

# 준 일차원 Euler 방정식의 전속도 유동해석을 위한 예조건화 수반변수 기법의 개발

이 형 로, 이 승 수\*  
인하대학교 항공우주공학과

## DEVELOPMENT OF A PRECONDITIONED ADJOINT METHOD FOR ALL-SPEED FLOW ANALYSES OF QUASI ONE-DIMENSIONAL EULER EQUATIONS

H.R. Lee and S. Lee\*  
Dept. of Aerospace Engineering, Inha Univ.

*In this study, preconditioned adjoint equations for the quasi one-dimensional Euler equations are developed, and their computational benefit at all speed is assessed numerically. The preconditioned adjoint equations are derived without any assumptions on the preconditioning matrix. The dissipation for Roe type numerical flux is also suggested to scale the dissipation term properly at low Mach numbers as well as at high Mach numbers. The new preconditioned method is validated against analytical solutions. The convergence characteristics over wide range of Mach numbers is evaluated. Finally, several inverse designs for the nozzle are conducted and the applicability of the method is demonstrated.*

**Key Words :** 전산유체역학(CFD), 수반변수법(Adjoint method), 예조건화(Precondition), 전속도 영역(All-speed Range), 준 1차원 노즐(Quasi 1-D Nozzle)

### 기호설명(Nomenclature)

- $E$  : total energy
- $\psi_{pre}$  : preconditioned adjoint values
- $W$  : conservative solution vector
- $X$  : modal matrix for Jacobian matrix,  $A$
- $\Lambda$  : spectrum matrix for Jacobian matrix,  $A$
- $X_{\Gamma}$  : modal matrix for Jacobian matrix,  $A_{\Gamma}$
- $\Lambda_{\Gamma}$  : spectrum matrix for Jacobian matrix,  $A_{\Gamma}$

### 1. 서 론

수반변수법은 설계변수의 수에 관계없이 한 번의 유동해석과 한 번의 수반변수해석을 통하여 설계변수에 대한 민감도

해석을 할 수 있어 다양한 최적화 분야에서 활용되고 있다. 공력설계분야에서도 수반변수법을 이용한 공력성능을 고려한 날개형상의 최적화가 많이 연구되고 있다[1-3]. 수반변수법을 해석하기 위한 해석자는 유동해석 해석자와 비슷한 복잡성을 필요로 하지만 계산 정확도와 계산 시간면에서 다른 민감도 해석법 비해 우수하기 때문에 많이 활용되고 있다. 이러한 수반변수법을 이용하여 정확한 민감도를 얻기 위해서는 유동해석의 정확성뿐만 아니라 수반변수해석의 정확성도 보장되어야 한다.

수반변수법에는 수반변수 방정식의 구성 방법에 따라 연속형(continuous)과 이산형(discrete)이 있다. 연속수반변수법을 사용하면 수반변수 값의 분포를 직접적으로 확인 할 수 있고, 유동해석자에서 사용가능한 다양한 수치기법을 적용할 수 있는 장점이 있다. 연속수반변수법에 대한 연구는 많은 연구자들이 통해 수행되었고 그 유용성이 확인되었다[1-3].

공력 민감도해석에 있어 수반변수법은 주로 천음속 영역에서의 공력특성 최적화에 적용되었다[3-4]. 그러나 저속유동과 고속 유동이 동시에 존재하는 고양력장치의 설계와 넓은 운용 속도범위를 가지는 항공기 설계에는 전속도 영역에서 수

Received: September 7, 2015, Revised: September 24, 2015, Accepted: September 25, 2015.

\* Corresponding author, E-mail: slee@inha.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2015.20.3.27>

© KSCFE 2015

렴성과 정확성이 보장되는 수반변수법이 필요하다.

연속수반변수 방정식은 유동 방정식으로부터 유도되기 때문에 저 마하수에서 발생하는 연속수반변수 방정식의 특성은 유동방정식에서 발생하는 특성과 동일하다. 즉, 마하수가 낮아질수록 특성조건수(characteristic condition number)가 증가되고 경직성(stiffness)의 문제가 발생하여 해의 수렴성이 저하된다. 유동해석이 있어서 이러한 수렴성 저하 문제를 해결하기 위해 다양한 예조건화 기법이 제안되었다[5-7]. 유동방정식과 동일하게 연속수반변수 방정식의 수렴성 문제도 예조건화를 적용하여 해결할 수 있다[9]. 예조건화된 유동 방정식을 활용하면 예조건화된 수반변수 방정식을 구성할 수 있으며 유동 방정식의 예조건화 행렬을 그대로 수반변수 방정식에도 활용할 수 있다.

