



위상학적 하중 재분배 방법을 이용한 부정정 트러스 구조 해석 Indeterminate Truss Structure Analysis using Topological Load Redistribution Method

최원* · 김한중**,†

Choi, Won · Kim, Hanjoong

Abstract

Traditional structure analysis method is based on numerical matrix analysis to use the geometries consisting of the structure. The characteristics require a lot of computer memories and computational time. To avoid these weaknesses, new approach to analyze truss structure was suggested by adopting topological load redistribution method. The axial forces to be not structurally analyzed yet against outside loads were redistributed by using nodal equation of equilibrium randomly at each node without constructing global matrix. However, this method could not calculate the axial forces if structure is statically indeterminate due to degree of many indeterminacies. Therefore, to apply the method suggested in this research, all redundancies of truss structure were replaced by unit loads. Each unit load could make the deformation of a whole structure, and a superposition method was finally adopted to solve the simultaneous equations. The axial forces and deflections agreed with the result of commercial software within the relative error of 1 %, whereas in the case that the axial forces are relatively very smaller than others, the relative errors were increased to 2 %. However, as the values were small enough not to be considered, it was practically useful as a structural analysis model. This model will be used for structural analysis of truss type of large structure such as agricultural farming facility.

Keywords: indeterminate truss structure analysis; topological load redistribution method; superposition method

1. 서 론

전통적 수치해석 방법론들은 구조물의 기하학적 형상, 물성치 및 경계조건을 이용하여 요소 강성도 행렬을 구성하고 전체 강성도 행렬로 조합하는 매트릭스 해석법을 시행한다. 매트릭스 해석법은 하중-변위 관계식에서 하중 또는 변위 중 어느 것을 미지수로 취하느냐에 따라 유연도법 (Flexibility Method)과 강성도법 (Stiffness Method)으로 구별된다 (Go et al., 1988). 강성도법에서는 변위를 미지수로 취하며, 외력과 내력의 관계 및 변위의 적합조건에 의해서 절점변위를 구하기 때문에 변위법 (Displacement Method)이라고 한다 (McCormac, 2010). 반면 유연도법은 부정정 반력이나 부정정 내력을 미지수로 취하는데, 부정정력을 선택하는 방법이 다양하기 때문에 컴퓨터 프로그래밍에 어려움이 있다. 따라서 매트릭스 해석법은 강성도법에 기초를 두고 있다.

그러나 자연계 상에서 발생하는 외력에 저항하는 구조물에 힘이 전달되는 과정은, 각각의 부재들 간에 발생하는 힘의 차이만큼 재분배 과정을 거치면서, 구조물의 평형을 찾아가는 단순한 법칙만이 존재할 뿐이다 (Rangan and Hall, 1984). 열의 전달이나 확산 문제도 서로간의 상호작용에 의한 물질의 재분배 과정만이 이루어지고 이로부터 평형을 찾아가는 반복과정을 거치게 된다. 특히, 구조형식들 중에서도 트러스 구조 시스템은 단면의 효율성이 높으며 무게가 가벼워 시공성이 우수하여 농업토목구조물에서는 대공간 시설물 및 트러스형 게이트 등에 주로 이용되고 있다 (Lee et al., 2011). 따라서 유연도법에 기초한 해석방법의 개발이 트러스 해석방법을 중심으로 시도되어왔다. Fuchs (1997)는 트러스 구조물을 해석하기 위하여 Topology에 기반한 객체 지향적 수치해석 방법을 제안하였다. Denke (1962), Robinson (1973), Topcu (1979)가 제안한 대수법 (Algebraic Method)을 기초로 Keneko et al. (2005)는 유연도법의 방법론을 제시하였다. Kaveh (2004)는 대수하중법 (Algebraic Force Method)을 이용한 트러스 구조해석 방법을 제안하였는데, 구조물의 경계조건 및 외부 하중에 대한 영향까지 고려하여 해석을 수행하였다. Lee, Chung, and Lee (2011)은 트러스 구조 해석에 있어서 기존의 유연도법을 특이값 분해로 정식화한 새로운 유연도법을 제안하였다. 다른 한편으로는 Topology 방법을 구조해석과 결합하려는 시도가 Han (2012)에 의해 진행되었으며, 구조해

* Postdoctoral Fellow, Department of Landscape Architecture and Rural Systems Engineering, Seoul National University

** Professor, Department of Bioresource and Rural System of Engineering, Hankyong National University

† Corresponding author

Tel.: +82-31-670-5135 Fax: +82-31-673-2704

E-mail: hanjoong@hknu.ac.kr

Received: September 3, 2015

Revised: October 20, 2015

Accepted: October 20, 2015

석 분야에서는 잘 적용되지 않았던 네트워크 이론을 이용하여 트러스 구조해석이 가능함을 보여 주었다. 하지만 다중 하중이 발생하는 등 구조물이 대형화 되거나 복잡해지면 계산을 할 수 없는 단점이 있다.

따라서 행렬기반 구조해석 방법인 매트릭스 해석법을 대체하기 위한 방법으로 Topology에 기반 한 2차원 트러스 구조해석 방법을 제안하고자 한다. 본 연구에서 제안하는 방법은 다중 하중이 작용하는 부정정구조물의 해석이 가능한 특징이 있다. 제안하는 등가 모델의 내부 구성 요소는 트러스 부재이기 때문에 트러스 절점의 평형 방정식을 이용하여 힘을 재분배하는 방식을 따랐으며, 구조물이 외적 부정정인 경우에는 그 구조물을 여러 개의 외적 정정 구조물로 분리하여 수행하였다. 따라서 외적부정정 구조물을 해석하는 문제는 구조물을 각각의 정정 구조물로 분리하고 각각의 구조물을 해석한 후 중첩의 원리를 이용하여 부재력을 계산해 나갔다. 이때 분리된 각각의 정정 구조물이 중첩되었을 경우 외적부정정 구조물과 동일한 거동을 보이기 위해서 부정정 구조물을 구성하는 여분의 지점에서의 변위 제한 조건식을 이용하였다.

II. 지배방정식

선형연립방정식을 풀기위한 수치해석 방법 중에서 대표적인 것으로 Gauss 소거법, Gauss Seidel 방법, Multigrid (다중격자) 방법 등이 있으며, 언급한 방법들은 행렬을 이용한 전통적인 구조해석 방법이다 (Ghaboussi, 1998). Gauss 소거법은 강성행렬을 단계적으로 삼각 형태로 축소시키는 방법으로 계산 양이, 미리 예측 가능한, 직접법 (Direct Method) 중의 하나이다 (Stroud and Booth, 2013). Gauss Seidel 방법은 처음에 예상되는 초기 값을 가정하고 이러한 초기 값이 반복적인 과정을 거침에 따라서, 예상되는 해에 근접하게 되는 방법으로, 간접법 (Indirect Method) 또는 반복법 (Iterative Method) 이라고 한다 (Kreyszig, 2010). 이러한 방법은 해가 수렴하는 수렴 조건을 만족할 때까지 반복하며 전에 구한 해와 다음에 구하는 해 사이에는 가중치 (Weighting Factor)라는 요소가 관여하게 되는데 이러한 가중치에 따라 해의 수렴도가 변하게 된다 (Peter, 2010).

