대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 4, 473 ~ 498. Nov 2015

# 역동적 기하 환경에서 곡선 탐구를 통한 수학영재들의 불변량 활용에 관한 사례 연구[1)]

최 남 광[*] · 류 희 찬[**]

본 연구의 목적은 고대 그리스 시대부터 수학자들이 복잡한 기구를 손수 제작하는 수고를 감내하면서 탐구하였던 대수곡선을 기구가 아닌 공학을 사용해 재현하고 생성하는 활동을 수행할 때, 수학영재들은 곡선의 자취를 어떻게 작도하며 불변량(Invariants)은 곡선의 작도와 생성에 어떤 영향을 주는지를 구체적으로 살펴보는데 있다. 특히, 역동적 기하 환경에서 불변량(Invariants)의 역할과 의미에 관한 실증적인 자료를 확보해보는 연구와 수학영재들이 새로운 곡선을 창출하는 과정에서 나타나는 불변량의 활용 유형을 세분해보는 연구를 시도해 봄으로써, 불변량에 대한 교육적 활용 방안을 제시하고 그 활용 범위의 확대 가능성을 확인하고자 하였다.

## Ⅰ. 서 론

'역동적 기하 환경(Dynamic Geometry Environments 이후 간단히 DGE로 약칭)'에서 동적 도형을 끌기(Dragging) 기능을 통해 이동 또는 변형시키면 그 도형의 외형은 달라지지만, 동적 도형들 사이에 변하지 않고 계속해서 유지되는 기하학적 관계와 성질인 불변량(invariants)을 인식하고 이러한 불변량을 적절히 활용할 수 있는 능력은 기하학적 사고의 근간이 되는 활동으로 강조되고 있다(Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Leung, 2008; Leung et al 2013; Olivero, 2002; Laborde & Laborde, 1995).

Leung(2012, Leung et al, 2013)은 DGE에서 불변량을 인식하는 것(1-수준 불변량)과 불변량 사이에 존재하는 불변적 관계를 인식하는 것(2-수준 불변량)을 서로 다른 수준으로 구분하였으나, DGE에서 불변량의 교육적 역할이나 의미에 관한 실증적인 연구가 부족하다. 예를 들어 DGE에서 작도를 하게 되면 필연적으로 불변량을 사용하게 되는데, 이러한 불변량은 즉, '1-수준 불변량'이나 '2-수준 불변량'은 작도에 어떤 영향을 미치며, 학생들은 '1-수준 불변량'과 '2-수준 불변량'을 모두 사용할 수 있는지, 또는 어디까지 활용할 수 있는지와 같은 불변량에 관한 구체적인 자료나 실험을 통한 실증적인 연구가 요구된다. 그러므로 본 연구에서는 DGE에서 불변량의 역할과 의미에 관한 실증적인 자료를 확보해보는 연구를 통해 불변량의 교육적 활용 가능성을 제시해보고자 한다.

한편, 많은 수학교육학자들이 DGE에서 작도 교육의 중요성을 강조하였다(남선주, 2004; 류희

* 대전과학고등학교, dclick21@hanmail.net (제1 저자)
** 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr (교신저자)
1) 본 논문은 저자의 박사학위논문 중 일부를 요약・정리한 것임.

찬, 2004; 류희찬, 제수연, 2009; 윤옥교, 2014; Drijvers et al., 2010; Falcade et al, 2007; Jones, 2000; Laborde, 2003; Marrades & Gutiérrez, 2000; Tall, 1995). 작도 교육 활동을 강조하는 것은 학생들이 작도 문제를 수행하는 과정에서 자신이 가진 수학적 능력을 발휘하게 도와주고, 더 나아가 창조적이고 독창적인 사유의 과정을 경험하게 도와주기 때문이다(김진호 외 2011). 고등 수학적 사고활동의 핵심은 학생들 스스로 수학을 발견하고 창조하는 방법을 가르치는 것이다. 더욱이 지식이 폭주하는 현 시대에 더욱 가치있는 교육활동은 단순히 지식을 많이 소유하는 것이 아니라 지식을 어떻게 창출해 낼 것인가라는 지식창출로 보고 있다(김향숙 외, 2007). 특히 일반 학생들보다 더 많은 수학적 능력과 더 많은 정보를 처리할 수 있는 능력이 있는 수학 영재들을 위한 수학교육은 피동적으로 지식을 습득만 하는 소비자의 역할이 아닌 창조적으로 수학적 지식을 산출해 보는 생산자의 역할을 할 수 있도록 도와줄 필요가 있기에 더욱 그러하다(유윤재, 2010). 이러한 변화의 흐름에서 고대 수학자들이 기구를 이용해 곡선을 생성했던 것처럼, 현대적 기구라 할 수 있는 공학을 이용해 수학영재들 스스로 새로운 곡선을 생성해보는 경험은 교육적으로 유의미한 활동이 될 수 있을 것이다.