Asouti et al.[9]은 Erriksson[7]의 예조건화 행렬을 이용하여 예조건화된 수반변수 방정식을 유도하였으며 저마하수 해석에서 수반변수의 수렴성이 향상되는 것을 보였다. 그러나 Asouti et al.[9]은 방정식을 구성할 때 예조건화행렬의 공간변화량을 고려하지 않았다. 공간변화량을 고려하지 않음으로써 저마하수에서 고유치의 크기를 조정하고자 했다. Asouti et al.[9]의 연구 후에 Boger and Paterson[10]은 다상유동에서의 형상최적화에 Asouti et al.[9]의 방법을 사용하였다. Boger and Paterson[10]의 연구에서도 Asouti et al.[9]이 사용한 가정을 적용하였다. 그러나 일반적인 예조건화 행렬은 유동변수 값들로 구성되기 때문에 공간변화량을 무시할 수 없다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저, Asouti et al.[9]이 사용한 예조건화 행렬의 가정이 준 일차원 문제에 대해 적절한가를 판단하였다. 준 일차원 노즐 문제는 Giles and Pierce[11]에 의해 제안된 해석해가 있어 많은 연구자들에 의해 수치해석의 정확도를 판단하는 기준으로 사용되어 왔다[12-15]. 다음으로 예조건화 행렬에 대한 아무런 가정을 사용하지 않고 예조건화된 연속수반변수 방정식을 유도하였다. 안정된 수치계산을 위해 저마하수를 포함한 전속도 영역 유동에 대해 수렴성을 향상시키기 위한 수치점성항을 유동방정식의 수치점성항과 유사한 방법으로 수정하여 사용하였다. 예조건화된 수반변수 수치기법을 통하여 Giles and Pierce[11]의 연구에 주어진 초음속에서 저마하수에 이르는 해석조건에 대한 해석을 수행하고 해석해와 비교하였다. 마지막으로 수반변수 값의 정확성을 비교한 후 사용된 수반변수법의 설계 적용성을 확인하기 위해 준 일차원 노즐의 역설계를 수행하였다.

## 2. 지배방정식

### 2.1 유동 방정식

준 일차원 노즐 유동의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\Gamma \frac{\partial S Q_p}{\partial t} + \frac{\partial S F}{\partial x} = \frac{dS}{dx} D \quad (1)$$

여기에서  $S$ 는 노즐의 단면적이다. 또한,  $\Gamma$ 는 예조건화행렬이며 본 연구에서는 Weiss and Smith[8]의 예조건화 행렬을 사용하였다.  $Q_p$ 는 원시형 유동변수 벡터(primitive solution vector)를,  $F$ 는 비점성 유속 벡터(inviscid flux vector)를,  $D$ 는 준일차원 가정에 의해 발생하는 원천항 벡터이다. 각각의 벡터는 식 (2)와 같다.

$$Q_p = \begin{bmatrix} p \\ u \\ T \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E+p)u \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기에서  $p$ 는 압력,  $u$ 는 속도,  $T$ 는 온도이다. 예조건화 행렬  $\Gamma$ 는 다음과 같다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & -\frac{\rho}{T} \\ \Theta u & \rho & -\frac{\rho u}{T} \\ \Theta H - 1 & \rho u & -\frac{\rho u^2}{2T} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\Theta = \left( \frac{1}{U_r^2} + \frac{1}{C_p T} \right) \quad (4)$$

$$U_r = \min \left( c, \max \left( |u|, K U_{cut}, \sqrt{\frac{|p - p_\infty|}{\rho}} \right) \right) \quad (5)$$

$$K = 0.5, \quad U_{cut} = \min(U_\infty, c_\infty) \quad (6)$$

여기에서  $p_\infty$ ,  $u_\infty$ ,  $c_\infty$ 는 각각 자유류의 압력, 속도, 음속을 나타낸다.

### 2.2 연속수반변수 방정식

준 일차원 노즐 문제에서 목적함수는 다음과 같이 주어진다.

$$I_c = \int_{x_1}^{x_2} i_c(q) dx \quad (7)$$

식 (7)에서  $x_1$ ,  $x_2$ 는 노즐의 입구와 출구의 위치를 나타내며  $q$ 는 유동변수를 의미한다. 정상상태의 준 일차원 노즐 방정식을 잔류치  $R$ 은 다음과 같다.

$$R = \Gamma^{-1} \frac{\partial SF}{\partial x} - \Gamma^{-1} \frac{dS}{dx} D \tag{8}$$

식 (7)과 (8)을 수반변수,  $\psi_{pre}$ 를 이용하여 결합하여 새로운 목적함수를 구성하면 식 (9)와 같다.

$$I = I_c + \int_{x_1}^{x_2} \psi_{pre}^T R dx \tag{9}$$

수반변수 방정식, 경계조건 및 민감도를 얻기 위해 식 (9)에 변분을 취하면 다음 같다.

$$I = \delta I_c + \int_{x_1}^{x_2} \psi_{pre}^T \delta R dx \tag{10}$$

식 (10)의 잔류치를 선형화하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta R = & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i_c}{\partial Q_p} \delta Q_p dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \psi_{pre}^T \left[ -\Gamma^{-1} \frac{\partial F \delta S}{\partial x} + \Gamma^{-1} D \delta \left( \frac{dS}{dx} \right) \right] dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \psi_{pre}^T \Gamma^{-1}}{\partial x} SAM + \psi_{pre}^T \Gamma^{-1} \frac{\partial D}{\partial Q_p} \frac{dS}{dx} \right) \delta Q_p dx \\ & - [S \psi_{pre}^T \Gamma^{-1} AM \delta Q_p]_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \tag{11}$$

식 (11)에서 자코비안  $A$ 와  $M$ 은 다음과 같이 정의 된다.

$$A = \frac{\partial F}{\partial W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma-3) \frac{u^2}{2} & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \frac{\gamma E u}{\rho} & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{3(\gamma-1)u^2}{2} & \gamma u \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$M = \frac{\partial W}{\partial Q_p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & 0 & -\frac{\rho}{T} \\ \frac{u}{T} & \rho & -\frac{\rho u}{T} \\ \frac{H}{T} - 1 & \rho u & -\frac{\rho u^2}{2T} \end{bmatrix} \tag{13}$$

여기에서  $W$ 는 보존형 유동변수 벡터이다. 또한  $E$ 는 전에너지이고,  $H$ 는 전엔탈피이다.