일반적으로 행렬의 크기가 큰 경우에는 반복법이 직접법에 비하여 상당히 효율적인 것으로 알려져 있다 (Kreyszig, 2010). 물론 행렬의 크기가 작은 경우에는 직접법이 간접법보다 유리하나 보통 우리가 다루는 공학문제는 자유도가 무수히 많으므로 반복법에 의한다. 앞서 이야기한 수치해석 기법들은 순차적인 방법으로 문제를 해결해가는 처리 (Process) 중심의 방법으로, 실제 문제로부터 발생하는 방정식들의 계

(System)를 세워야 하기 때문에, 시간이 오래 걸리는 단점이 있다. 따라서 이러한 단점을 보완하기 위하여 다중 격자법이 개발되었다. 이 방법은 대용량의 계산을 효율적으로 수행하기 위하여 병렬 고속 처리 기법을 도입하였으며, 병렬로 방정식이 접근되기 때문에, 그 수렴속도가 시스템의 크기에 상관 없이 일정함을 유지하는 특징이 있다. 다중격자법은 레이어 (Layer)라는 개념을 도입했는데, 처음에 해에 접근하기 위해서는 듬성한 격자를 이용하고 하위 단계로 이동하면서 격자의 밀도를 증가시키며, 이 때 이용되는 격자를 레이어라 부른다. 따라서 다중의 레이어를 이용하여 해의 수렴도 및 해석시간을 기하급수적으로 단축시키는 방법이다. 또한 낮은 수렴성을 갖는 경우는 Conjugate Gradients (CG) 방법을 적용하여 계산을 하기도 한다 (Fokkema et al., 1996).

그러나 지금까지 열거했던 방법들은 결정론적 방법의 하나이고 처리 중심의 프로그램이기 때문에, 주어진 구조체를 강성행렬로 조립하는 작업이 필요하다. 또한 Fig. 1에서 알 수 있듯이, 예를 들어 파동방정식을 풀 때, 자유도의 개수에 따라 적합한 Solver를 결정하여야 하는데, 그러한 선택의 기준이 모호한 경우가 존재하고, 이 때는 사용자의 주관에 의지해야 하는 단점 등을 가지고 있다 (Ystrom, 2015). Table 1은 앞서 언급한 내용을 포함하여 현재 널리 쓰이는 있는 방법들에 대하여 요약하였다. 행과 열의 개수가 동일한 정방행렬 ($n-by-n$)의 해를 구하는데 소요되는 시간을 의미하는 복잡도 (연산회수)를 n 을 이용하여 나타내었다. 1차 선형 연립방정식을 풀기위한 가우스 소거법의 경우 복잡도는 n^3 인데 비해서, 다중 격자법의 경우는 n 으로 복잡도가 확연히 감소했음을 알 수 있다. 반면에 해를 풀기 위한 연산에 기본적으로 필요한 메모리의 크기는 가우스 소거법이 1.5승배 더 소요됨을 알 수 있다. 여기서 제시하는 복잡도는 이론적으로 계산된

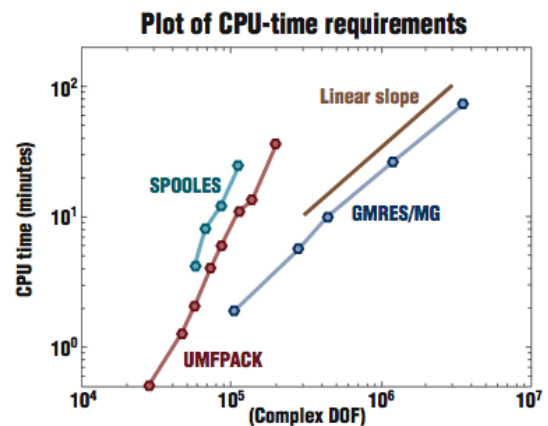


Fig. 1 CPU time to solve 3D wave equation depending on degree of freedom (Ystrom, 2015)

Table 1 Order of complexity of solving Poisson's equation on an $n \times n$ grid

Solver	Operation count	Storage requirement	Direct or Iterative
Gauss Elimination (GE)	n^3	$n^{1.5}$	D
Dense Cholesky	n^3	n^2	D
Explicit Inverse	n^2	n^2	D
Band Cholesky	n^2	$n^{3/2}$	D
Jacobi's	n^2	n	I
Gauss Seidel	n^2	n	I
Sparse Cholesky	$n^{3/2}$	$n \cdot \log n$	D
Conjugate Gradients (CG)	$n^{3/2}$	n	I
Successive Over-Relaxation (SOR)	$n^{3/2}$	n	I
Alternating Direction Implicit	$n^{1.5} \cdot (\ln n)^{1/2}$	n	I
SSOR with Chebyshev Accl.	$n^{5/4}$	n	I
Fast Fourier Transform (FFT)	$n \cdot \ln n$	n	D
Block Cyclic Reduction	$n \cdot \ln n$	n	D
Multigrid	n	n	I
Lower Bound	n	n	

값으로, 실제로는 사용자가 어떻게 프로그래밍을 하느냐에 따라 변동이 가능하다.

앞에서 언급한 방법론들은 행렬기반 수치해석 방법론으로 대규모 메모리의 할당과 반복해법을 적용하기 위한 수렴조건 등을 정의해야하는 등 절차 중심의 방법이다. 그러나 자연계 상에서 일어나는 모든 현상은 상호간에 물질의 차이가 발생한다면 그 차이를 서로 전달해주는 단순 과정의 반복으로 이해할 수 있을 것이다. 즉, 평형 방정식을 만족하는 관계에 의해서만 정의될 뿐이다. 따라서 본 연구는 행렬기반 수치해석 방법을 탈피한 새로운 수치해석 방법을 제안하고자 한다. 적용분야는 2차원 트러스 구조물의 해석으로 Topology 관계를 이용하여 구현해 보았으며, 기존 행렬기반의 수치해석 방법과의 해석량 비교도 진행하였다.

