韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2015.54.4.299
2015. 11. 제 54권, 제 4호, 299-315.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2015, Vol. 54, No. 4, 299-315.

이차함수에서 두 변량사이의 관계 인식 및 표현의 발달 과정 분석: 민선의 경우를 중심으로

이동근(경기고등학교)
문민정(죽전고등학교)
신재홍(한국교원대학교)†

Ⅰ. 서론

함수교육 분야에서 공변 관점이 주목받고 있다. Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu(2002)는 공변 추론(covariational reasoning)에 대한 이론적 틀을 설립했으며 이와 관련하여 예비교사에 대한 연구를 시작했고, Castillo-Garsow(2012)는 공변 추론의 이론 틀을 이용하여 학생들이 지수적 증가현상을 어떻게 이해하는가를 연구했다. 또한 Ronau, Meyer, & Crites(2014)는 공변 추론 관점에서 다양한 실생활 소재들을 이용하여 함수적 상황을 대응표로 구성해보고 그 표를 그래프로 표현하는 과정에서 드러나는 학생들의 인식에 대한 연구들을 소개했다. 특히 공변 관점에서의 접근으로 인해 학생들은 다양한 운동 상황 속에서 변화에 대한 경험을 정적인 관점에서의 함수의 그래프에 대한 이해뿐 아니라 '동적인 이해'가 가능하다고 밝히고 있다. 국내에서는 Cho, Shin & Woo(2012)가 LOGO에 기반하여 영재 학생들의 공변 추론을 연구했으며, 모성준(2013)은 중학생들의 공변 수준에 대한 사례연구를 진행했다.

함수에서 변화율에 대한 학습 역시 공변 관점에서 접근하는 것이 가능하다(Zandieh, 2000). 특히 미분학습에서 변화율개념은 중요한 의미를 갖고 있음에도 불구하고 이에 대한 연구가 미진한 편이다. 미적분은 역사발생적 관점에서 시간에 따른 물체의 운동에 대한 17세기 Galilei의 연구에서 시작된 것으로 볼 수 있으며, 물체의 속도와 위치를 다루는 과정에서 자연스럽게 변화율이 나타난다. 따라서 변화율을 통해서 미적분의 중요한 원리를 설명하는 것은 매우 자연스러운 접근으로 볼 수 있음에도, 변화율의 의미를 드러내어 미적분의 중요한 원리를 지도하는 연구는 거의 진행되고 있지 않다(연용호, 이상한, 임성모, 한재영, 1996; 정연준, 이경화, 2009; 최영주, 홍진곤, 2014; 이현주, 류중현, 조완영, 2015). 변화율의 관점에서 보면 학생들은 중학교에서 변화율이 일정한 일차 함수를 학습하고, 이후 변화율이 변하는 함수를 접하게 되는데(계승혁, 하길찬, 2010), 그 중 대표적인 함수의 예로 변화율이 일정하게 증가하는 이차함수와 변화율이 자신과 같이 지수적으로 증가하는 지수함수를 들 수 있다. 이에 대해 Confrey와 Smith(1994)와 같이 덧셈적 변화율과 곱셈적 변화율이라는 개념을 이용하여 이차함수와 지수함수에서 두 변수 사이 관계의 차이점을 밝힌 연구가 있기는 하지만, 학생을 대상으로 하여 변화율 관점에서 이차함수와 지수함수를 상호 대비하여 분석한 연구는 드물다. 따라서 실제 학생들을 대상으로 변화율이 증가하지만 증가 양상이 다른 두 함수를 상호 대비하는 활동은 변화율 관점에서의 함수학습에 대한 연구의 범위를 확장할 수 있는 의미 있는 연구가 될 수 있다.

한편 이차함수와 지수함수는 변화율의 관점에서가 아니더라도 수학교육에서 수학적으로나 실생활 응용 측면에서 매우 중요한 학습 목표이자 대상이다. 따라서 본 연구에서는 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 변화율이 일정한 규칙을 가지고 변하는 이차함수와 지수함수의 변화 양상을 관찰, 기술, 비교하는 활동을 실시하고, 이를 통해 그 학생들이 어떻게 서로 다른 두 종류의 함수의 변화 양상을 파악하고 학습해 나가는지에 대해 7차시에

* 접수일(2015년 8월 28일), 수정일(2015년 11월 2일), 게재확정일(2015년 11월 5일)
* ZDM분류 : C30
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 공변 추론, 변화율, 이차함수, 지수함수, 도함수
† 교신저자

걸쳐 교수실험을 실시하였다. 특히 본 연구는 학생의 두 변량의 변화 양상 인식과 이해에 대한 연구로서 학생이 변화율에 근거하여 변화 양상을 분석할 수 있도록 함으로써 학생들의 변화율에 대한 인식의 발달 탐구에 초점을 맞추고 있으며, 이는 곧 학생들이 공변적 관점에서 변화율, 더 나아가 도함수 학습의 기초를 다지는 활동을 돕는다는 데에 그 의미가 있다. 본 논문에서는 교수실험에 참여한 세 명의 고등학교 2학년 학생 중 중간 정도의 성취를 보인 민선[2]의 학습 과정에 초점을 두어 민선의 함수 변화 양상 인식과정을 세밀히 분석하고 이에 따른 시사점을 논하기로 한다.

본 연구는 앞서 언급한 연구목적에 따라 다음과 같은 연구문제를 갖는다.

- 민선은 어떻게 지수함수와 이차함수의 변화양상의 차이를 구분해 가는가?
- 민선은 주어진 함수의 변화 세기(intensity)를 나타내는 새로운 함수를 어떻게 구성해 가는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 함수 학습의 두 가지 관점

학생들에게 함수 개념을 도입할 때 함수 개념의 어떤 측면을 강조할 것인지 결정하는 일은 매우 중요하다. 특히 함수의 종속성을 강조할 것인지 아니면 대응적 측면을 강조할 것인지에 대한 문제는 여전히 많은 논쟁을 불러일으키는 주제이다. 대응적 관점에서 함수 개념은 두 집합 A와 B에 대해서 “A의 원소 x에 대응하는 B의 원소 y가 유일하게 존재한다.”와 같이 두 집합 사이의 고정된 관계에 기반을 두는 것이고(Confrey & Smith, 1994), 이와는 대조적으로 변화하는 두 양사이의 독립-종속관계를 파악하는 과정에서 함수의 의미를 이해하려고 하는 관점이 종속성을 강조하는 관점이다.

역사적으로 살펴보면 함수 개념은 전함수단계에서 기하적함수단계(17세기)를 거쳐 대수적 함수단계(18세기)와 논리적 함수단계(19세기) 및 집합적 함수단계(20세기)로 발달해 왔다 (김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2011). 대수적 함수단계에서까지도 함수를 통한 현실 세계의 이해와 함수의 조작을 통한 현실 상황의 재해석 및 적용이 수학자들에게 매우 중요한 주제 중 하나였음을 생각해 볼 때, 함수 개념은 연속적으로 변화하는 두 양사이의 관계를 이해하고자 하는 노력에서 시작되었다는 사실 뿐 아니라 두 변량사이의 관계를 이해하고 표현하는 과정이 많은 고민과 노력을 요하는 과정임을 알 수 있다(김원경, 김용대, 2002). 우리나라 교육과정에서도 함수 도입 방식에 대해 두 관점간의 전환이 반복되어 왔으며, 제 7차 교육과정부터는 함수 개념을 도입할 때 종속의 관점을 강조하고 있다. 그러나 이러한 시도에도 불구하고 관련 연구가 부족하여 실제 교육 현장에서 종속 관점을 강조한 수업을 구성하는데 많은 어려움을 겪고 있는 것이 사실이다(변희현·주미경, 2012).

한편 Confrey & Smith(1991)는 학생들이 함수를 학습하는 과정에서 x_1에서 x_2로 변하는 패턴과 y_1에서 y_2로 변하는 패턴을 함께 고려하면 x와 y사이의 함수적 관계를 발견할 수 있다고 주장했으며, 이러한 방식을 그들은 공변(covariational) 관점이라고 불렀다. 예를 들어, 한 변수는 2씩 증가하고 또 다른 변수는 6씩 증가한다면, 1씩 증가를 3씩 증가와 비례적으로 연결시켜 생각할 수 있는데, 이는 앞서 언급했던 두 변량사이의 관계를 강조한 함수의 종속성의 의미와 그 맥락을 같이한다고 볼 수 있다.

2. 공변 추론

공변 관점에서 함수 개념을 형성하고 학습해 나가는 것은 함수 개념이 처음 도입되는 중학교 단계에서만 강조되어왔던 것은 아니다. 함수 개념을 처음으로 습득하는 중학생들에게 함수적 상황에서 함께 변화하는 양을 조정하고 해석하는 기회를 제공하여 공변 관점으로 함수 개념의 형성을 제안한 연구도 있지만(Ellis, 2011), Confrey & Smith(1995)는 함수를 두 양의 변화로 표현하는 것이 고등학교 학습과정을 포함한 이후 함수와 관련된 수학 학습에 더 영향력 있는 접근이 될 수 있다고 주장하였다. 이러한 함수의 공변 관점은 미적분 개념을 학습하는데 필수적으로 요구되며(Thompson, 1994), 두 변수의 덧셈적 변화를 조정하고 모델링하는 미분방정식과도 밀접하게 관련되어 있다(Confrey & Smith, 1995).

2) ‘민선’은 연구에 참여한 세 명의 고등학교 2학년 학생 중 한 명을 지칭하는 가명이다.