식 (11)의 첫 번째와 세 번째 항으로부터 수반변수 방정식을 구성할 수 있다. 수반변수 방정식은 다음과 같다.

$$SM^T A^T \frac{\partial \Gamma^{-T} \psi_{pre}}{\partial x} = -\frac{dS}{dx} \left( \frac{\partial D}{\partial Q_p} \right)^T \Gamma^{-T} \psi_{pre} - \frac{\partial i_c}{\partial Q_p} \tag{14}$$

경계조건은 식 (11)의 네 번째 항으로부터 얻을 수 있다.

$$[S \psi_{pre}^T \Gamma^{-1} AM \delta Q_p]_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{15}$$

입출구 경계조건은 특성치를 기반으로 한 경계조건을 적용하였으며 경계조건에 대한 상세한 내용은 Reference[11]에서 확인할 수 있다. 식 (11)에서 수반변수 방정식과 경계조건을 제거하여 민감도를 구성하면 식 (16)과 같다.

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \psi_{pre}^T \left[ -\Gamma^{-1} \frac{\partial F \delta S}{\partial x} + \Gamma^{-1} D \delta \left( \frac{dS}{dx} \right) \right] dx \tag{16}$$

민감도는 수반변수 방정식으로부터 수반변수를 구하면 수치 적분을 이용하여 쉽게 계산할 수 있다.

식 (14)에 주어진 수반변수 방정식에는  $\Gamma^{-T}$ 가 미분 안에 위치하기 때문에 방정식이 적절하게 예조건화가 되지 않는다. 이러한 이유로 Ascoti et al.[9]은  $\Gamma^{-T}$ 의 공간변화량이 없다는 가정을 사용하여  $\Gamma^{-T}$ 를 공간미분 밖으로 이동시켜 방정식을 예조건화 하였다. Ascoti et al.[9]의 연구에서는 2차원 문제에 대한 연구였지만 사용된 가정은 노즐 문제에도 동일하게 적용할 수 있으며 방정식은 다음과 같이 수정할 수 있다.

$$SA \Gamma^T \frac{\partial \psi_{pre}}{\partial x} = -\frac{dS}{dx} \left( \frac{\partial D}{\partial Q_p} \right)^T \Gamma^{-T} \psi_{pre} - \frac{\partial i_c}{\partial Q_p} \tag{17}$$

여기에서  $A^T = M^T A^T \Gamma^{-T}$ 이다. 이러한 수정은 유동 방정식과 같이 저 마하수 문제에서도 높은 수렴성을 보여 줄 수 있다[9]. 그러나 예조건화 행렬은 일반적으로 공간에 대한 변화량을 가지는 유동 변수들로 구성되어 있기 때문에 가정은 적절하지 못하다.

본 연구에서는 Ascoti et al.[9]의 방법과 달리 아무런 가정을 적용하지 않고 식 (17)에 시간 전진법 적용을 위한 시간항을 추가하고 노즐 면적을 수반변수와 결합한 다음의 방정식을 사용하였다.

$$\frac{\partial \bar{\psi}_{pre}}{\partial t} - SM^T A^T \frac{\partial \Gamma^{-T} \bar{\psi}_{pre}}{\partial x} = S_{\psi} \tag{18}$$

여기에서

$$\bar{\psi}_{pre} = S \psi_{pre} \tag{19}$$

$$S_\psi = \left( \frac{\partial i_c}{\partial Q_p} \right)^T + \frac{dS}{dx} \left( \frac{\partial D}{\partial Q_p} \right)^T \Gamma^{-T} \psi_{pre} - M^T A \Gamma^{-T} \psi_{pre} \quad (20)$$

식 (18)의 수반변수 방정식은 유동 방정식과 비슷한 형태를 지니고 있기 때문에 유동 방정식 해석에 사용한 다양한 수치 기법을 적용하여 해석할 수 있다.

