시 마포구 신수동 1번지, 서강대학교 경영학부. E-mail: widylee@sogang.ac.kr