1. 절점 평형 방정식

트러스 요소로 정의된 구조물은 모든 절점에서 평형방정식을 만족해야 한다. 관심의 대상이 되는 특정한 트러스 요소의 축 방향에 대하여 local x로 정의하고 local x 방향으로 평형방정식을 적용하면 다음 Fig. 2와 같다.

$$\sum F_x = F_1 \cos(\theta_1) + F_2 \cos(\theta_2) + F_3 \cos(\theta_3) = 0 \quad (1)$$

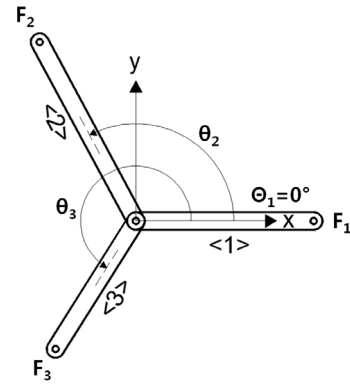


Fig. 2 Topology truss model

위의 식에서 θ_1 은 0이 되기 때문에 F_1 에 대하여 전개하면 다음과 같다.

$$F_1 = -F_2 \cos \theta_2 - F_3 \cos \theta_3 \quad (2)$$

위의 관계식에서 x축에 놓여있는 트러스 부재에 작용하는 힘을 F_x 로 정의하고 F_x 와 공유하는 트러스 부재의 개수를 N-1이라 가정하면 일반적으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$F_x = -\sum_{n=1}^{N-1} F_n \cos \theta_n \quad (3)$$

위의 식을 이용하여 임의의 트러스 요소에 작용하는 힘을 노드별로 재분배 할 수 있다. 그러나 만약 트러스 요소들의 탄성계수나 단면적이 각각 다르다면 위의 식을 적용할 수 없게 된다. 따라서 식 3을 단면적, 탄성계수, 변형률을 이용하여 다시 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum F_x = \frac{A_1 E_1}{l_1} \Delta l_1 \cos(\theta_1) + \frac{A_2 E_2}{l_2} \Delta l_2 \cos(\theta_2) + \frac{A_3 E_3}{l_3} \Delta l_3 \cos(\theta_3) = 0 \quad (4)$$

위의 식에서 θ_1 은 x축과 이루는 각으로 0°이기 때문에 Δl_1 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta l_1 = -\frac{l_1}{A_1 E_1} \left\{ \frac{A_2 E_2}{l_2} \Delta l_2 \cos(\theta_2) + \frac{A_3 E_3}{l_3} \Delta l_3 \cos(\theta_3) \right\} \quad (5)$$

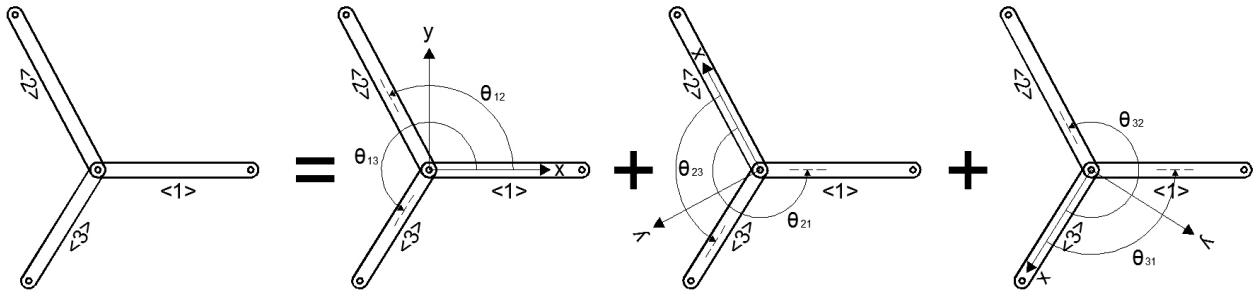


Fig. 3 Method to apply equilibrium equation at each node

이를 트러스 축력으로 다시 표현하면 아래와 같다.

$$\Delta l_1 = -\frac{l_1}{A_1 E_1} \{F_2 \cos(\theta_2) + F_3 \cos(\theta_3)\} \quad (6)$$

따라서 Δl_1 을 이용하여 부재 1번의 축력을 나타내면 다음과 같다.

$$F_1 = A_1 E_1 \frac{\Delta l_1}{l_1} \quad (7)$$

만약 탄성계수나 단면적이 서로 다른 트러스 요소들이 존재하는 경우 지금까지 유도된 내용을 근거하여 일반식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta l_x = -\frac{l_x}{A_x E_x} \sum_{n=1}^{N-1} F_n \cos \theta_n \quad (8)$$

$$F_x = A_x E_x \frac{\Delta l_x}{l_x} \quad (9)$$

그러므로 한 절점을 공유하는 트러스 부재들 중 임의의 부재를 선택하였을 경우 그 부재의 힘은 F_x 가 되며 F_x 를 산정하기 위해서는 식 8과 식 9를 이용한다. 이 후 동일한 절점에서 평형 방정식을 만족시키기 위하여 그 절점을 공유하는 다른 트러스 부재를 선택하고 위의 과정을 반복한다. 따라서 수렴 조건이 만족될 때까지 모든 절점에 대하여 반복 수행한다 (Fig. 3).

2. 하중 분배

한 절점에 공유한 다수의 트러스 요소 중에서 하나의 부재에만 힘을 재분배 하고 이러한 절점으로부터 멀리 떨어진 다른 절점에 속한 어느 임의의 요소에 재분배를 수행하는 과정

을 반복한다면 해가 발산할 수 있는 가능성이 있다. 이는 힘을 재분배 해 준 부재 방향으로는 힘의 평형 방정식이 유지되지만 다른 방향으로는 힘의 평형 방정식이 보장되지 못하게 되고 이러한 방법을 계속해 나간다면 힘의 오차가 계속 누적되어 최종에는 해가 발산하는 결과가 생길 수 있기 때문이다. 따라서 임의의 부재에 대하여 힘을 재분배하고 재분배한 기준이 되는 절점에 대하여 항상 평형방정식을 만족하는지 검사하고 축방향 힘을 수정할 필요가 있다. 그러나 만약 한 절점을 공유하는 모든 부재에 대하여 동시에 일괄적으로 힘을 재분배 한다면 부재들이 놓은 모든 방향에 대하여 항상 평형방정식을 유지함으로 힘의 평형방정식을 따로 검사할 필요가 없게 된다. 따라서 어느 임의의 절점을 선택하고 그 절점과 공유하는 모든 부재에 대하여 힘을 재분배 한 후 그 절점을 제외한 다른 절점을 선택하여 재분배 하는 일련의 과정을 반복 계산하였다.