### 2.3 수치해석 기법

수반변수 방정식은 유한체적법을 이용하여 공간차분을 수행하였다. 식 (18)을 그 크기가 작은 computational cell에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\int \frac{\partial \bar{\psi}_{pre}}{\partial t} dx - \int S M^T A^T \frac{\partial \Gamma^{-T} \bar{\psi}_{pre}}{\partial x} dx = \int S_\psi dx \quad (21)$$

Computational cell이 매우 작기 때문에 식 (22)와 같은 준 이산화 방정식을 구성할 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{\psi}_\Gamma}{\partial t} + R = 0 \quad (22)$$

$$R = -\frac{1}{\Delta x_i} \{ (\hat{F}_\psi)_{i+1/2} - (\hat{F}_\psi)_{i-1/2} \} - (S_\psi)_i \quad (23)$$

수치유량 벡터,  $(\hat{F}_\psi)_{i+1/2}$ , 는 Roe의 근사 리만해[16]를 이용하여서 계산하였으며 다음과 같다.

$$(\hat{F}_\psi)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} M_i^T [A_i^T \{ (\bar{\psi}_\Gamma)_R + (\bar{\psi}_\Gamma)_L \} + |A_{i+1/2}^T| \Delta \bar{\psi}_\Gamma] \quad (24)$$

여기에서  $\bar{\psi}_\Gamma = \Gamma^{-T} \bar{\psi}_{pre}$  를 의미하며 수치점성향에 나타나는  $|A_{i+1/2}^T| = X^{-T} |A| X^T$  이다. 식 (24)로 주어진 수치점성향의 고유치는 저 마하수에서 적절하게 그 크기가 조절되지 못한다. 따라서 수치점성향을 적절하게 예조건화를 해야만 저마하수에서 높은 수렴성을 얻을 수가 있다. 수치점성향을 예조건화하기 위하여 유동 방정식의 수치점성향을 수정하는 방법[8]과 유사하게 다음과 같이 수정하였다.

$$\begin{aligned} & |A^T| \Delta \bar{\psi}_\Gamma \\ & \simeq A^T \Delta \bar{\psi}_\Gamma \\ & = M^{-T} M^T A^T \Gamma^{-T} \Gamma^T \Delta \bar{\psi}_\Gamma \\ & = M^{-T} A^T \Gamma^T \Delta \bar{\psi}_\Gamma \\ & \simeq M^{-T} |A_\Gamma^T| \Gamma^T \Delta \bar{\psi}_\Gamma \end{aligned} \quad (25)$$

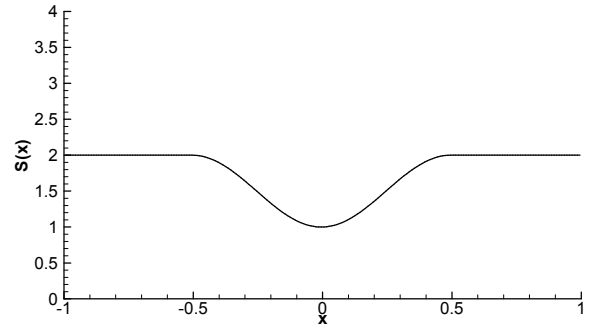


Fig. 1 Nozzle geometry

여기에서  $A_\Gamma^T = M^T A^T \Gamma^{-T}$  이고,  $|A_\Gamma^T| = X_\Gamma^{-T} |A_\Gamma| X_\Gamma^T$  이다. 이를 통하여 고유치는 저 마하수에서 적절히 그 크기가 조절되고 특성조건수는 감소되어 높은 수렴성을 얻을 수 있다. 수정된 수치점성향을 적용하여 수치유량 벡터를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (\hat{F}_\psi)_{i+1/2} \\ & = \frac{1}{2} M_i^T [A_i^T \{ (\bar{\psi}_\Gamma)_R + (\bar{\psi}_\Gamma)_L \} + M^{-1} |A_{\Gamma,i+1/2}^T| \Gamma^T \Delta \bar{\psi}_\Gamma] \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)으로 주어진 수치유량 벡터는 예조건화 행렬에 대한 Ascoti et al.[9]의 가정이 적용되지 않았을 뿐만 아니라 저 마하수에서 적절히 예조건화된 것이다. 식 (26)에서 경계면 전후의 값인  $(\bar{\psi}_\Gamma)_R$  과  $(\bar{\psi}_\Gamma)_L$  은 이차의 공간이산화를 위하여 MUSCL extrapolation을 적용하여 계산되었다. 이때 유동해석과 달리 수반변수의 충격파가 없기 때문에 수반변수해석에는 limiter를 적용하지 않았다. 또한, 식 (22)의 시간 적분은 AF-ADI[16]를 이용하여 수행되었다.

## 3. 수치해석 결과

### 3.1 노즐의 형상 및 해석 조건

해석에 사용된 노즐 형상은 Giles and Pierce[11]의 연구에서 사용된 것과 동일하며 식 (27)과 같이 주어진다. 형상은 Fig. 1과 같다.

$$S(x) = \begin{cases} 2 & (-1 \leq x \leq -1/2) \\ 1 + \sin^2(\pi x) & (-1/2 \leq x \leq 1/2) \\ 2 & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (27)$$