이러한 측면에서 본다면 함수적 상황이 주어졌을 때 학생들이 사고하는 과정을 공변 관점에서 관찰하고 분석하는 것은 함수 도입 단계에서부터 대학교까지 함수관련 전체 학습 경로에 대한 매우 광범위한 시사점을 제시할 수 있다. Carlson et al.(2002)는 "두 양의 변화에 주목하면서, 두 양 사이의 불변인 관계를 파악하는 것과 관련된 인지활동"을 공변 추론(covariational reasoning)이라고 정의하였으며, 학생들이 역동적인 함수적 상황을 해석하고 표현하는 수학적 행위에 대해 이를 분석하기 위한 이론적 틀을 제시했다.

3. 변화율

1) 교육과정에서의 변화율

현 교육과정에서는 할선의 기울기의 극한값이 접선의 기울기가 된다는 것을 이용하여, 평균변화율의 극한이 순간변화율이 된다는 것을 도입하고 있다. 이에 대하여 임재훈, 박교식(2004)은 접선에 대한 논의 과정에서 기하학적 접선 개념과 함수적 접선 개념으로 구분하여 순간변화율을 접선의 기울기로 동일시하는 것에서 나타나는 문제점을 지적했다. 즉, 할선의 기울기에 대한 극한값으로 순간변화율을 도입하는 현 교육과정에서의 방식이 자칫 수정하기 힘든 1차 직관을 형성할 수 있음을 지적한 것으로 볼 수 있다. 한편 강향임(2012)은 아리스토텔레스가 물체의 움직임에 대한 순간 속도를 부정하고 평균 속도만을 인정했다고 언급했는데, 이러한 역사적 사실은 평균변화율에서 시작하여 평균변화율의 극한으로 순간변화율을 도입하는 것에 대한 현 교육과정의 방식이 역사발생적 관점에서 그 방향은 적절하다고 볼 수 있으나 동시에 평균 변화율에서 순간변화율로의 전환과정에서 학생들에게 많은 인지적 갈등이 일어날 수 있음을 보여주는 것이다.

2) 학생들의 변화율 개념 발달에 대한 연구

Confrey & Smith(1994)가 지수함수에서 곱셈적 변화율에 대한 연구를 진행한 이후, Thompson(2008)과 Ellis(2011)등에 의하여 직간접적으로 곱셈적 변화율에 대한 논의가 진행되었다. 그동안 지수함수 학습에서 변화율 개념은 미적분 학습과 연계하여 평균변화율에서 극한을 이용한 순간변화율 개념을 도출한 다음 순간변화율을 함숫값으로 갖는 도함수를 정의하는 방식으로 확장되며 학습되었다. 평균변화율과 순간변화율은 함수에서 정의역의 변화량에 따른 함숫값의 변화량의 비를 고려하는 개념이라면, 곱셈적 변화율은 함숫값의 비를 고려하는 것에 방점이 찍혀있는 개념이다.

$$\frac{f(x+\triangle x)}{f(x)} = C_{\triangle x} \text{ (단, } C_{\triangle x}\text{는 } \triangle x\text{값이 정해지면 결정되는 상수이다.)}$$

Confrey & Smith(1994)는 학생들이 함수에서의 변화율의 의미를 덧셈적 변화율, 곱셈적 변화율로 인식하는 것을 바탕으로 그들이 인식한 단위에 대하여 논의했다. 특히 변화율의 곱셈적 표현을 조정하는 것은 변화율의 개념을 더 탄탄하게 만들 수 있다고 보고, 표준 단위를 포함한 단위 분석보다는 단위에 대한 정신적인 구조에 초점을 두어야 한다고 주장했다. 이 과정에서 단위를 구성할 때의 분할(Splitting)의 중요성을 강조했는데, 실제 그들의 연구에서 지수함수에서 막대 그래프의 분할을 통해서 곱셈적 변화율의 개념을 도입하고 지수함수의 도함수가 원시함수의 상수배가 되는 과정이 제시하기도 했다.

그러나 Confrey & Smith(1994)가 '평균변화율이나 순간변화율이 변화율을 한 단위로 보고 있다는 문제점'을 지적했던 것에 대하여, 역설적으로 공변 관점에서 변화율을 바라보지 못하고 함숫값에 해당하는 하나의 변량에 대해서만 초점을 맞추었다는 지적도 가능하다. 즉, Confrey & Smith의 곱셈적 변화율의 핵심은 $\triangle x$의 값을 조정해가면서 $\dfrac{f(x+\triangle x)}{f(x)}$의 값이 $\triangle x$에 의하여 일정한 상수 $C_{\triangle x}$로 결정된다는 점에 있다. 따라서 만약 $\triangle x$에 대한 조정이 결여될 경우, $\dfrac{f(x+\triangle x)}{f(x)}$가 일정한 상수 $C_{\triangle x}$를 갖는다는 점은 함숫값에 해당하는 하나의 변량에 대한 추론이므로 진정한 의미에서의 공변 추론이라 볼 수 없다.

또한 연구에서 제시된 덧셈적 변화율과 곱셈적 변화율에 대한 구분은, 학습자가 함수적 상황에서 드러나는 변화를 파악할 때 변화의 세기(intensity)를 측정하는 양으로서 어떤 것을 택할 것인지 관찰할 필요가 있음을 시사해준다. 특히 현 교육과정에서 도함수 학습과정의 구성은 함숫값의 변화의 정도를 측정하는 양으로서 '변화율'

을 선택하는 것이 간단한 설명을 통해 학생들이 자연스럽게 받아들일 수 있을 것이라는 암묵적인 전제를 바탕으로 이루어지고 있는바, Confrey & Smith(1994)의 연구를 통하여 이러한 전제에 대한 반성적 접근을 해볼 수 있다.

한편 Thompson(2008)은 Confrey & Smith(1994)의 방식에 대하여 구간 길이를 1로 하여 변화율을 관찰하게 될 경우 구간의 시작점과 끝점 사이에서 일어나는 변화를 설명하기가 어렵다고 지적했다. 그 예로 다음과 같은 두 함수 (1), (2)를 비교했는데,

$y=P(1.08)^{[x]}$ $(x \geq 0)$ (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수)$\cdots\cdots(1)$

$$y=\begin{cases} P+(0.08P)x & ,0<x<1 \\ P(1.08)+P(1.08)(0.08)(x-1) & ,1 \leq x<2 \\ \cdots & \\ P(1.08)+P(1.08)^n(0.08)(x-n) & ,n \leq x<n+1 \end{cases}$$
$\cdots\cdots(2)$

(1)은 계단형 그래프가 나오는 식으로서 Confrey & Smith(1994)의 방식의 문제점을 지적하기 위한 예이고, (2)는 Thompson(2008)이 Confrey & Smith(1994)의 방식을 개선한 예로서 구간별로 할선이 표시되는 그래프로 나타난다. Thompson(2008)의 방식은 그래프에 구간별로 할선을 이용하여 변화의 양을 직관적으로 표현한 방식으로서, 분모의 변화를 더욱 명확히 고려한 방식으로 볼 수 있다. 그러나 Thompson(2008)의 연구는 학생을 대상으로 한 교수실험에 의하여 입증된 것은 아니므로, 학생들의 학습경로에서도 자연스러운 것인지에 대하여는 문제를 제기할 수 있다.

Ellis(2011) 역시 Confrey & Smith(1994)의 분할 방식에 문제를 제기한 Thompson(2008)과 같은 맥락에서 지수적 증가를 이해하는 데 있어 대안적인 접근방법으로서 변화율의 접근방법을 제시하고, 공변과 연속변수의 중요성을 강조했다. 곱셈적 변화율이란 $\dfrac{f(x+\triangle x)}{f(x)}$의 비율 개념이며, 이 비가 $\triangle x$에 의존한다는 것을 이해하는 것은 지수함수를 이해하는데 핵심적이다. Ellis는 학생들이 이러한 곱셈적 변화율을 만드는 과정에서 나타나는 세 가지 개념적 전환 단계를 제시하기도 하였으며, 또한 변화율 접근을 통해 학생이 함수적 상황에 대해 모델링하고, 이러한 두 변수 사이의 관계를 표현하는 과정을 통해 지수함수의 대수식을 획득하는 것이 중요하다고 보았다.

Hauger(1995)는 학생들의 변화율 개념을 총체적 변화율, 구간의 변화율, 한 점에서의 변화율의 세 가지 유형으로 구분하여 유형별 특징을 설명했다. 이 연구에서 Hauger(1995)는 학생들이 초기에 함수적 상황에 대한 구간을 크게 몇 개의 부분으로 나누어 총체적 변화율을 인식하였으며, 연속적인 점 사이의 수직적인 변화를 인식하거나 기울기를 언급하면서 구간에서의 변화율을 인식하고 또한 학생들은 한 점에서의 변화율에 대해 접선의 기울기를 인식하거나 한 점으로 접근하는 간격이 점점 좁혀가는 순간 변화율의 개념을 이해하는 것을 관찰하였다. 특히 한 점에서의 변화율에 대한 의미에 대해 미분에 대한 사전 지식에 따라 한 점에 접근하는 방식이 매우 다른 것을 발견했다. Hauger(1995)의 논의를 현 교육과정에서의 변화율 학습과 비교해 볼 때, 할선의 기울기의 극한값을 순간변화율로 도입하는 현 교육과정의 방식은 구간에서의 변화율에서 시작하여 한 점에서의 변화율로 지도하는 것으로 볼 수 있으나, 그 이전에 초기 함수적 상황에 대한 구간을 크게 몇 개의 부분으로 나누어 총체적 변화율을 인식하는 과정에서 여러 구간들로 함수의 변화를 인식했음에도 불구하고 굳이 여러 구간들 중에서 하나의 구간을 택한 다음 그 하나의 구간에서 할선의 기울기로 순간변화율을 유도하는 방식이 학습자 입장에서 바람직한 것인지 고민할 필요가 있다. 신은주(2006)가 고등학교 교육과정에서 미적분 학습 과정에서 변화에 대한 관점이 배제된 상태에서 대수적 접근을 강조하고 있다는 점을 지적한 것 역시 Hauger(1995)의 총체적 변화율에서 구간에서의 변화율로 넘어가는 과정에 대한 부분이 생략된 것에 대한 지적과 같은 맥락에서 이해할 수 있다.