3. 외적 과잉부재의 해소

임의의 절점에서 그 절점을 공유하는 부재들 상호 간에는 평형방정식을 만족해야 한다. 이러한 원리에 입각하여 힘을 재분배 하게 되면 구조물 내부는 문제가 되지 않지만 구조물 외부 반력은 힘의 평행만으로는 계산할 수 없는 부정정 구조물이 되기 때문에 외적으로 문제가 발생할 수 있는 여지가 있다. 따라서 외적 부정정력을 해소하기 위한 방법으로 구조물이 선형 탄성 범위에 있을 때 적용할 수 있는 중첩법(Superposition Method)을 응용하였다 (Kuran, 1996).

임의의 절점에서 평형방정식을 이용하여 부재력을 재분배 하는 경우 구조물 내부는 내적 정정을 유지한다. 그러나 만약 구조물이 외적으로 정정 구조물이 아닌 외적부정정 구조물이라면 평행방정식만으로는 구조물을 해석할 수 없게 된다. 따라서 외적부정정 구조물을 해석하는 문제는 구조물을 각각의 정정 구조물로 분리하고 각각의 구조물을 해석한 후 중첩의 원리를 이용하여 부재력을 계산해 나간다. 이 때 분리된 각각의 정정 구조물이 중첩되었을 경우 외적부정정 구조물과 동

일한 거동을 보이기 위해서 부정정 구조물을 구성하는 여분의 지점에서의 변위 제한 조건식을 이용한다.

III. 수치해석적 방법론

1. 구조물의 정정상태로 치환 해석

먼저 부정정 구조물을 구성하는 지점 중에서 정정 구조물을 구성하기 위한 지점을 제외하고 나머지 지점들은 단위 하중으로 변환시킨다. 여기서 각각의 구조물에 대하여 본 연구에서 개발된 절점 재분배 방법을 적용하고 구조해석을 완료한다. 이후 부정정 구조물을 구성하는 여유 지점에 대하여 변위 제한 조건을 만족하는 연립 방정식을 구성한다 (Gere, 2006). 이 때, 단위 하중이 적용된 절점에 있어서 올바른 변위를 적용하기 위해서 목표로 하는 반력을 미지수로 취한 후 그 미지수에 단위하중에 의해 계산된 변위를 곱하여 적용한다 (Fig. 4). 이러한 제한 조건이 가능한 이유는 본 연구에서 대상으로 하는 구조물이 선형 탄성 범위만을 다루기 때문이다. 따라서 외적 부정정 구조물을 구성하는 여유 지점의 개수만큼 연립 방정식이 구성되게 된다. 세상의 거의 모든 구조해석 문제들에 있어서 구조물 내부의 자유도에 비하여 외부 여유 반력에 의한 자유도는 그 개수가 매우 작기 때문에 부정정 구조물을 정정 구조물로 치환하면서 생성된 연립방정식을 해석하는 시간은 전체 해석 시간에서 고려되지 않아도 된다.

2. 치환된 정정 구조물의 절점 변위를 계산하는 방법

구조물의 절점 변위를 산정하기 위해서는, 절점 평행 방정식을 이용하여, 각각의 부재력을 산정할 필요가 있다. 이 때 해의 수렴 속도를 높이기 위하여 부정정 구조물로부터 분리된 정정 구조물에 대하여 힘의 평형 방정식을 이용하여 지점 반력을 구하고 그 값을 고정 시킨 후 부재력을 재분배 하는 과정이 필요하다.

절점 평행 방정식을 이용하여 분리된 각각의 정정 구조물에 대하여 부재력을 산정하였다면 이로부터 부재의 단면적과 탄성계수를 이용하여 부재의 길이 방향에 대한 변형을 계산할 수 있다. 그러나 부재의 변형을 계산한다고 단위 하중을 재하한 절점의 변위를 계산할 수 있는 것은 아니다. 그러나 구조물을 구성하고 있는 각각의 트러스 부재들은 폐합 삼각형을 구성하기 때문에 그 자체적으로 안정된 구조물을 형성한다. 따라서 트러스 부재 각각의 변형에 따른 기하학적 관계를 이용한다면 얻고자하는 임의 절점에 대한 변위를 계산할 수 있을 것이다. 기하학적 관계를 구성하는 방법은 다음과 같다.

- 1) 폐합 삼각형을 구성하기 위한 절점을 찾기 위하여 현재 상태 구조물에서 외각에 놓여있는 임의 트러스 요소를 선택한다.
- 2) 위의 요소의 시작점과 끝점으로부터 연결된 부재들에 대하여 최종 변형된 길이를 계산하고 그 각각의 길이를 반지름으로 하는 원을 그린다 (Fig. 5).