해석조건은 초음속에서 아음속에 이르는 4가지이고 충격파가 존재하는 조건도 포함하고 있다. 계산에 사용된 노즐의 입출

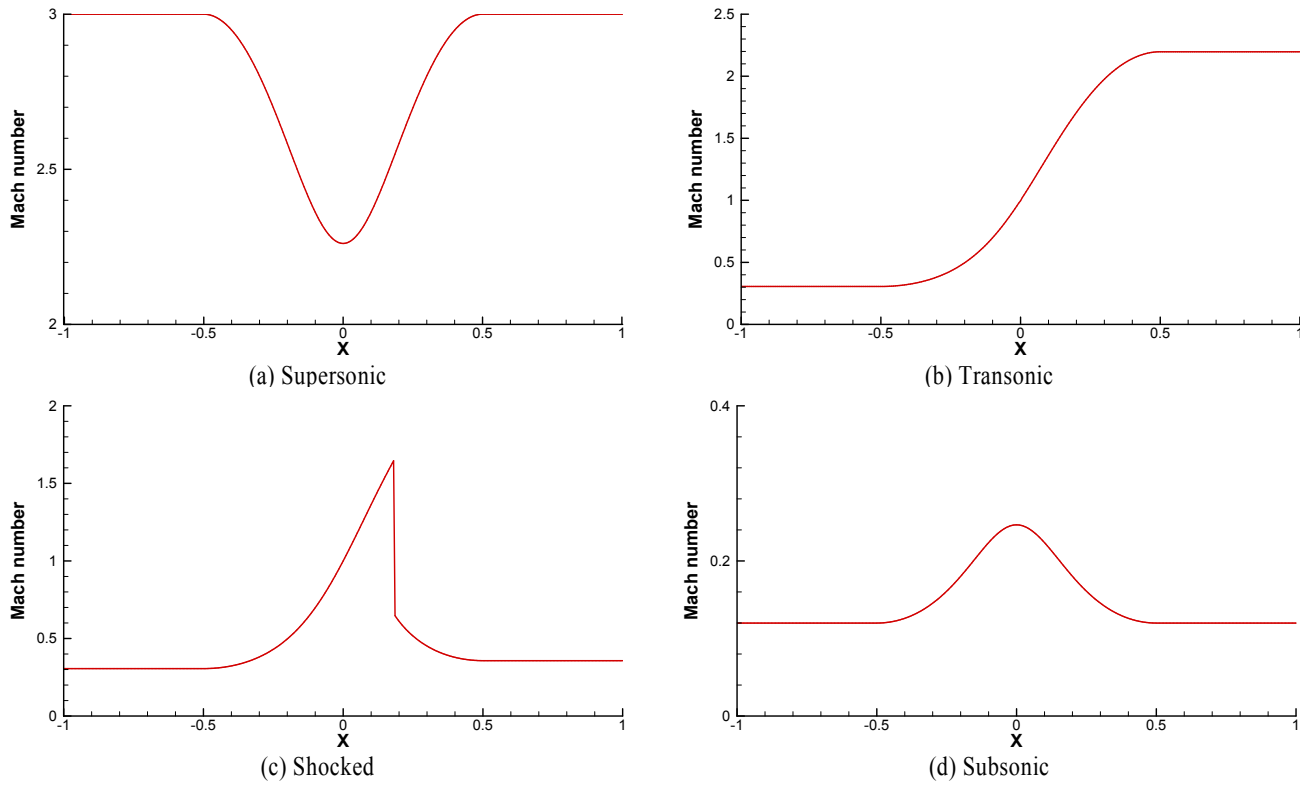


Fig. 2 Exact flow mach number for 1-D nozzle

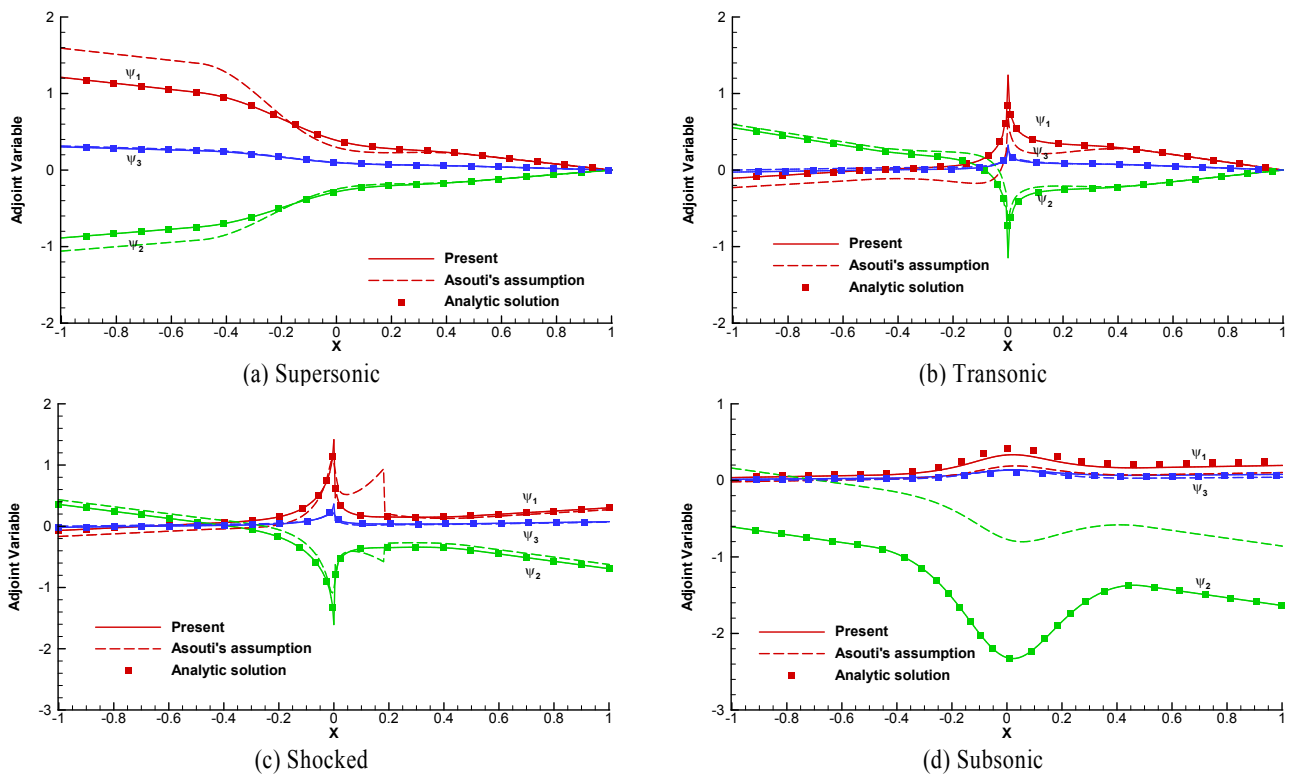


Fig. 3 Adjoint solutions for 1-D nozzle problem

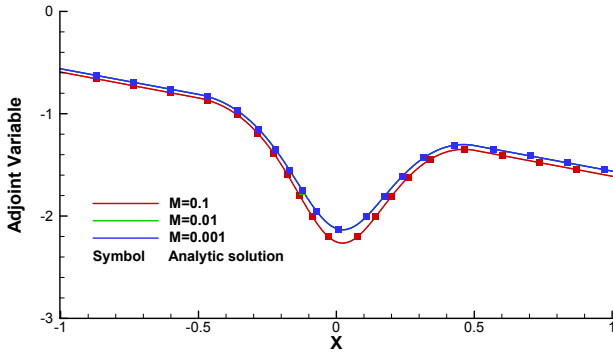


Fig. 4 Second adjoint solutions in terms of Mach numbers

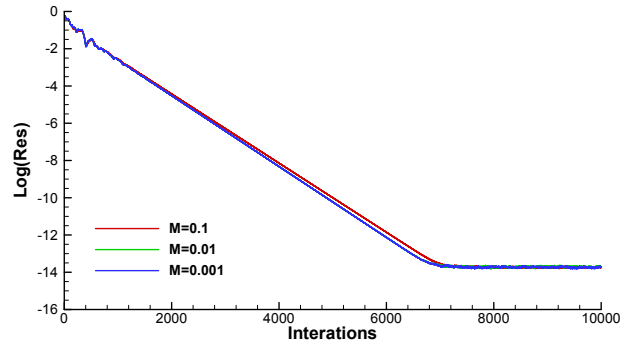


Fig. 5 Residual Convergence history at low Mach numbers

구 조건을 Table 1에 나타내었다.

### 3.2 수반변수 해석 결과

수반변수 해석을 위해 목적함수는 Giles and Pierce[11]의 연구에서와 같이 다음과 같이 설정하였다.

$$I_c = \int_{-1}^1 p dx \quad (28)$$