그러므로 본 연구에서는 다양한 곡선의 자취를 DGE에서 탐구해보는 활동을 수행할 때, 수학영재들은 어떤 과정을 거쳐 곡선을 작도하고, 불변량을 어떻게 활용하는지를 살펴보고자 한다. 구체적으로, 제시된 곡선을 작도할 때 불변량을 인식하고 사용하는 수준의 차이를 확인함으로써, ‘1-수준 불변량’과 ‘2-수준 불변량’으로 구분한 Leung(2012; Leung et al, 2013)의 이론을 검증해 보고, 학생(전략)과 DGS(활동), DGS(활동)와 과제(목표) 간의 상호 작용의 결과에 따라 *이중 불일치(Double discrepancy), 단일 불일치(Single discrepancy), 조화(Harmony), 반성적 일반화 (Reflective Generalization)*의 네 가지 범주로 구분한 윤옥교(2013)의 다중적 상호작용 이론의 타당성을 실험을 통해 확인해 보고자 한다. 또한, 고대 수학자들이 기구를 이용해 새로운 곡선을 생성[2])했던 것처럼 DGE에서 불변량을 이용해 새로운 곡선을 생성해 보는 창의적인 활동을 수행해 봄으로써 곡선 탐구와 발견을 위한 공학의 구체적인 활용 방안을 제시하는 한편, 불변량에 대한 교육적 활용 범위의 확대 가능성을 확인하고자 한다. 연구문제는 다음과 같다.

가. DGE에서 불변량의 인식에 기초하여 주어진 곡선을 작도하도록 할 때, 수학영재들은 불변량을 어떻게 활용하는가?

나. DGE에서 불변량의 인식에 기초하여 주어지지 않은 새로운 곡선을 생성하도록 할 때, 수학영재들은 불변량을 어떻게 활용하는가?

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 불변량(Invariants)

‘탐구형 기하 소프트웨어(Dynamic Geometry Software 이후 간단히 DGS로 약칭)’에서 끌기(Dragging) 기능을 통해 동적 도형을 변형 또는 이동시키면 그 도형의 형태는 달라지지만, 도형의 기저를 이루는 기하학적 관계는 변하지 않고

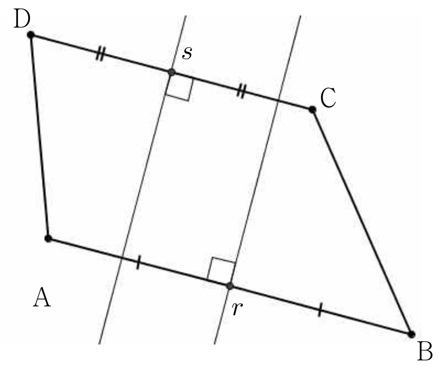
2) 3대 작도문제를 해결하기 위한 고대 그리스 수학자들의 활발한 연구는 원추곡선, 3차곡선, 4차곡선 등 다양한 곡선의 발견에도 영향을 주었다. 특히, Strophoid, Cissoid, Cardioid, limaçon, Lemniscate와 같은 곡선을 기계적인 도구를 이용해 그 곡선의 기하학적 특성과 자취를 탐구하였다.