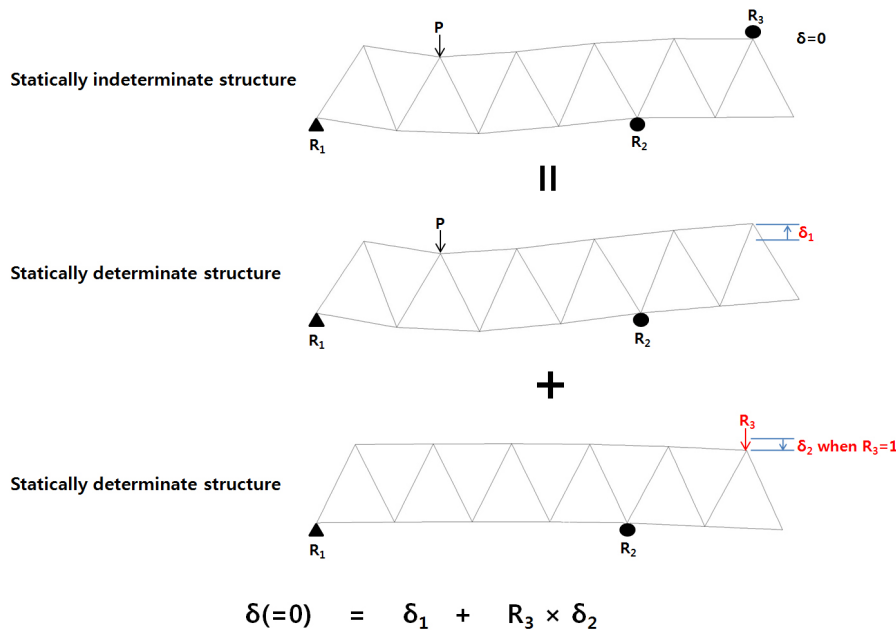


Fig. 4 Displacement restraint on nodes

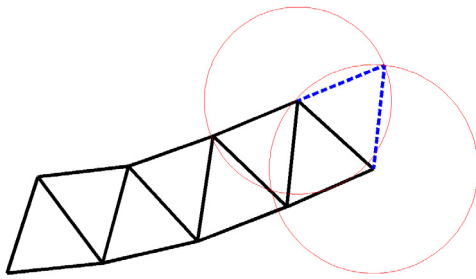


Fig. 5 Method to draw next elements

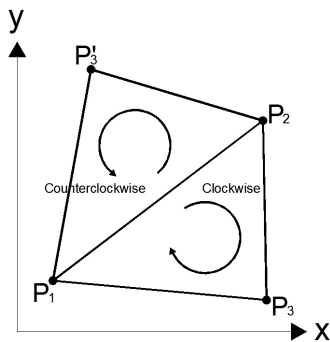


Fig. 6 Positive and negative sign of cross product

- 3) 두 개의 원이 교차하게 되면 두 개의 점이 생성되고 따라서 폐합된 삼각형도 두 개가 형성된다(Fig. 6). 여기서 변형 전 구성된 폐합 삼각형의 외적과 변형 후 구성된 폐합 삼각형의 외적이 같은 부호인지를 체크하여 교점의 올바른 위치를 선택한다(Kreyszig, 2010).
- 4) 폐합 삼각형을 모두 구성하게 되면 구조물의 최종 변형된 형태를 얻을 수 있는데 구조해석 전 구조물의 전체 좌표계와 구조해석 후 구조물의 전체 좌표계가 다르기 때문에 좌표계에 대한 좌표 변환이 필요하다. 따라서 이러한 기준은 정정 구조물을 구성하는 지점을 기준 축으로 이용하여 좌표계 좌표 변환을 실시한다(Zingoni, 2001).
- 5) 좌표계 좌표 변환을 완료한 후 구조물의 변형 전과 변형 후의 좌표를 비교하여 외부 하중에 의한 최종 변위를 얻을 수 있다.

3. 부정정 구조물의 내부 부재력 산정

부정정 구조물로부터 분해된 각각의 정정 구조물에 대하여 단위 하중을 가하여 구조물을 구성하는 내부 부재력을 산정한다. 이 때 본 연구에서 해석하고자 하는 구조물은 선형 탄성 범위 안에서 다루어지므로 단위 하중에 작용하는 최종 반력을 배수로 하여 구조물 내부 부재력을 다시 계산할 수 있다. 이렇게 계산된 내부 부재력들은 힘에 대한 중첩의 원리를 이용하여 부정정 구조물의 내부 부재력을 산정할 수 있다(Fig. 7).

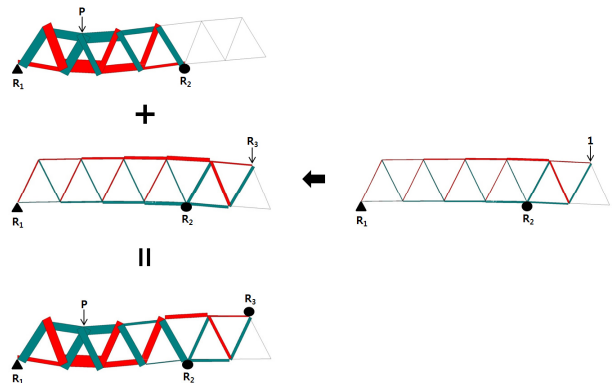


Fig. 7 Superposition for axial forces

4. 수치해석을 위한 Topology solver 알고리즘

구조물에 작용하는 외부 하중에 대응하는 각각의 트러스 부재에 걸리는 축력을 분배하기 위하여 절점을 선택하는 방법은 Random 함수를 이용하였다. 컴퓨터에 의해 발생된 난수를 이용하여 목표로 하는 정규분포와 같은 변수를 구하는 방법에 Box-Muller의 함수를 사용하였는데, 이 방법은 발생된 난수를 비상관 표준정규분포로 변환할 수 있다(Afflerbach, 1990). 그리고 분배 효율을 높이기 위하여 한 번 선택된 부재는 전체 시스템에 있는 다른 부재의 재분배가 일어날 때 까지 제한하는 것으로 하였다. Topology 계산방법의 절차는 부정정 부재를 포함한 구조체를 정정구조체로 분리하면서 부정정력을 재분배하는 과정을 통하여 진행된다. Fig. 8은 실제로 프로그램이 어떻게 코팅되었는지를 보여주는 순서도이다. 구조물이 파일을 통해서 입력되기 전, 처음에 필요한 만큼의 메모리를 할당받는다. 다음에는 부정정 차수를 계산하여, 부정정 개수만큼 정정구조체를 생성한다. 그리고 각각의 경우에 대하여 위상학적 하중 재분배 방법을 이용하여 구조물을 해석해간다. 이 때 이미 설정된 최대반복회수나 절대오차 범위에 들어올 때 까지 무한히 반복한다. 모든 정정구조물의 해석이 완료되면, 부정정력에 해당하는 변위들만을 모아서 다시 평행 방정식을 조립하고, 그 결과로부터 각 정정구조물의 배수를 결정한다. 이 배수를 이용하여 완성된 정정구조물들을 모두 중첩하면 최종 해석 결과를 출력할 수 있다.

IV. 결과 및 고찰

Fig. 9는 집중하중을 받고 있는 1차 부정정 트러스 구조물을 보여준다. 트러스 구조물의 단면의 형상은 정사각형으로 한 변의 길이는 0.1 m, 부재의 길이는 3 m, 탄성계수는 100,000 N/m², 포아송비는 0.3으로 가정하였다.