수반변수 해석에 있어서 수반변수 해석기법만의 정확성을 판별하기 위하여 유동해는 준 일차원 노즐에 대한 해석해를 사용하였다. 각 해석조건에 대해서 해석적으로 구한 마하수분포는 Fig. 2와 같다. Fig. 2(c)는 Shocked 해석조건에 대해서는 노즐 목 후방에 충격파가 존재한다는 것을 보여준다. 또한 Fig. 2(d)의 subsonic 조건에서의 입출구 마하수는 0.112이다.

수반변수 해석에는 균등한 간격의 격자점을 가지는 격자를 사용하였으며 격자수는 300개이다. Fig. 3에 그 결과를 나타내었다. 그림에는 Asouti의 가정을 적용한 해석결과도 비교를 위해 함께 나타내었다. 본 연구의 결과는 4가지 해석조건에 대하여 해석해와 잘 일치하고 있다. 특히, transonic 조건과 shocked 조건에서 나타나는 노즐 목에서의 수반변수의 특이점도 잘 묘사하는 것을 확인할 수 있다. Shocked 조건에서 충격파 부근의 해도 특별한 내부 경계조건 없이 잘 묘사하고 있다. 그러나 Asouti의 가정을 적용한 경우 모든 해석조건에 대해 해석해와 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 즉, 예조건화 행렬의 공간 변화량을 고려하지 않았기 때문에 발생하는 오

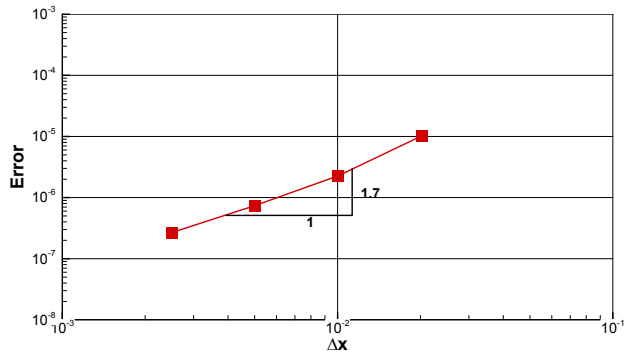


Fig. 6 Solution Convergence Test

차라는 것을 알 수 있다.