Zandieh(2000) 역시 입력 값과 출력 값의 공변 관계의 관점이 함수의 미분 개념을 이해하는데 필수적이라고 제안하였으며, 특히 도함수의 개념은 무한한 입력 값에 따라 한 점에서의 계차 몫의 극한으로서의 출력 값이 나타나는 공변의 결과로 보았다. 또한 그는 접선의 초기 개

념이 적절하게 재구성되지 않는다면 두 양 사이의 관계에 대한 비율 개념이 미분계수와 연결되지 못한다고 주장하면서 미분계수의 기하학적 측면을 강조했다. 그러나 Zandieh의 접근 방식은 평균변화율과 극한 그리고 순간변화율을 기계적으로 결합하여 접근한 모습을 보이고 있는데, 학생들의 변화율 개념 학습에서의 어려움이 이러한 기계적 결합과정에서의 장애로만 볼 것인지에 대하여는 고민할 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 교수 실험

교수 실험법은 질적 연구 방법의 하나로 질적 연구의 기본 전제와 특징을 그대로 지닌다. 즉 복잡한 교육 현상 속에서 행동하는 연구대상을 단순히 그 안에 있는 요인들의 성질을 각각 분리하여 분석하는 것만으로는 설명할 수 없는 복잡한 체계로 간주하고, 이 체계가 지속적으로 주변 상황에 반응, 적응해가는 체계를 연구하는 것을 그 목표로 한다(Lesh & Clarke, 2000). 또한 교수 실험법은 교수·학습 상황에서 학생들의 사고에 대한 개념적 분석을 토대로 참여 학생들의 수학적 사고 및 학습과정을 직접 경험하고 이를 통해 학생들의 수학지식 발달에 관한 역동적 모델을 만드는 것이 그 궁극적인 목적이다(Steffe & Thompson, 2000).

본 연구의 교수 실험을 위해 연구자들은 학생들의 변화에 대한 인식을 관찰하기 위한 초기 과제를 공동으로 구성하고, 학생들 간의 의사소통만으로 해결되지 않는 상황에서만 적절한 수준으로 개입하여 발문을 제시하는 방식으로 교수 실험을 진행하였다. 또한 각 차시가 끝나고 다음 차시를 진행하기 전에 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 분석하고 이를 토대로 다음 교수 실험을 설계하였다. 이 때, 교수 실험 진행은 교직경력 10년차 이상인 수학교사가 진행하였으며, 또 다른 연구자는 관찰자로 참여하여 교수 실험의 완성도와 질을 높이고 방향성을 제시하는 역할을 하였다.[3] 본 연구에서 교수 실험은 총 7차시로 구성되었고, 참여 고등학생의 2학년 1학기 '수학Ⅰ'과정이 종료된 후, 여름방학 기간에 시작하여 2학기 '수학Ⅱ'과정의 함수의 극한과 연속 단원과 미분 단원의 교수학습이 이루어지기 전까지 약 두 달간의 기간 동안 이루어졌다. 이차함수, 지수함수의 맥락에서 참여 학생들이 가지고 있는 초기 변화율에 대한 개념을 파악하고자 했던 1~3차시에는 네 명의 학생들이 참여하였고, 이 후 주어진 함수의 변화(의 세기)를 나타내는 새로운 함수를 구성하는 것을 목표로 한 4~7차시 활동에는 한 명(개인 사정으로 불참)을 제외한 세 명의 학생들이 참여하였다. 세 명의 학생은 각각 함수의 변화양상을 표현하는 발달과정의 특징적인 모습을 보여주었는데, 이차함수의 변화양상을 직선과 구분하여 표현하기는 했으나 변화량 관점에서 변화를 인식한 학생과 이차함수의 변화양상을 변화율 관점에서 표현한 학생 및 이를 지수함수에까지 적용한 학생도 있었다. 이 들 중에서 본 논문에서는 끝까지 교수실험에 참여한 학생 중 한 명인 민선이 전체 교수실험을 통하여 이차함수와 지수함수의 변화양상을 어떻게 구분하고 표현해 나가는지에 대하여 초점을 맞추어 제시하기로 한다. 특히 본 연구에서는 세 명의 학생의 표현 발달 과정을 상호 비교하여 분석하기보다는 이차함수의 변화를 표현하는 과정에서 명확한 발달 단계의 변화를 보인 민선 한 명을 대상으로 집중적으로 분석할 것이다. 한 명의 연구대상에 대한 관찰과 분석이 일반적인 연구방법은 아니지만 개인의 표현 발달 과정에 대한 세밀한 분석과 연구자들의 통찰력에 근거하여 유의미한 결론을 도출할 수 있다는 장점이 있다.

2. 연구 대상자의 특성

민선은 자연과학계열 고등학교 2학년 학생으로 민선이 속한 학교는 경기도 용인시에 위치한 인문계 고등학교이다. 민선을 포함한 네 명의 학생들이 선택된 이유는 교수 실험을 진행한 교사가 평소 수업에서 자신의 의견에 대하여 잘 설명할 수 있으며 내신 등급이 서로 상이한 학생들을 선정하고자했기 때문이다. 이러한 의도적인 표본선정은 연구자가 발견과 이해 및 통찰력을 가지고 있다는 전제하에 연구자가 많은 정보를 얻을 수 있다는 장점이 있다. 이 학생들은 교수 실험 이전에 '수학1'과목에서 행렬, 지수함수와 로그함수, 수열, 수열의 극한 단원을 학습하고, 1학기 '수학Ⅰ' 수업에서 지수함수를 Geogebra로 그리는 것을 관찰하거나 Spreadsheet을 이

3) 여기서 교수 실험을 진행한 수학교사는 제 2저자를 의미하며, 관찰자로 참여한 연구자는 제 1저자를 의미한다.

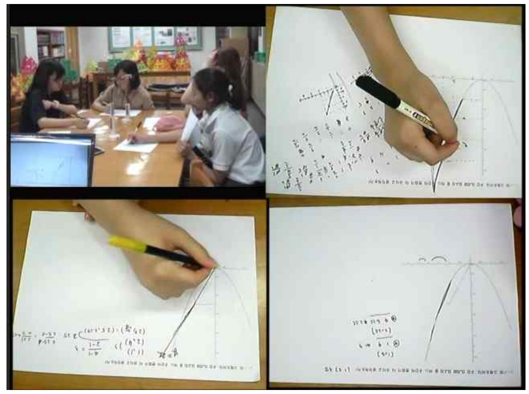
용하여 수열의 극한값을 추측해 본 경험을 가지고 있으며, 지수함수의 정의와 성질을 이해하고 있는 것으로 파악되었다.

민선의 학업성취수준은 1학년 내신 3.5등급, 모의고사 3등급, 2학년 1학기 내신 4등급, 모의고사 3등급이며, 사전 면담을 통하여 선행학습의 정도를 파악한 결과 2학기 내용 중 함수의 극한에 관한 지식은 있지만, 연속, 미분계수, 접선, 도함수에 대한 지식은 없는 것으로 판단되었다. 교수 실험을 진행한 교사는 민선에 대한 수학 전 영역에서의 학습능력을 중 수준으로 평가했으나, 본 연구에서 탐구하고자 하는 민선의 이차함수와 지수함수의 함수적 상황을 이해하는 능력 및 변화율에 대한 해석 능력이 민선의 학업성취도와 반드시 동일한 수준이라고 볼 수는 없으므로, 교수실험을 시작하기 전 민선의 학업 성취도 결과 및 사전 학습에 대한 정보와 민선을 지도한 경험이 있는 교사와의 면담을 근거로 선행 연구(Confrey & Smith, 1994; Ellis, 2011; Thompson,2008)에 비추어 민선의 함수 관련 지식을 파악하였다.

4. 자료 수집 및 분석 방법

교수실험의 특성 상 자료수집 과정에서 사용될 교과과정의 내용이나 해당 과정에 대한 시간 분배를 미리 완벽하게 계획할 수 없다. 교수실험에서는 이전의 교수실험 중 일어난 일들을 기반으로 하여 다음 교수실험을 구성하게 된다. 따라서 연구자가 분명히 다루고자 하는 특정한 수학적 영역과 주제를 가지고 있다 하더라도 세부적인 교과과정의 구성은 유연하게 조정 가능하며, 이러한 과정을 통해 연구자 자신의 해당 교육과정의 수학적 지식에 대한 통찰력도 증가되고, 결국 학생들의 실제 학습과정을 반영한 새로운 교과과정을 구성할 수 있게 된다(Confrey & Lachance, 2000).