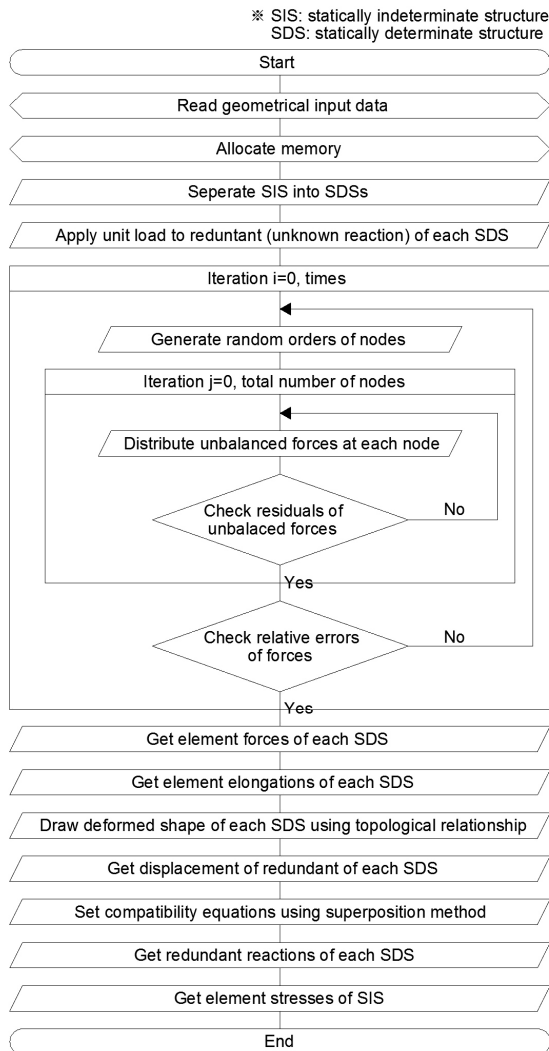


Fig. 8 Procedure of topology algorithm using superposition method

Table 2는 본 연구에서 제안하는 분배법을 이용하여 계산한 결과를 부재별로 보여준다. 여기서, single load란 위에서 언급했던 지점을 제거하고 정정 구조물로 만든 상태에서, 외부에서 작용하는 하중을 구조물에 재하시, 각 부재에 작용하는 힘이다. Unit load란 외부하중이 없는 상태에서, 제거된 지점 대신에 단위하중을 가하였을 시, 각 부재에 걸리는 부재력을 나타내고 있다. 본 연구에서 다루는 구조물은 선형탄성 범위를 만족해야 하기 때문에, 그리고 이 때 지점 E는 변위가 발생하지 않는 경계조건을 만족하여야 하기 때문에, 이로부터 single load와 unit load 사이에 변위에 대한 선형 관계식을 구성할 수 있다. Single load와 unit load에 의한 E점의 처짐은 각각 $-1.64239w + 0.02474i$ 므로 $-1.64239 + 0.02474 \times m = 0$ 을 만족해야 하고 이로부터 unit load의 곱하기 배수는 66.39

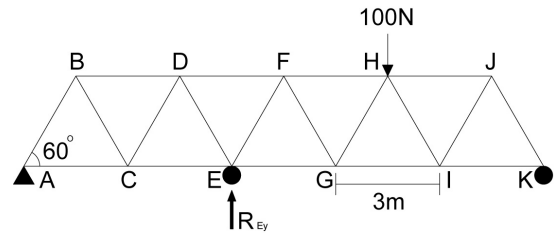


Fig. 9 Example of statically indeterminate truss with the degree of indeterminacy of one

Table 2 Axial forces results of the truss shown in Fig. 9

Element	Single load (N)	Unit load (N)	Combined load (N)	SAP2000 (N)	Relative error (%)
A-B	-33.53	0.67	10.95	10.99	0.38
A-C	15.00	-0.30	-4.92	-4.92	0.09
B-C	33.52	-0.67	-10.96	-10.98	0.20
B-D	-29.99	0.60	9.84	9.83	-0.12
C-D	-33.53	0.67	10.95	10.92	-0.26
C-E	44.98	-0.90	-14.77	-14.71	-0.39
D-E	33.55	-0.67	-10.93	-10.92	-0.08
D-F	-59.99	1.20	19.67	19.59	-0.42
E-F	-33.52	-0.45	-63.39	-63.16	-0.37
E-G	74.98	-1.00	8.59	8.65	0.65
F-G	33.44	0.45	63.31	63.05	-0.42
F-H	-89.93	0.80	-36.82	-36.85	0.08
G-H	-33.48	-0.45	-63.35	-63.15	-0.32
G-I	104.9	-0.60	65.07	65.09	0.03
H-I	-78.18	0.45	-48.31	-48.50	0.40
H-J	-69.94	0.40	-43.39	-43.40	0.03
I-J	78.16	-0.45	48.29	48.49	0.42
I-K	34.99	-0.20	21.71	21.71	-0.01
J-K	-78.23	0.45	-48.36	-48.55	0.40

로 결정되었다. Combination load란 앞서 계산한 배수값에 unit load를 곱한 뒤 single load를 합한 양으로 최종적인 부재력을 나타낸다. SAP2000이라는 항목은 상용구조 패키지인 SAP2000 (Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, USA)을 이용하여 부재력을 계산한 결과이다. 부재의 축력의 평균을 두 가지 해석방법에 따라 계산한 후 그 차이를 보면 수치적으로 제로의 값을 갖으며, 표준편차는 0.124이다. 이는 부재에 걸리는 실제 축력의 크기에 비하면 매우 작은 값으로 본 연구에서 제안한 방법이 신뢰성이 있음을 확인시켜 준 것이다. 같은 방식으로 y 방향 변위들에 대한 계산을 시행하면 평균의 차이는 제로의 값을 갖으며, 표준 편차는 0.473이다. 이러한 결과는 변위에 대해서도 구조해석 방법의

Table 3 Nodal displacements results of the truss shown in Fig. 9

Node	Displacement by combined loads (m)		Displacement by SAP2000 (m)		Relative error (%)	
	x	y	x	y	x	y
C	-0.015	0.030	-0.015	0.030	0.05	-0.40
G	-0.033	-0.652	-0.033	-0.653	1.09	-0.05
I	0.162	-0.666	0.162	-0.666	-0.25	-0.03
B	0.046	0.018	0.045	0.019	0.42	-0.58
D	0.074	0.026	0.075	0.026	-0.55	0.12
F	0.133	-0.333	0.134	-0.333	-0.12	-0.08
H	0.023	-0.918	0.023	-0.918	-0.37	0.01
J	-0.107	-0.350	-0.107	-0.349	0.01	0.06

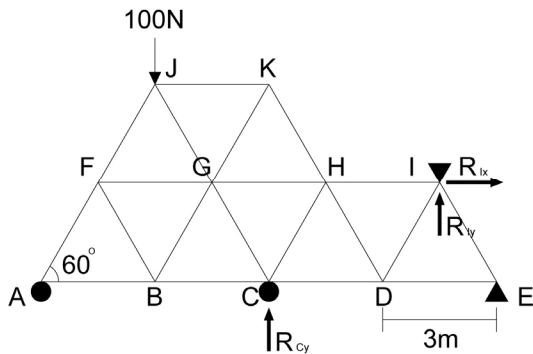


Fig. 10 Example of statically indeterminate truss with the degree of indeterminacy of three

안전성을 보장한다 (Table 3).

Fig. 10은 다양한 경계조건을 갖는 복층 트러스를 보여준다. 물성치와 부재 치수는 앞서 언급한 예제와 같고 해석 과정은 전과 동일한 방법을 따른다. 또한 본 구조물의 부정정 차수는 총 3이므로 1개의 반력 조건을 가진 절점 C와 두 개의 반력 조건을 가진 절점 I를, 정정 구조물로 치환하는 임의의 절점으로 가정하였다. 따라서 unit load가 R_{cy} , R_{iy} 및 R_{ix} 로 분리하여 정의 되어야 하고 지점의 변위 조건은 0이 되어야 한다는 제한조건으로부터, R_{cy} , R_{iy} 및 R_{ix} 의 곱하기 배수는 50.17, 2.71, -16.54로 계산되었다. 그 이후 부재의 축력의 평균을 두 가지 해석방법에 따라 계산한 후 그 차이를 보면 0.001을 갖으며, 표준편차는 0.008이다. 이는 부재에 걸리는 실제 축력의 크기에 비하면 매우 작은 값으로 본 연구에서 제안한 방법이 신뢰성이 있음을 확인시켜 준 것이다. 같은 방식으로 x 및 y 방향 변위들에 대한 계산을 시행하면 평균의 차이는 제로의 값을 갖으며, 표준 편차는 0.001이다. 이러한 결과는 변위에 대해서도 구조해석 방법의 안전성을 보장한다.