예조건화된 수반변수 방정식의 수렴성 향상을 평가하기 위하여 마하수를 변화시켜가며 해석을 수행하였다. 해석 마하수 M = 0.1, 0.01, 0.001 이다. Fig. 4와 같이 마하수가 낮아지더라도 해석해와 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 또한,  $\psi_2$ 의 값은 마하수가 낮아질수록 일정한 값으로 수렴하는 특성을 보였다. Fig. 5는 마하수에 따른 해의 수렴성을 나타낸다. 그림에서와 같이 마하수가 낮아지더라도 거의 동일한 수렴속도를 보이는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 6는 M = 0.1에 대한 첫 번째 수반변수의 해석해와의 오차를 격자 간격에 따라 나타낸 것이다. 오차는 다음과 같이 정의한다.

$$error = \frac{\sqrt{(\psi_1 - \psi_{exact,1})^2}}{N} \quad (29)$$

여기에서 N은 격자수를 나타낸다. Fig. 6와 같이 개발된 해석자는 격자 간격에 대하여 일정한 기울기를 보이며 그 기울기는 약 1.7이다. 따라서 사용된 예조건화된 수반변수 수치기법의 해가 해석해에 수렴함을 확인할 수 있다.

Table 1 Test conditions for 1-D nozzle problems

Test conditions	
Supersonic	$H_{in} = 3, H_{out} = 3, P_{0,in} = 2$
Isentropic transonic	$H_{in} = 0.3059, H_{out} = 4, P_{0,in} = 2$
Shocked	$H_{in} = 4, P_{0,in} = 2, P_{ex} = 1.6$
Subsonic	$H_{in} = 4, P_{0,in} = 2, P_{ex} = 1.98$

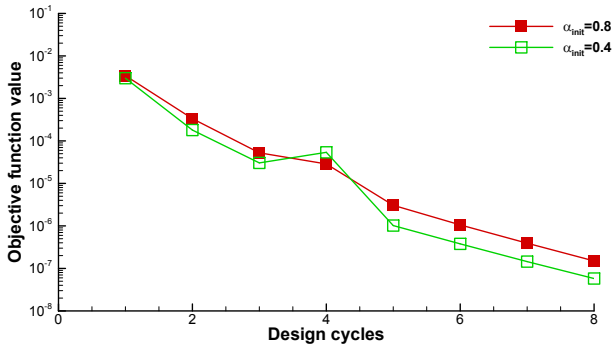


Fig. 7 Objective function convergence history of 1-D nozzle

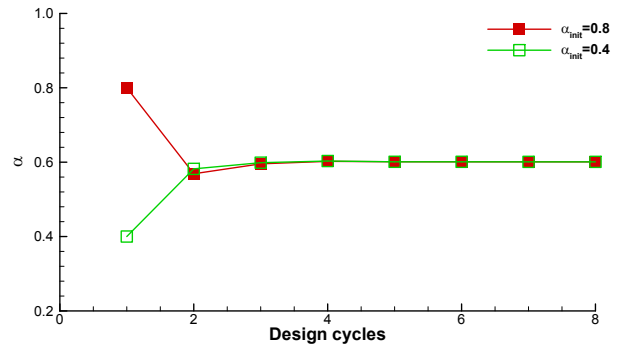


Fig. 8 Design variable convergence of 1-D nozzle

3.3 노즐의 역설계

예조건화된 수반변수 수치기법을 예조건화 수치기법을 노즐의 역설계(inverse design) 문제에 적용하여 그 유용성을 검증하였다. 역설계 문제는 노즐의 목적압력 분포가 정해졌을 때 그 압력 분포를 생성하는 형상을 역으로 찾아가는 과정을 말한다. 역설계를 통하여 개발된 수반변수법이 설계과정 중에 얼마나 정확한 민감도 정보를 제공하는지 확인할 수 있다. 역설계 문제에서 목적함수는 다음과 같다.

$$I_c = \frac{1}{2} \int_0^1 (p - p_d)^2 dx \tag{30}$$

여기에서  $p_d$ 는 목적압력 분포를 나타낸다. 역설계를 수행하기 위해  $\alpha$ 를 형상변수로 하는 다음의 노즐 형상을 고려하였다.

$$S(x; \alpha) = \alpha x^2 - \sqrt{0.8\alpha x} + 1, (0 \leq x \leq 1) \tag{31}$$

해석 조건은  $P_m = 10^5$  Pa,  $T_m = 10^4$  K,  $P_{ex} = 0.9247 \times 10^5$  Pa 이다. 역설계 문제의 상세한 내용은 Reference[13]을 통해 확인할 수 있다.