본 연구에서는 3명 참여 학생에 대한 각 학생의 수학적 활동 및 기록을 촬영하기 위한 실물화상캠 3대와 전체 교수실험을 담을 비디오카메라 1대로 수업을 촬영했다. 이 비디오 자료들은 별도로 녹음된 오디오자료와 함께 하나의 비디오 파일로 편집되어, 전사과정을 통해 자료 분석 작업에 사용되었다 ([그림 1] 참고).



[그림 1] 편집된 비디오 파일의 예
[Fig. 1] An example of edited video files

또한 학생들이 교수실험 동안 작성한 활동지, 연구자들이 작성한 현장노트, 다음 교수실험 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지도 수집되어 연구수행 과정 중 일어나는 교수학적 결정의 수정과 변화의 양상을 기록하고 이를 기초로 교수실험 중 발생했던 수정과 재구성의 이유를 'Ⅳ.결과분석' 부분에 함께 기술하였다.

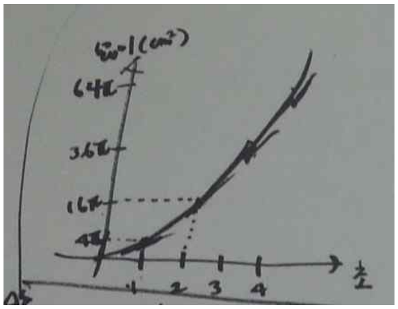
Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 함수의 변화 양상에 대한 인식

1) 직선이 아닌 곡선 모양의 그래프가 되어야 하는 이차 함수적 증가

> [과제1] 기름이 물 위에서 퍼져 나가는 모의실험을 하였다. 수조에 떨어뜨린 기름이 원 모양을 이루며 반지름이 1초에 2cm씩 증가하였을 때의 원의 넓이에 관한 함수의 그래프를 그려라. (고등학교 수학 Ⅱ, 금성 교과서)

물 위에 떨어뜨린 기름이 시간에 따라 원을 그리며 퍼져나가는 상황을 그래프로 나타내어야 하는 문제인 [과제1]을 해결하기 위해 민선은 우선 대응표를 만들어 1, 2, 3, 4초에 해당하는 반지름의 길이와 그에 따른 원의 넓이를 계산하고, 시간을 x축, 넓이를 y축으로 하는 좌표평면위에 계산한 값을 좌표값으로 하는 점들을 찍은 뒤, 그 점들을 부드러운 곡선모양으로 이어 함수의 그래프를 그렸다 ([그림 2] 참고).



[그림 2] 시간과 퍼져나가는 원모양 기름띠의 넓이와의 관계를 나타낸 민선의 그래프
[Fig 2] Min-Seon's graph for representing the relationship between time and area of circle-shaped oil bands

시간과 물 위의 기름이 퍼져가면서 생기는 원의 넓이가 연속적으로 변하는, 연속적 변량 사이의 관계를 파악하기 위해 민선은 정의역이 자연수일 때의 함숫값을 살펴보는 이산적 방식으로 접근하고, 다시 이를 근거로 연속적 변량끼리의 관계를 나타내는 연속함수 그래프를 그림으로써 연속적인 상황으로 환원하는 모습을 보였다. 왜 곡선 모양으로 그렸냐는 교사의 질문에 민선은 "계산해 보면 간격이 똑같이 나오는 게 아니라 갈수록 점점 처음 것보다 그 차이가 점점 커져요. 앞에 것보다. 그래서 그래프를 그리면 곡선으로 나와요."라고 대답하였고, 다음 [대화1]은 왜 곡선모양의 그래프가 나오는지에 대한 관찰자와 민선과의 대화내용이다.

대화1

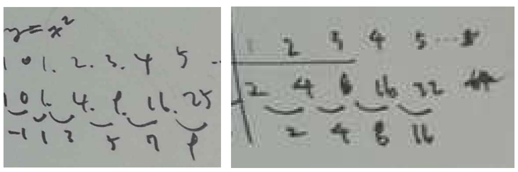
관찰자: 근데 부드럽게 그리는 방법이 이제 꺾인 점이 없어야 된다 라는 거는 부드럽게 변해야 된다 라는 이해가 가는데 그럼 몇 개 점에서 부드럽게 이을 수 있는 방법은, (칠판위에 점 세 개를 찍고 곡선으로 이으며) 이렇게 이렇게 이렇게 해서 지금 꼭 이런 어떤 하나의 모양으로 나오는 게 아니라 부드럽게 하면 그 부드러운 각도는 다 다를 수 있는 거 아니에요? 자기가 그렸다 라는 게 그 부드러운 거를 다 정확하게 표현했다 라는 보장이 어디에 있죠? 그냥 궁금해서...

민선: 근데 1초 2초마다 곡선이 (자신의 그래프 위의 점들을 직선모양으로 이으며) 이렇게 이렇게 만약에 그릴 수 있다고 생각하면은 그러면은... 이게 규칙이 없는 거잖아요. ([0,1]구간과 [1,2]구간을 가리키며) 그러니까 이거와 이거 사이의 규칙이... 그러니까 일정하게 규칙이 쭉 적용되는게 아니잖아요. 근데 얘는 1초에 2cm씩 일정하게 반지름이 증가한다는 규칙이 있는데, 그러면은 이게 넓이에도 그게 일정하게 넓이가 어떤 규칙이 있게 넓이가 변할 거 아니에요. 그럼 기울기도 그 규칙에 맞춰서... 점점 증가하는 걸로 이렇게 그렸는데.

민선의 대답에서 주목할 점은 '갈수록 점점 처음 것보다 차이가 점점 커진다.'라는 표현인데, 이것은 일정하게 증가하는 양상을 나타내는 직선 모양의 그래프가 될 수 없다는 것에 대한 설명은 될 수 있지만 왜 그러한 곡선 모양이 되는지에 대한 정확한 대답이라고 할 수는 없다. 또 한 가지는 이어지는 관찰자와의 대화에서 반지름이 일정하게 증가하므로 넓이도 어떤 규칙이 나타나고 기울기도 그 규칙에 맞춰서 점점 증가한다고 표현한 점인데, 민선의 이러한 표현에서 추측할 수 있는 것은 1) 각 구간이 서로 다른 직선 모양으로 나타날 경우 반지름과 넓이의 연속적 변화를 표현할 수 없다는 점과 2) 넓이도 (일정하게 증가하는 것은 아니지만) 무언가 규칙이 있는 변화양상이 있을 것이라고 직관적으로 나마 파악하고 있다는 점이다. 다시 말해 민선은 일정하게 증가하는 양상을 표현하는 직선모양의 그래프와 자신의 그래프를 구분하여 설명할 수는 있지만 이차함수와 지수함수 같은 그래프가 곡선 모양으로 표현되는 변화 양상 사이의 차이를 설명할 수 있는 더 세밀한 구분, 이를 테면 '이차함수는 변화율이 일정하게 증가하는 함수이다'와 같은 정교한 구분을 할 수 있는 수준이라고 볼 수는 없다. 이러한 판단은 이 후 교사가 무엇이 일정한지 말해보라는 질문을 했을 때, 민선을 포함한 어떤 학생도 대답하지 못했다는 점에서 더욱 뒷받침 될 수 있었고, 따라서 연구자들은 다음 교수실험의 과제로 이차함수와 지수함의 변화 양상을 구분해 보는 활동을 해 보기로 하였다.

2) $y=x^2$의 그래프와 $y=2^x$ 그래프의 비교

$y=2^x$이 $y=x^2$의 변화 양상과 어떻게 다른지 각 함수의 변화량에 대해 생각해 보라는 교사의 질문에 민선은, $y=x^2$의 경우 $(1,1^2),(2,2^2),\cdots$과 같이 정의역의 원소와 그 원소에 대응하는 함숫값을 순서쌍으로 생각하여 좌표평면 상에 점을 찍고 그 점들을 곡선으로 잇는 방식으로 그래프를 그렸다. $y=2^x$의 그래프도 같은 방법으로 그린 뒤 좀 더 구체적으로 변하는 두 변량사이의 관계에 대한 규칙을 찾기 위해 x값이 1, 2, 3, ... 등으로 변해감에 따라 각 x의 값에 대응하는 함숫값을 적어서 아래 [그림 3]과 같은 대응표를 만들고, 구한 함숫값 사이의 차를 구하였다.



[그림 3] $y=x^2$과 $y=2^x$의 변화양상을 파악하기 위해 민선이 만든 대응표

[Fig. 3] Min-Seon's tables for investigating patterns of change of $y=x^2$, $y=2^x$

이에 관찰자는 이차함수의 그래프와 지수함수의 그래프에서 정의역이 양수인 부분 즉 y축의 오른쪽에 있는 그래프의 모양이 비슷하다는 점을 민선에게 확인시키고 두 그래프를 구분할 수 있는지 질문하였는데 다음은 이에 대한 관찰자와 민선과의 대화이다.

대화2

관찰자: 이차함수하고 지수함수하고 되게 비슷한 부분이 있는데 다르다면 그 다르다는 거를 밝혀낼 수 있는 방법이 있어야지 이 두 개가 다르다는 거를 이야기 할 수 있을 거 같고....

민선: (자신이 만든 대응표를 계속 응시하다가 무언가를 발견한 듯) 아, 지수함수는 y값의 계차수열을 해석해 보면은 등비수열인데, 아닌가, 어 맞네. 이차함수는 y값의 계차를 생각해 보면 등차수열이에요. 아닌가?