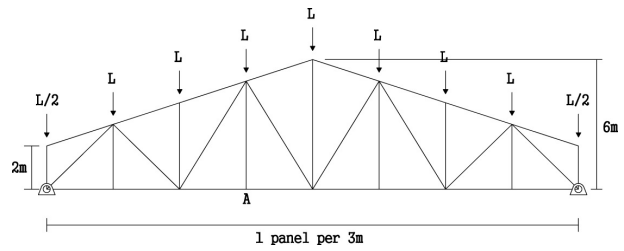


Fig. 11 Example of roof truss in agricultural facility

다음 Fig. 11의 예제는 농업토목구조물인 시설물 내부 상부트러스를 대상으로 하였으며, 본 연구에서 제안한 방법을 이용하여 계산한 결과를 SAP2000과 비교해 보았다. 구조물은 연직재가 추가된 Warren 트러스 형식의 표준형 지붕구조물이며, 부가된 절점 및 외부하중 조건은 Fig. 10에 나타내었다. 적용한 단면은 W8×10 I형 형강으로, 탄성계수는 $1.999E+11 \text{ N/m}^2$ 를 사용하였고, 자중은 고려대상에서 제외하였다. 적설심은 30년 빈도로 0.5 m을 가정하였으며, 눈의 단위중량은 1 kN/m^2 를 이용하였고, 트러스 구조물의 간격은 10 m로 설정하였다. 따라서 구조물에 작용하는 집중하중 L 은 15 kN 으로 계산되었다. 구조물에서 오른쪽 지점에 물러형태의 지점과 수평하중을 작용하여 부정정력을 해소하기 위한 경계조건으로 가정하였다. 그리고 수평하중을 단위하중으로 설정하였을 때에는 적용된 하중의 절대치보다 상대적으로 매우 작기 때문에 수평방향의 변위가 전혀 발생하지 않았다. 해석 결과 부재의 축력이나 절점 변위가 다른 것들과 비교하여 상대적인 크기가 1/10 이하가 되는 조건에서는 2%~3%의 오차 범위를 보여주었다. 특히, 수평변위가 매우 작은 절점 D에서는 오차가 7%까지 발생하였다. 그러나 설계의 고려대상이 되는 부재들의 경우 축력이나 변위에 있어서 SAP 2000과의 상대오차는 1% 이내 존재해 Topology를 이용한 구조해석 방법이 유효함을 알 수 있었다.

행렬의 재조립 없이 구조물의 힘을 계산할 수 있는 본 연구에서 개발된 모델의 계산 효율성을 검토하기 위하여 복잡도를 산정해 보았다. 트러스 구조물의 각 절점이 가지고 있는 자유도를 포함한 총 행렬의 크기가 n^2 이 되는 경우를 가정하였다. 그리고 이러한 구조물에서 임의의 절점을 공유하는 요소가 다수 있다고 가정하자. 이 때 이러한 요소들 중 어느 한 요소가 재분배를 받기 위해서는, 그 부재를 제외한 모든 요소가 우선적으로 재분배를 받아야 재분배의 의미가 존재하게 되고, 비로써 평행방정식도 만족하게 된다. 따라서 한 절점에서 공유하는 총 부재의 수를 a 라고 하고, 이 중 임의로 선택된 부재가 재분배를 받기 위해서는 주변에 있는 $(a-1)$ 개의 다른 부재가 필요하다. 따라서 모든 부재가 동시에 재분배를 받는다고 가정하면 총 횟수는 $a(a-1)$ 가 된다. 그러나 각각의 부

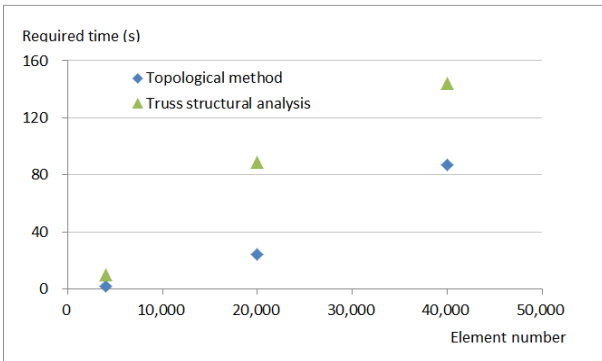


Fig. 12 Comparison of calculation time of truss structural analysis and topological load redistribution method

재가 한 번만 재분배를 받는다고 공유하는 모든 절점에서 힘의 평형상태를 유지하는 것은 아니다. 그러므로 트러스의 각 절점에서 Gauss Seidel 방법을 힘의 평형상태가 유지될 때까지 적용하면 그 총 횟수는 $\{a(a-1)\}^2$ 가 된다. 이는 트러스 구조물의 임의의 한 절점에서 해가 수렴되기 위해 수행되는 복잡도이다. 또한 효율적인 분배를 위해 트러스 구조물의 모든 절점에서 중복됨이 없이 힘이 배분되는 것이 필요하다. 따라서 절점의 총 개수를 n 이라 가정하면, 시스템적으로 보았을 때 총 횟수는 $\{a(a-1)\}^2 n$ 이다. 그러나 아직도 시스템 내에서 평형상태를 유지하고 있지는 않으므로 계속적으로 반복할 필요가 있다. 여기서 충분한 수렴조건이 될 때까지 Gauss Seidel 방법을 따른다면 최종 반복 횟수는 $\{a(a-1)\}^4 n^2$ 이 될 것이다. 여기서 $a \ll n$ 이므로 복잡도는 n^2 이 됨을 알 수 있다. 컴퓨터가 필요한 저장 공간은 부재의 총 개수만 필요하며 트러스 구조물을 형성하였을 경우 부재의 총 개수는 절점 총 개수의 3배가 된다. 따라서 메모리 용량은 대략 $3n$ 정도가 요구된다. 모든 동일한 조건에서 트러스 구조해석과 위상학적 하중 재분배 방법의 경우 실질적인 시간 속도를 비교해 보았다. 대상 구조물은 단순보 형태의 와렌 트러스로 집중하중을 보의 중앙에 재하하였으며, Fig. 12는 그 결과를 정리한 그래프이다. 트러스 요소의 수가 증가하면 트러스 구조해석 방법에 비해서 속도는 향상되지만, 트러스 요소가 계속 증가한다고 해서 소요되는 시간이 상대적으로 더욱 빨라지는 것은 아님을 알 수 있었다. 물론 이러한 결과는 내부 프로그램을 어떻게 코딩하느냐에 따라서, 또는 구조물의 형상이나 경계조건이 복잡한 경우는 결과가 달라질 수 있음을 언급한다.