역설계를 위해 형상변수  $\alpha$ 는 계산된 민감도를 이용하여 1차 설계 기법인 steepest descent 방법을 적용하여 변화시켰다. 목적압력  $p_d$ 는  $\alpha = 0.6$ 에서의 값으로 설정하고 양방향에서 모두 목적압력 분포를 찾아가는지 확인하기 위해  $\alpha = 0.4, 0.6$ 을 초기값으로 설정하여 역설계를 수행하였다. Fig. 7은 설계과정 동안의 목적함수의 수렴성을 나타낸다. 두 초기 형상 변수에 대하여 8번의 설계과정을 통하여  $10^{-7}$ 의 목적함수 값을 얻을 수 있었다. Fig. 8은 설계과정 동안의 형상변수의 수렴성을 보여준다. 두 초기 값에 대해서 모두  $\alpha = 0.6$ 으로 수렴함으로써 역설계가 잘 수행되었음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 초음속에서 저 마하수에 이르는 유동 대해 적용 가능한 수반변수 방정식의 예조건화기법을 유동방정식의 예조건화기법으로부터 착안하여 적용하였다. 예조건화된 수반변수 방정식은 준 이산화 노즐 방정식을 기반으로 유도되었으며 예조건화 행렬에 대한 그 어떠한 가정도 적용하지 않았다. 또한, 수치유량 벡터의 수치점성항을 예조건화하기 위하여 새로운 수치유량을 적용하였다. 개발된 기법을 해석해가 존재하는 노즐 문제에 적용하여 그 정확성을 검증하였을 뿐만 아니라 매우 낮은 마하수 유동에 대해서도 높은 수렴성을 보이는 것을 확인하였다. 노즐의 역설계 문제를 해석하여 형상설계에도 적용할 수 있음을 보였다.

References

- [1] 1988, Jameson, A., "Aerodynamic Design via Control Theory," *Journal of Scientific Computing*, Vol.3, No.3, pp.233-260.
- [2] 1999, Anderson, W.K. and Venkatakrisnan, V., "Aerodynamic Design Optimization on Unstructured Grids with a Continuous Adjoint Formulation," *Computers & Fluids*, Vol.28, No.4, pp.443-480.
- [3] 2006, Lee, S.W. and Kwon, O.J., "Aerodynamic Shape Optimization of Hovering Rotor Blades in Transonic Flow Using Unstructured Meshes," *AIAA Journal*, Vol.44, No.8, pp.1816-1825.
- [4] 2012, Mader, C.A. and Martins, J., "Optimal Flying Wings: A Numerical Optimization Study," *53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*.
- [5] 1987, Turkel, E., "Preconditioned Methods for Solving the

- Incompressible and Low Speed Compressible Equations," *Journal of computational physics*, Vol.72 No.2, pp.277-298.
- [6] 1993, Choi, Y.H. and Merkle, C.A., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol.105, No.2, pp.207-223.
- [7] 1996, Eriksson, L.E., "A Preconditioned Navier-Stokes Solver for Low Mach Number Flows," *ECCOMAS computational fluid dynamics conference*.
- [8] 1995, Weiss, J.M. and Smith, W.A., "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows," *AIAA Journal*, Vol.33, No.11, pp.2050-2057.
- [9] 2007, Asouti, V.G., Zymaris, A.S., Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C., "Continuous and Discrete Adjoint Approaches for Aerodynamic Shape Optimization with Low Mach Number Preconditioning," *International journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.57, No.10, pp.1485-1504.
- [10] 2014, Boger, D.A. and Paterson, E.G., "A Continuous Adjoint Approach to Design Optimization in Cavitating Flow using a Barotropic Model," *Computer & Fluids*, Vol.101, pp.155-169.
- [11] 2001, Giles, M.B. and Pierce, N.A., "Analytic Adjoint Solutions for the Quasi-one-dimensional Euler Equations," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.426, pp.327-345.
- [12] 2009, Volpe, E.V. and de Castro Santos L.C., "Boundary and Internal Conditions for Adjoint Fluid-flow Problems," *Journal of Engineering Mathematics*, Vol.65, No.1, pp.1-24.
- [13] 2013, Thang, N., "Design Optimization of Quasi-One Dimensional Nozzle Using Adjoint Method," *Master Thesis*, Ulsan University Korea.
- [14] 2002, Xie, L., "Gradient-Based Optimum Aerodynamic Design Using Adjoint Methods," *Ph. D. Thesis*, Virginia Polytechnic Institute and State University, USA.
- [15] 2013, lozanorc, "Remarks on The Numerical Solution of the Adjoint Quasi-one-dimensional Euler Equations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.69, No.5, pp.1-23.
- [16] 1981, Roe, R.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vector and Difference Scheme," *Journal of Computational Physics*, Vol.43, No.2, pp.357-372.
- [17] 1982, Beam, R.M. and Warming, R.F., "Implicit Numerical Methods for the Compressible Navier Stokes and Euler Equations," *von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series*.

### 부 록 : modal matrix의 정의

자코비안  $A_T$ 에 대한 modal matrix와 modal matrix의 역행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$X_T = \begin{bmatrix} 0 & \beta u - \lambda_3 & \lambda_2 - \beta u \\ 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} \\ 1 & \frac{\gamma-1}{\gamma\rho}(\beta u - \lambda_3) & \frac{\gamma-1}{\gamma\rho}(\lambda_2 - \beta u) \end{bmatrix} \quad (A-1)$$

$$\beta = \frac{U_r^2}{c^2} \quad (A-2)$$

$A_T$ 의 고유치는 다음과 같다.

$$\lambda(A_T) = (u, u' + c', u' - c') \quad (A-3)$$

$$u' = \frac{1}{2}u(\beta+1), c' = \sqrt{\left\{\frac{u}{2}(\beta-1)\right\}^2 + U_r^2} \quad (A-4)$$