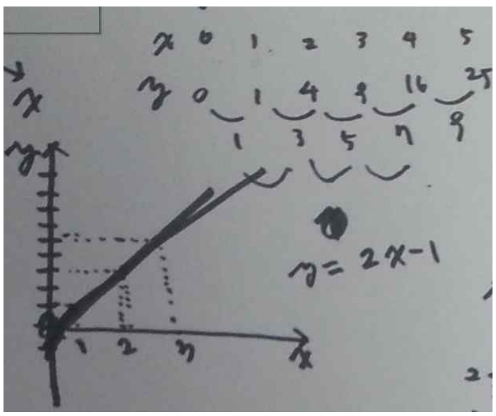
민선이 무언가를 발견한 듯 감탄사를 동반한 약간 격앙된 톤으로 이야기 한 것이나, 중간 중간에 확실하지 않은 듯 '아닌가?'라는 식의 반문을 하였다는 것은 자신이 기술한 내용이 (민선의 입장에서는) 새로운, 이전에 알지 못했던 사실이었음을 추측해 볼 수 있다. 이렇게 민선이 이차함수와 지수함수의 변화양상의 차이를, 이차함수의 함숫값의 차(민선은 이를 계차수열이라 표현하였다)는 등차수열을 이루고 지수함수의 함숫값의 차는 등비수열이라는 식으로 구분해 내었다는 것은 두 가지 중요한 의미가 있다. 첫째, 모두 곡선 모양의 그래프로 그려지는 이차함수와 지수함수를 구분해 내었다는 것은 이제 민선이 이차함수(또는 지수함수)를 단순히 x가 일정하게 증가할 때 y값이 일정하게 증가하는 직선 형태의 그래프로부터 구분해 내는 수준이 아니라 곡선 형태의 그래프 사이에서도 자신의 수열에 관한 지식을 사용하여 서로 다른 변화양상을 표현해 냄으로써 더욱 세밀한 수준의 구분을 할 수 있게 되었다는 점이다. 둘째, 변화양상을 x가 일정하게 증가함에 따라 y값은 점점 더 많이 증가한다는 식의 개략적 접근 방식에서 여러 수치를 활용하여 더 구체적이고 분석적으로 변화양상을 표현해 낼 수 있게 되었다는 점인데, 이것은 이후 민선이 이차함수의 변화를 나타내는 새로운 함수를 만들어 내는데 중요한 역할을 하는 개념적 토대가 되기 때문에 매우 중요한 전환점이라 할 수 있다. 민선은 이후 $y=x^2$의 변화를 나타내는 새로운 함수를 만들어 보라는 말에 대하여, 변화양상을 파악하기 위해 사용했던 위와 같은 방식에서 출발하여 $y=x^2$의 변화를 표현하는 함수를 일정한 덧셈적 증가로 표현했다. 다시 말해 일차함수와 같이 나타낼 수 있다는 것을 깨닫게 된다. 물론 함숫값의 변화량에만 주목하는 것은 그 한계가 명백하긴 하였지만 $y=x^2$의 변화를 표현하는 함수라는 관점에서, $y=x^2$의 도함수를 $y=x^2$으로부터 이끌어 내는데 그 출발점 역할을 한 것이다. 더욱 자세한 내용은 다음 2절에서 다루기로 한다.

2. 함수의 변화를 나타내는 새로운 함수의 구성 과정

1) 변화량을 함숫값으로 하는 함수의 구성

연구자들은 전 수업시간에 민선이 이차함수의 변화를 기술할 때 대응표상에서 구한 함숫값들을 수열로 보고 이 수열의 계차수열이 공차가 2인 등차수열이 된다고 표

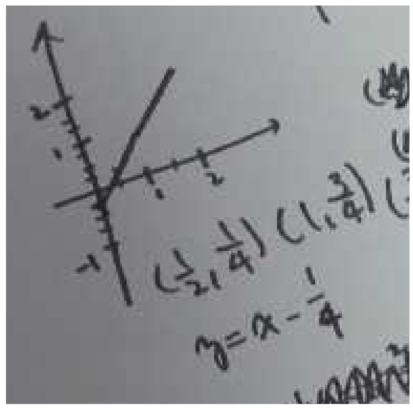
현한 것을 상기시키고 이를 이용하여 $y=x^2$의 변화를 그래프로 표현해 줄 것을 제시했다. 민선이 $y=x^2$의 함숫값의 차들을 함숫값으로 하는 새로운 함수를 그래프로 그리려고 했을 때 처음 부딪힌 문제는 '이 값들에 대응하는 새로운 함수의 정의역의 값이 무엇이 되어야 하는가?'였다. 즉 새로운 함수의 정의역이 $1, 2, 3, \cdots$이 될 때 대응하는 함숫값을 무엇으로 해야 할지 고민하는 모습을 보였는데, 예를 들어 $y=x^2$의 정의역이 1에서 2로 변할 때의 함숫값의 차, 즉 변화량은 3이 되는데 3은 구간 $1 \le x < 2$에서의 변화량이므로 새로운 함수의 정의역 1과 변화량 3을 대응시켜야 할지 2와 대응시켜야 할지 고민하는 모습을 보였다([그림 4]의 대응표 참고). 한참을 고민하던 민선은 결국 구간의 끝점 중 하나를 선택하여 함숫값과 대응시키는 방식으로 좌표 $(1,1), (2,3)$ 등의 점들을 구한 다음 서로 연결하여 직선으로 표현하고 $y=2x-1$이라는 식을 얻었다 ([그림 4]의 그래프 참고).



[그림 4] $y=x^2$에 대한 대응표와 $y=x^2$ 변화를 나타내는 그래프 (분할간격이 1일 때)

[Fig. 4] A table for $y=x^2$ and a graph to represent the change of $y=x^2$ (when the unit interval is 1)

이어서 교사는 구간의 폭을 1에서 $\frac{1}{2}$로 바꾸었을 때 $y=x^2$의 변화를 나타내는 그래프를 그리도록 요구하였고, 이에 대해 민선은 x의 값을 $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$의 순서로 $y=x^2$에 각각 대입하여 구한 함숫값 $0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4$에 대하여 함숫값의 계차를 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$로 구했다. 그 다음 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$을 새로운 함수를 위한 정의역으로 보고 함숫값의 계차 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$를 각각 대응하는 함숫값으로 보아서 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$의 순서쌍을 만들었다. 이 순서쌍을 좌표평면 위에 점으로 찍은 다음 직선으로 이어 새로운 함수 $y=x-\frac{1}{4}$을 구하였다 ([그림 5] 참고).



[그림 5] $y=x^2$의 변화를 나타내는 그래프 (분할 간격이 $\frac{1}{2}$일 때)

[Fig. 5] A graph to represent the change of $y=x^2$ (when the unit interval is $\frac{1}{2}$)

정리하면 위 [그림 4], [그림 5]에서 보이는 바와 같이, 민선은 정의역의 분할 간격을 1로 하였을 때는 이차함수의 변화를 나타내는 그래프를 $y=2x-1$로 구하였고, 분할간격이 $\frac{1}{2}$일 경우에는 $y=x-\frac{1}{4}$로 구했다. 즉, 분할 간격이 1일 때와 비교하여 분할 간격이 반으로 줄어든 $\frac{1}{2}$일 때, 이차함수의 변화를 나타내는 직선의

기울기도 반으로 줄어든 셈인데, 이에 대해 교사는, 동일 한 함수의 변화를 나타내었는데 구간의 폭을 1에서 $\frac{1}{2}$로 조정했다고 하여 그 변화를 나타내는 함수의 직선의 기울기가 다르게 나타난 것이 이상하지는 않은지 혹은 그 이유가 있는지 질문하였으나 민선은 별다른 문제의식을 갖고 있지 않은 것으로 보였다.

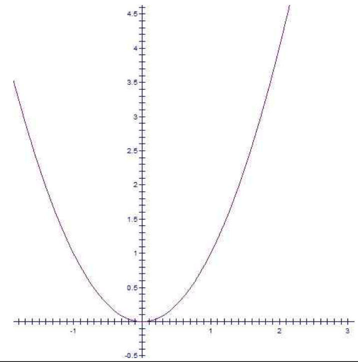
이와 같이 주어진 함수의 함숫값들의 차를 함숫값으로 하여 원래 함수의 변화를 나타내는 새로운 함수를 구성하려는 민선의 시도는 몇 가지 문제점을 드러내었다. 우선 한 구간에서의 연속적인 변화를 나타내는 변화량(함숫값)을 자연수와 같은 이산적 값들(정의역)과 대응시키는, 즉 구간과 한 점을 대응시키는 부자연스러움이 발생하였고, 두 번째로는 주어진 하나의 함수에 대해 대응표를 만들 때 함수의 정의역의 분할 간격이 달라지면 원래 함수의 변화를 나타내는 함수도 다르게 구성되어 주어진 하나의 함수에 대응되는, 그 함수의 변화를 나타내는 유일한 함수를 구할 수 없다는 점이다.

2) 주어진 함수의 변화를 나타내는 함수의 함숫값으로서의 변화량 또는 변화율

1절의 수업에서 드러난 민선의 접근 방식의 문제점[4)] 에 대해 연구자들 간의 논의 결과 함수의 변화를 표현하는 새로운 함수의 함숫값으로 '변화량'이 아닌 '변화율'을 고려하도록 유도하는 과제를 고안하여 제시하기로 하였다. 변화량이 아닌 변화율을 고려하게 되면 함수의 y값 뿐만 아니라 x값의 변화도 고려하게 되고, 그렇게 되면 앞에서 지적된 두 가지 문제점들(구간과 점의 부자연스러운 대응문제와 하나의 함수에 대해 분할 간격에 따라 서로 다른 변화를 나타내는 함수들이 도출되는 문제들)이 해결될 수 있을 것이라 기대하였다.