V. 결론

본 연구는 부정정 트러스 구조물을 해석하기 위한 새로운

방법론을 제시하고자 하였으며, 위상학적 하중 재분배 방법과 중첩법의 원리를 적용하였다. 부정정 트러스 구조를 정정 구조물로 치환하면 위상학적 하중 재분배 적용이 가능하고, 그 이후 원래의 부정정 구조물로 치환하는 방법은, 앞서 계산한 정정구조물들을 중첩의 원리를 이용하여 결합함으로써 구조계산을 완료할 수 있었다. 예를 들어, 트러스 구조물이 외적으로 부정정 구조물인 경우에는 내부의 각 절점이 평형을 유지하고 있다고 볼 수 있기 때문에 이 구조물을 여러 개의 외적 정정 구조물로 분리할 수 있다. 그리고 해를 구하는 과정에서 분리된 각각의 정정 구조물이 중첩되었을 경우 외적부정정 구조물과 동일한 거동을 보이기 위해서, 부정정 구조물을 구성하는 여분의 지점에서의 변위 제한 조건식을 이용하여 중첩에 의한 조립이 가능하다. 또한 본 연구에서 제안하는 방법과 기존의 트러스 구조해석 방법을, 트러스요소의 개수 증가와 소요시간의 관계로 비교하면, 위상학적 하중 재분배 방법을 통한 구조해석 방법이 소요시간 면에서 유리함을 알 수 있었다. 그러나 부정정력이 증가할수록 본 연구에서 제안하는 방법은 구조물을 구성하는 트러스요소의 개수만큼 메모리가 더욱 필요해진다. 그렇지만 실질적인 구조물에서 부정정력의 수는 트러스요소 전체 개수에 비하면 작은 숫자이기 때문에, 본 연구에서 개발한 방법은, 실질적인 활용면에서, 효율적으로 이용될 수 있을 것으로 보인다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 트러스 절점의 평형 방정식을 이용하여 트러스 구조물의 부재력을 반복과정에 의해 재분배 하는 과정을 통하여 부정정 트러스 구조물의 정정해석 방법의 적용성을 보였다.
- 2) 위상학적 하중 재분배 방법에 의한 해의 수렴과정은 외적 부정정 구조물이라면 부정정 차수만큼 지점 반력을 외부 반력으로 치환하고, 정의된 다수의 정정 구조물에서 임의 지점의 변위를 모두 합하면 변위가 0이어야 한다는 변위제약 조건식을 항상 만족하는 조건에서 성립할 수 있었다.
- 3) 기하관계로부터 강성도 행렬을 조립한 후 경계조건과 하중조건을 대입하고 그 해를 찾는 기존의 행렬기반 수치해석 기법을 대신할 수 있는 트러스 구조해석 방법으로 제시된 Topology 방법의 적용 가능성을 보여주었다.

REFERENCES

1. Afflerbach, L., 1990. Criteria for the assessment of random number generators. Journal of Computational and Applied Mathematics 31(1): 3-10.
2. Denke, P. H., 1962. A general digital computer analysis of

- statically indeterminate structures, NASA-TD-D01666.
3. Fokkema, D. R., G. L. G., Sleijpen, and H. A. V. der Vorst, 1996. Generalized conjugate gradient squared. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 71(1): 125-146.
 4. Fuchs, M. B., 1997. Topological structural analysis. *Structural Optimization* 13(2-3): 104-111.
 5. Gere, J. M., 2006. *Mechanics of Materials - 6th Edition*. Thomson Learning, Inc.
 6. Ghaboussi, J. W. X., 1998. Soft computing with neural networks for engineering applications: fundamental issues and adaptive approaches. *Structural Engineering and Mechanics* 6(8): 955-969.
 7. Go, J. G., M. Y., Oh, J. G., Jo, J. Y., Lee, and S. H., Lee, 1988. Analysis and design of statically indeterminate structure. Seoul National University (in Korean).
 8. Han, Y. C., 2012. Analysis of the socio-geometric systems and continuum structures using complex network theory. Ph.D dissertation, Seoul National University, South Korea.
 9. Kaveh, A., 2004. *Structural Mechanics: Graph and Matrix Methods - 3th Edition*. Research Studies Press LTD.
 10. Keneko, L., M., Lawo, and G. Thierauf, 2005. On computational procedures for the force methods. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 18(10): 1469-1495.
 11. Kreyszig, E., 2010. *Advanced Engineering Mathematics - 10th Edition*. John Wiley & Sons, Inc.
 12. Kuran, B., and H. N., Özgüven, 1996. A modal superposition method for non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration* 189(3): 315-339.
 13. Lee, S. H., H. J., Kim, Y. J., Park, H. G., Hahm, and B. S., Kong, 2011. Model tests study on flow-induced vibration of truss type lift gate. *The Korean Society of Agricultural Engineers* 53(3): 35-41 (in Korean).
 14. Lee, S. H., W. S., Chung, and J. H., Lee, 2011. Structural analysis of space truss by using new force method based on singular value decomposition. *Computational Structural Engineering Institute of Korea* 24(5): 481-489 (in Korean).
 15. McCormac, J. C., 2010. *Structural analysis using classical and matrix methods*. John Wiley & Sons, Inc.
 16. Peter, V. O'Neil, 2010. *Advanced Engineering Mathematics - 7th Edition*. Cengage Learning.
 17. Rangan, B. V., and A. S., Hall, 1984. Moment redistribution in flat plate floors. *American Concrete Institute* 81(6): 601-608.
 18. Robinson, J., 1973. *Integrated theory of finite element method*. John Wiley and New York.
 19. Stroud, K. A., and D. J., Booth, 2013. *Engineering Mathematics*. Palgrave Macmillan.
 20. Topcu, A., 1979. A contribution to the systematic analysis of finite element structures using the force method. Ph.D dissertation, Essen University, Germany (in German).
 21. Ystrom J., Fast solvers for complex problems. [Http://machinedesign.com/archive/fast-solvers-complex-problems](http://machinedesign.com/archive/fast-solvers-complex-problems). Accessed 14 Oct. 2015.
 22. Zingoni A., 2001. *Structural Engineering, Mechanics and Computation*. ELSEVIER.