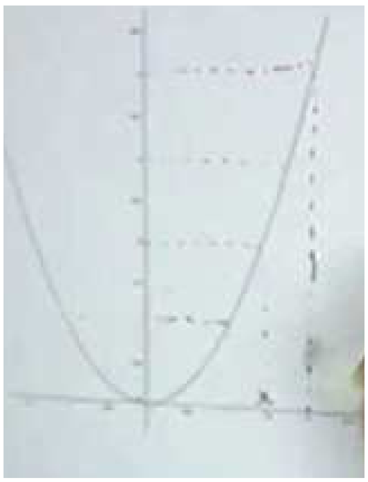
4) 위에서 지적된 문제점은 민선 뿐 아니라 참여한 모든 학생들에게 공통적으로 나타난 모습이었지만 본 논문에서는 민선에게 초점을 맞추어 서술하도록 한다.

[과제2] 다음은 $y=x^2$의 그래프이다. 구간 [1,2]와 [2,2.5] 중 어느 구간이 변화가 더 크다고 생각하는지 설명해보아라.



위의 [과제2]에서 '변화가 더 크다'의 의미는 관점에 따라 해석이 달라질 수 있으며 그에 따라 답도 달라질 수 있다. 만일 '변화가 크다'라는 의미를 얼마나 많이(how much) 변했는가에 기준을 둔다면 함숫값의 차이가 클수록 변화가 큰 것으로 인식하여 구간 [1,2]에서의 변화가 더 크다고 답할 수 있고, 얼마나 빨리(how fast) 변하는가, 즉 변화의 강도에 기준을 둔다면 함숫값의 변화와 그에 대응하는 정의역의 변화량을 동시에 고려한 변화율이 클수록 변화가 큰 것으로 인식하여 구간 [2, 2.5]에서의 변화가 더 크다고 답할 수 있는 과제이다. [과제2]의 의도는 학생들로 하여금 주어진 함수의 변화를 나타내는 함수를 구성할 때 변화량이 아닌 변화율을 함숫값으로 고려하는 것이 원래 함수가 얼마나 빨리 변하는지를 나타내는데 더 적합하다는 것을 인식하도록 하려는 것이며, 이것은 낙하 운동과 같은 변화율이 일정하게 증가하는 시간-거리 함수가 주어졌을 때 운동의 강도, 즉 운동하는 물체의 속도의 그래프를 구하려고 했던 함수 또는 도함수의 역사발생적 측면과도 일치한다. 민선은 [과제2]에 대하여 처음에는 $x=1, 2, \frac{5}{2}$에서 $y=x^2$의 그래프와 교점이 생기도록 y축에 평행한 점선을 그린다음, 함숫값을 각각 계산을 통하여 점의 좌표를 구했다. 점의 좌표를 구한 다음에는

$\dfrac{\frac{25}{4}-\frac{16}{4}}{\frac{5}{2}-2}=\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{9}{2}$의 계산(구간 [2, 2.5]에서의 평균 변화율)을 거쳐 구간 [2, 2.5]에서의 변화가 더 크다고 답을 했다. 함숫값의 변화만을 고려하여 구간 [1, 2]에서의 변화가 더 클 것이라고 답할 것이라는 연구자들의 예상과는 달리 민선은 분모에 해당하는 정의역의 변화와 분자에 해당하는 함숫값의 변화를 함께 고려하여 변화의 크기를 인식하는 것으로 보였다. [그림 6]은 민선이 처음에 $x=1,2,\frac{5}{2}$에서 y축과 평행한 점선을 그린 장면인데, x축에 찍힌 (1,0), (2,0), (2.5,0)의 세 개의 점에 의하여 분할된 두 구간의 길이가 서로 다르다는 것이 시각적으로 명확하게 드러난다.



[그림 6] 변화의 크기를 비교하기 위해 민선이 그린 점선
[Fig. 6] Min-Seon's dot-lines for comparing quantities of change

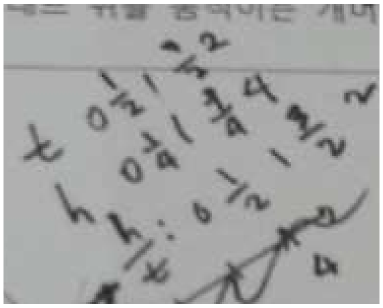
이전 수업에서 민선은 함수의 변화를 파악할 때 대응표를 그려서 '수열에서 규칙 찾기'와 유사한 방식으로 함숫값의 변화를 인식했다. 그러나 지금 장면에서 민선은 이전의 방식과 달리 함숫값의 변화량과 대응하는 정의역의 변화량의 비인 평균변화율을 변화의 크기를 나타내는 양으로 인식하고 두 구간의 평균변화율을 비교하였다. 이는 분명 두 변량의 관계를 나타내는 함수의 변화양상을 인식하는 방식에 있어서 이전과는 다른 관점으로 전환하기 시작하였음을 보여준다. 이전의 수열적 접근에서는 x축에서의 변화의 양을 1 또는 $\frac{1}{2}$간격으로 각각 잡았으나 동일하게 등간격으로 대응표가 만들어졌다는 측면에서 변화 양상을 표현하는데 정의역 구간의 길이가 어떻게 고려되어야 하는지 생각하기 어려웠지만 [과제2]의 경우에는 [그림 6]과 같은 그래프상의 비교를 통해서 비교하는 대상의 정의역의 구간의 길이가 다르다는 것을 쉽게 발견하게 되고, x축에서의 구간 길이가 함수의 변화에서 고려 대상이 되어야 함을 발견한 것으로 보인다.

3) 평균변화율을 함숫값으로 하는 그래프의 구성

연구자들은 [과제2] 이후 동일한 함수 상황에서 정의역의 구간 폭을 달리했을 때 변화를 나타내는 함수를 다르게 표현했던 민선의 반응에 변화가 있는지 확인하기 위해 [과제3]을 제시하였다. [과제3]은 정의역의 구간이 [0,2]로 주어져 있고 개미가 어떤 물체 위를 올라가는 구체적인 상황이 주어지긴 했지만 $y=x^2$의 함숫값의 변화 세기(intensity)를 나타내는 문제와 같은 답을 요구하는 문제이다.

[과제3] 어떤 물체 위를 올라가는 개미가 이동한 시간 t(초)와 거리 h(m)는 $h=t^2$인 관계를 만족한다. 0초에서 2초 사이의 개미의 운동 속도의 그래프를 그려보아라.

[과제3]에 대하여 민선은 처음에는 정의역을 $0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$로 택한 다음 대응하는 함숫값 $0,\frac{1}{4},1,\frac{9}{4},4$를 구하여 대응표를 만들고 정의역의 값(시간)으로 대응하는 함숫값(거리)을 각각 나누어 원점으로 부터의 누적 속도를 얻었다. 그리고 얻어진 누적 속도 $0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$을 함숫값으로 하는 함수 $y=x$를 구성하였는데 ([그림 7] 참고), 이 과정에서 얻어진 새로운 함수의 그래프의 기울기가 2가 아닌 1이 된다는 사실에 당황하는 모습을 보였다.

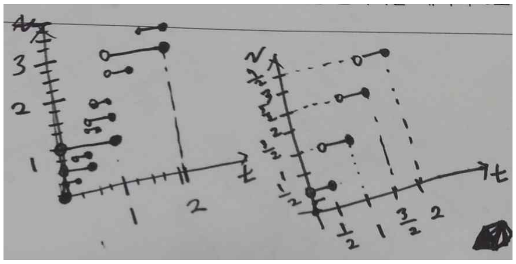


[그림 7] 민선의 누적 속도를 구한 대응표
[Fig. 7] Min-Seon’s table for calculating cumulative speed

민선이 혼란스러워 하자 교사는 누적 속도(누적 평균변화율)가 아닌 구간에서의 속도(구간 평균변화율)에 주목하도록 도우려 하였다.

대화3
교사: 그러면 이게 너희들이 사실은 시계가 있고 1초 때마다 얘 속도를 얘 어디 있을까 이렇게 잴 수 있지. 시간이 1초 흘렀고 시간을 딱 보고 얘 위치 확인하고 하면 1초 때 확인할 수 있지?
민선: 네.
교사: 친구들이 그러면 지금 좌표를 잡은 게 0.5초 지났을 때 딱 위치를 확인할 수 있지, 맞지. (다른 학생의 일차함수 $y=x$의 그래프의 점 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$을 가리키며) 그래서 속도를 잡은 거잖아.
민선: 네.
교사: 그러면 사실은 이 구간 안에서 속도를 잡은 거지. 사실 이 구간 안에서 속도가 변하고 있긴 한데, 이 구간 안에서 속도를 결정한 거지, 이 속도야 라고 그치. 그러면 그 의미가 (다시 다른 학생의 일차함수 그래프의 점 $(0,0)$에서 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 사이를 펜으로 그으며) 이렇게 변하면 안 되는 거잖아. 왜냐하면 중간과정은 모르고 0.5초 때마다 시계를 보고 얘 위치를 보고 속도를 계산한 거잖아. (다시 다른 학생의 일차함수에서 점$(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 사이를 손가락을 잇는 시늉을 하며) 그러면 여기에 이은 거의 의미가 결국은 (점 $(0,\frac{1}{2})$과 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$을 펜으로 이으며) $\frac{1}{2}$로 일정하다는 의미 아니야? 사실 그 안에 있는 개미의 운동을 보는 게 아니라 내가 0.5초마다 관찰하는 거잖아?
민선: 아~
교사: 그럼 이렇게 나는 모르는, 모르는 상황이잖아. 나는 얘가 속도가 (다시 점 $(0,\frac{1}{2})$과 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$을 펜으로 이으며) $\frac{1}{2}$이라고 관찰했기 때문에
민선: 네~ 그렇죠.
교사: 이 속도를 일정하게 두고 있는 거겠지.
민선: 그러니까 (점 $(0,\frac{1}{2})$과 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$을 펜으로 이으며) 이 사이에는 속도가 일정하게 같다고 가정을, 생각을 하고 한 거죠.
다른 학생: (오른쪽 검지로 계단 모양의 선분을 그래프 위에 표현하며) 그럼 가우스야?

위의 [대화3]에서와 같이 구간에서의 변화에 해당하는 ‘구간 평균변화율’과 대응하는 정의역의 구간을 고려하여 함수의 그래프를 그리라는 직접적인 교사의 개입이 있었으나, 앞서 민선이 변화를 인식함에 있어 구간에서의 변화량을 구간에서의 시작점이나 끝점과 같은 하나의 이산적인 값과 대응시키려고 했던 것과 비교하여 이번 과정에서는 각 구간별로 얻어진 평균 변화율 값을 각 구간의 정의역의 모든 점과 대응시키는데 커다란 거부감을 보이지 않았고 결과적으로 y축과 평행한 직선이 불연속적으로 증가하는 계단형 그래프를 구성하게 된다([그림 8] 참고).



[그림 8] 민선의 1-간격, $\frac{1}{2}$-간격, $\frac{1}{4}$-간격으로 한 $y=x^2$의 속도그래프

[Fig. 8] Min-Seon's speed graph for $y=x^2$ with 1-unit interval, $\frac{1}{2}$-unit interval, and $\frac{1}{4}$-unit interval

또한 계단형 그래프를 구성한 이후, 교사가 알람을 더 짧게 맞추고 개미의 운동을 관찰하면 어떤 그래프가 얻어지게 될지 추측할 수 있는지 물었을 때 민선은 '직선으로 나올 것 같은데. 왜냐하면 이것, 이 막대... 뭐라 해야 되나, 그러니까 이게 점점 짧아 질 것 아니에요... 그러면 결국에는 그게 나중에는 선처럼 보일 것 같은데.'라고 답을 하였다. 민선이 추측한 '선'은 결국 $y=x^2$의 각 점에서 순간변화율을 함숫값으로 하는 함수, 즉 $y=x^2$의 도함수를 의미한다고 볼 수 있지만 민선이 $y=x^2$의 도함수를 구해내었다고 할 수는 없고 직관적으로나마 $y=x^2$의 변화를 아주 짧은 순간의 단위로 표현하면 직선의 형태로 나타내어짐을 인식했다고 볼 수는 있을 것이다.

V. 결론 및 제언

민선은 [과제1]에서 '갈수록 점점 처음 것보다 차이가 점점 커진다.'라는 표현을 사용하여 $y=x^2$의 그래프와 직선 형태인 일차함수와의 변화 양상이 다르다는 것을 구분하였는데, 이렇게 특정한 수치를 사용하지 않고 개략적인 증가나 감소 양상을 파악하여 두 변량사이의 관계를 해석하고 표현하는 질적 접근(Stroup, 2002)은 주어진 상황을 함수의 관점에서 인식하고 표현하는데 기본이 되는 매우 중요한 사고이지만 좀 더 분석적인 수준에서의 해석, 즉 서로 다른 곡선 형태로 표현되는 $y=x^2$의 그래프와 $y=2^x$의 그래프에 대한 차이를 명시적으로 구분하는 데는 충분하다고 볼 수 없다. 민선의 이차함수와 지수함수의 변화양상의 차이를 구분하는 활동에서는 정의역의 원소를 자연수로 선택하여 함숫값을 구한다음 대응표를 만들고 이를 바탕으로 함숫값을 수열과 같이 생각하여 이차함수는 등차수열로 지수함수는 등비수열로 수열의 규칙처럼 표현하는 '수열적 관점'이 드러났다. 공변의 관점에서 민선의 수열적 관점을 생각해 보면 정의역에 해당하는 양(quantity)이 변한다는 것을 인식하고 있고 그 변화에 따른 함숫값의 변화를 파악하려고 했다는 점에서 '대응적 관점'이 아닌 '공변적 관점'에서의 접근이라고 할 수 있을 것이다. 하지만 학생들이 대개 수열을 학습할 때 정의역이 자연수인 함수로 바라보기 보다는 수열의 변화 규칙이나 항과 항사이의 관계에 주로 집중하는 것과 마찬가지로 민선은 정의역이 등간격으로 증가하고 있다는 사실에 대해 명확하게 인지하지 않았거나 무시하고 함숫값의 변화에만 주목하는 모습을 보여주었는데 이런 점에서 민선의 공변추론은 공변(co-variation)의 '같이(co-)'변한다는 라는 의미가 약하다 할 수 있을 것이다.

함수의 변화 양상을 파악하는 과정에서 민선이 보여준 수열적 접근 방식의 공변추론은 주어진 함수의 변화를 나타내는 새로운 함수를 구성하는 활동에서도 그대로 나타났다. $y=x^2$의 변화양상을 나타내는 그래프를 구간의 폭을 달리하여 그리도록 했을 때 민선은 구간의 폭이 1일 때는 변화를 나타내는 새로운 함수를 기울기가 2인 직선으로 구했고, 구간의 폭이 $\frac{1}{2}$일 때는 변화를 나타내는 새로운 함수를 기울기가 1인 직선으로 구했다. 동일한 함수의 변화를 나타내는 함수가 구간의 폭에 따라 다르게 표현된 것에 문제가 없는지 확인하는 교사의 물음에 대하여 민선은 그러한 고민조차 하지 못했던 것이 확인되었다. 이에 연구자들은 민선이 함수의 변화를 표현하는 양으로 변화율이 아닌 변화량을 택하고 있다는 점이 해결되어야 할 문제점으로 분석하고, [과제2]를 통하여 정의역 구간의 변화를 함께 고려하여 함수의 변화를 인식하도록 유도하였다. [과제2]는 $y=x^2$의 그래프에서 구간 [1,2]와 구간 [2, 2.5]에서 어느 구간의 변화가 더 큰지 묻는 문제로서, 함숫값의 차이로 변화를 인식하

는 경우는 구간 [1,2]에서의 변화가 더 크다고 답할 수 있지만, 두 변량을 함께 고려해서 두 변량간의 비인 변화율을 그 기준으로 활용할 경우는 구간 [2, 2.5]에서의 변화가 더 크다고 답할 수 있는 문제이다. 민선은 다행스럽게 연구진의 의도대로 (하지만 예상과는 다르게) 처음부터 '얼마나 많이 변하는 지'보다는 '얼마나 빨리 변하는 지'에 주목하였고 구간 [2, 2.5]에서의 변화가 크다고 대답하였다. 민선은 구간에서의 평균변화율에 해당하는 할선의 기울기가 변화의 정도를 나타낸다고 생각하고 그 기울기 값을 서로 비교했는데, 이렇게 x축에서의 구간 길이가 함수의 변화에서 고려해야 할 중요한 요소임을 발견한 것은 민선이 좀 더 높은 수준의 공변 추론을 발달시켜 가는데 중요한 계기가 된 것으로 보인다. [과제2] 활동이후 민선은 함수의 변화를 나타내는 새로운 함수의 함숫값으로 구간에서의 평균변화율을 선택할 수 있게 되었고, 교사의 안내에 따라 함수의 변화를 나타내는 새로운 함수를 '평균변화율을 함숫값으로 갖는 계단형 그래프'로 구성했다. 이로 인해 민선은 동일한 이차함수의 변화에 대하여 분할 간격을 달리할 때 결과물에 해당하는 그래프의 직선의 기울기가 달라졌던 문제를 해결할 수 있었고, 평균변화율을 함숫값으로 갖는 계단형 그래프를 구성한 상태에서 분할 간격이 한없이 작아지는 극한의 상황을 고려했을 때 직선 형태의 일차함수 그래프를 얻을 것이라고 추론해 낼 수 있었다.

본 연구에서의 교수실험을 통하여 드러난 민선의 변화는 현재 학교 수학 수업에서 도함수 도입 방식과 비교하여 몇 가지 특징을 갖는다.

현 우리나라 교육과정에서 도함수 학습은 평균변화율에 대한 소개를 시작으로 순간변화율을 도입하고 미분계수를 이용하여 도함수를 설명하는 구조로 구성되어있다. 전체적인 맥락에서 변화율에 대한 도입 방식을 살펴보면 변화율 학습 이전에 수열과 수열의 극한을 학습한 다음, 함수의 극한과 연속 개념에 대한 학습을 거쳐 변화율을 학습하게 된다. 이러한 일련의 학습 과정은 이산변수에서 함숫값의 변화를 살펴본 다음 연속 변수에 대한 함숫값의 극한과 연속을 학습하는 구성으로 받아들일 수 있다. 그러나 그 이후 평균변화율 개념을 도입함에 있어, 구간 상의 두 점을 잇는 직선의 기울기로 평균변화율을 정의하는 것은 그 흐름상 어색한 구성으로 보일 수 있다. 학습자 입장에서는 함숫값에 대한 변화에 집중하여 학습을 하다가 갑자기 구간에서의 기울기에 해당하는 '평균변화율' 이라는 개념을 접하게 되는데 '평균변화율'의 정의 그 자체는 어렵지 않으나 왜 평균변화율을 배워야 하고 무엇을 위해 활용해야 하는지에 대해 고민할 수 있는 충분한 기회를 주어지지 않은 채 학습을 진행해야 하는 상황이 발생하게 된다. 평균변화율을 갑자기 도입하고 그 이후 구간에서의 할선의 기울기에 대한 극한으로 순간변화율을 도입하는 방식은 수학적으로 매우 간결해 보이고 도함수의 의미를 알고 있는 교사의 입장에서는 간단하고 쉬운 과정으로 보일 수 있으나 '왜'라는 고민 없이 주입되는 받아들이기 식의 수업은 학생들의 구성방식에 따른 전개가 아닌 전달하고자 하는 지식을 일방적으로 학습시키기 위한 구성 방식이라는 지적이 가능하다.

반면 본 교수실험에서는 민선이 수열적 관점으로 이차함수와 지수함수의 변화 양상을 구분하는 것에서 시작하여, 함수의 변화를 나타내는 새로운 함수의 함숫값으로 '얼마나 빨리 변하는 지'에 해당하는 '구간에서의 평균변화율'을 선택하게 되었고, 평균변화율을 함숫값으로 갖는 계단형 그래프를 구성해가는 일련의 과정을 관찰했다. 특히 민선이 비교적 자연스럽게 구성해낸 계단형 그래프의 경우 극한 개념을 도입하면 결과적으로 도함수에 해당하는 결과물을 얻은 것으로 볼 수 있다. 이는 현 교육과정과 완전히 다른 방식이라고는 할 수 없지만 평균변화율의 도입이 자연스럽고 변화의 세기를 표현하는 관점에서 도함수의 의미를 형성해나갔다는 점에서 현 교육과정의 구성방식에 시사해주는 바가 있다.

또한 현 교육과정에서의 도함수 도입 방식은 함수의 변화를 관찰하는 범위가 실수 전체 구간에서 특정한 하나의 구간에서의 변화(평균변화율)로 범위가 줄어들고 최종적으로는 구간의 시작점에 해당하는 한 점에서의 미분계수(순간변화율)로 바뀌면서 점점 범위가 줄어드는 특징을 보인다. 반면 교수실험에서 보여준 민선의 방식은 함수의 변화를 관찰함에 있어 실수 전체 구간에서 구간으로 바뀌고는 있지만 하나의 구간이 아닌 실수 전체의 범위를 분할한 구간 전체를 대상으로 하고 있다는 점에서 여전히 함수의 변화를 관찰하는 범위에 있어 실수 전체를 대상으로 유지한다는 특징을 보여준다. 즉, 민선

의 함수 변화 파악 방식의 장점은 구간에서의 평균변화율을 함숫값으로 갖는 새로운 함수를 구성하면서 함수의 변화를 지속적으로 전체적 관점에서 관찰할 수 있다는 점이며, 이는 함수의 변화(또는 함수로 표현되는 동적 변화)에 대한 정보를 담고 있는 새로운 수학적 대상으로서 도함수 구성의 의미를 살리는 새로운 방향을 제시해 준다.

본 연구는 도함수 학습에 대하여, 학습자의 개념형성 과정을 구체적으로 제시하는 학습모델을 구성하기 위한 기초연구이다. 향후 이러한 변화율 학습에 대한 학습자의 학습모델이 더욱 정교화되고 나아가 현 교육과정에서의 변화율 학습에 대한 구성 방식을 재고하여 새로운 교육과정을 제안하는데 기여할 수 있기를 기대해 본다.

참 고 문 헌

강향임 (2012). 수학적 모델링 과정에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수의 재발명과 수학적 개념 변화, 학교수학 14(4), 409-429.

Kang, H.I. (2012). Students' reinvention of derivative concept through construction of tangent lines in the context of mathematical modeling, *School Mathematics 14*(4), 409-429.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2011). 예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.

Kim, N.H., Na, G.S., Park, K., Lee, K.H., Chong, Y.O., & Hong, J.K. (2011). *Mathematics curriculum and textbook research for preservice and inservice teachers,* Seoul: Kyungmoonsa.

김원경, 김용대 (2002). 교사의 수학적 지식에 대한 연구 -함수 개념과 관련하여, 수학교육 41(1), 101-108.

Kim, W.K. & Kim, Y.D. (2002). A study on teachers' knowledge of mathematics – With respect to the concept of function, *The Mathematics Education 41*(1), 101-108.

계승혁, 하길찬 (2010). 우리나라 고등학교 수학 교과서에서 함수의 증감과 극대.극소를 설명하는 방식에 대한 비판적 논의, 수학교육 49(2), 247-257.

Kye, S.H. & Ha, K.C. (2010). A critical analysis on an explanation for monotonicity and local extrema of functions in Korean mathematics textbooks, *The Mathematics Education, 49*(2), 247-257.

모성준 (2013). 함수적 상황에서 중학교 1학년 학생들의 공변 수준에 관한 사례연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

Mo, S.J. (2013). *A case study of seventh grade students' covariational reasoning in functional situations,* Master's thesis, Korea National University of Education.

변희현, 주미경 (2012). 우리나라 중학생의 함수 개념화 특성, 수학교육학연구 22(3), 353-370.

Byun, H.H. & Ju, M.K. (2012). Korean middle school students' conception of function, *Journal of Educational Research in Mathematics 22*(3), 353-370.

신은주 (2006). 등가속도 운동에서 미적분의 기본 아이디어 학습 과정에 관한 사례연구, 수학교육학연구 16(1), 59-78

Shin, E.J. (2006). A case study on learning of fundamental idea of calculus in constant acceleration movement, *Journal of Educational Research in Mathematics 16*(1), 59-78.

연용호, 이상한, 임성모, 한재영 (1996), 교과과정상의 미분개념에 관한 대수적 고찰, 수학교육, 35(1), 101-107.

Yon, Y.H, Lee. S.H., Im, S.M. & Han, J.Y. (1996). Algebraic analysis on the derivative concept. *The Mathematics Education 35*(1), 101-107.

이현주, 류중현, 조완영 (2015). 통합적 이해의 관점에서 본 고등학교 학생들의 미분계수 개념 이해 분석, 수학교육논문집, 29(1), 131-155.

Lee, H.J. & Ryu, J.H. & Cho, W.Y. (2015), An analysis on the understanding of high school students about the concept of a differential coefficient based on integrated understanding, *Communications of Mathematical Education 29*(1), 131-155.

임재훈, 박교식 (2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, 수학교육학연구 14(2), 171-185

Yim, J.H. & Park, K.S. (2004). Teaching and learning concepts of tangent in school mathematics, *Journal of Educational Research in Mathematics 19*(1), 171-185.

정연준, 이경화 (2009). 미적분의 기본정리에 대한 고찰 – 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로, 수학교육학연구 19(1), 123-142.

Joung, Y.J. & Lee, K.H. (2009). A study on the fundamental theorem of calculus: Focused on the relation between the area under time-velocity graph and distance, *Journal of Educational Research in Mathematics 19*(1), 123-142.

최영주, 홍진곤 (2014). 도함수의 성질에 관련한 학생들의 사고에 대하여, 수학교육 53(1), 25-40.

Choi, Y.J. & Hong, J.K. (2014), On the students' thinking of the properties of derivatives, *The Mathematics Education 53*(1), 25-40.

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield & S. Belbase (Eds.), Quantitative reasoning: Current state of understanding WISDOMe Monographs (Vol. 2, pp. 55-74). Laramie, WY: University of Wyoming Press.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education 33*(5), 352-378.

Cho. H. H., Shin, D. J., & Woo, A. S. (2012). Development of covariational reasoning in LOGO-based JavaMAL, Microworld. *Research in Mathematics Education 16*(3), 1-13.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformation. In R. Underhill & C. Brown (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 57-63). Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic Institute & State University.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 135-164.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(1), 66-86.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 215-238). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Hauger, G. S. (1995). *Rate of change knowledge in high school and college students*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Lesh, R., & Clarke, D. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 113-150). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ronau, R. N., Meyer, D., & Crites, T. (2014) *Putting essential understanding of functions into practice in grade 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics 26*(2-3), 229-274.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (pp 45 - 64) Morelia, Mexico. PME.

Stroup, W. (2002). Understanding qualitative calculus: A structural synthesis of learning research. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 167 - 215.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education 8*, 103 - 122.

A student's conceiving a pattern of change between two varying quantities in a quadratic functional situation and its representations: The case of Min-Seon

Lee, Dong Gun
Kyung Gi High School, Republic of Korea
E-mail: jakin7@hanmail.net

Moon, Min Joung
Juk Jeon High School, Republic of Korea
E-mail: grmiffy@gmail.com

Shin, Jaehong†
Korea National University Of Education, Republic of Korea
E-mail: jhshin@knue.ac.kr

The aim of this qualitative case study is twofold: 1) to analyze how an eleventh-grader, Min-Seon, conceive and represent a pattern of change between two varying quantities in a quadratic functional situation, and 2) further to help her form a concept of 'derivative' as a tool to express the relationship with employing a concept of 'rate of change.'

The result indicates that Min-Seon was able to construct graphs of piecewise functions that take average rates of change as range of the functions, and managed to conjecture the derivative of a quadratic function, $y=x^2$. In conclusion, we argue that covariational approach could not only facilitate students' construction of an initial function concept, but also support their understanding of the concept of 'derivative.'

* ZDM Classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words: covariational reasoning, rate of change, quadratic function, exponential function, derivative

† Corresponding author