유지된다. 이렇게 변하지 않고 계속해서 유지되는 도형의 형태나 특성을 *불변량(Invariants)*이라고 한다(Leung, 2008; 2012; Leung et al 2013). 끌기를 통해 불변성을 파악하는 활동은 잠재성이 풍부한 탐구활동으로서 DGS에서 가장 핵심적인 교육활동 중 하나로 간주되고 있다(Arzarello et al, 2002; Olivero, 2002; Leung, 2008, 2012; Leung et al, 2013; Baccaglini-Frank et al, 2009; Baccaglini-Frank, 2010). 이러한 불변량은 동적인 도형을 작도하기 위해 사용되어진 도구조작에 의해 성립된 기하학적 관계나, 유클리드 기하 이론에 의해 유도된 결과, 또는 작도 자체에 의해 성립된 종속적 관계에 의해 결정되며(Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010), 불변량들 사이에 존재하는 종속성은 기하학적 성질들 사이의 종속성을 의미한다(Leung et al, 2013).

Leung(2012; Leung et al, 2013)은 DGS에서 불변량을 인식하는 것(1-수준 불변량)과 불변량들 사이에 존재하는 불변적 성질을 인식하는 것(2-수준 불변량)은 서로 다른 수준으로 보고 다음과 같이 구분하였다.

- 1-수준 불변량 : DGS에서 작도한 도형을 드래깅하여 변화시킬 때, 변하지 않는 것으로 인식되는 도형의 특성
- 2-수준 불변량 : '1-수준 불변량'들 사이에 존재하는 불변적 관계

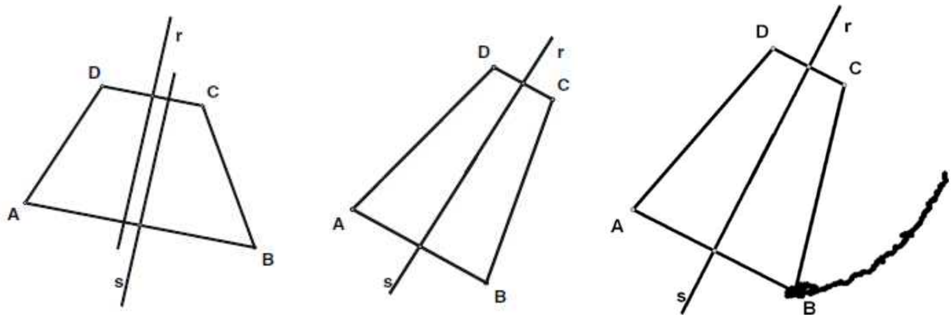
'1-수준 불변량'과 '2-수준 불변량'을 구체적인 사례를 통해 좀 더 자세히 알아보자. [그림 II-1]과 같이 DGS에서 선분 AB위에 있지 않은 점 C를 지나면서 AB와 평행한 직선 위에 임의의 점 D를 잡아서 사변형 ABCD를 작도하고, AB를 수직이등분한 직선 $r$와, CD를 수직이등분한 직선을 $s$를 작도하자. 꼭짓점 A,B,C는 자유롭게 드래그할 수 있지만, 꼭짓점 D는 AB와 평행하면서 점 C를 지나는 직선 위에서만 드래그할 수 있다. 꼭짓점 A,B,C,D중 어느 한 점을 드래그해도 수직이등분한 직선 $r$는 AB와 수직관계(또는 $s$는 CD와 수직관계)를 유지하면서 움직인다. 이 때, 꼭짓점을 드래그해도 변하지 않고 유지되는 성질로 인식되는 "AB는 CD와 평행하다", 혹은 "AB와 $r$는 수직(CD와 $s$는 수직)이다"를 '1-수준 불변량'이라 한다.




[그림 II-1] DGS에서 작도된 사변형
(Leung, 2012; Leung et al 2013)

'2-수준 불변량'은 '1-수준 불변량'들 사이의 불변적인 관계나 성질 즉, '1-수준 불변량'을 인식한 후 '1-수준 불변량'을 사용해 추론(reasoning)해 낸 불변적 성질로 해석해 볼 수 있다. 구체적인 예로 "AB(CD)와 $r(s)$는 수직이고, AB와 CD가 평행하면, $s$와 $r$도 평행하다(또는 AB와 CD가 평행하기 때문에 $s$와 $r$도 평행하다)"와 같이 2개 이상의 '1-수준 불변량'들의 관계나 연결을 통해 유도되는 불변적 성질을 인식하는 것을 의미한다.

[그림 II-1]과 같은 상황에서 점 B를 임의로 드래그(*wandering dragging*)하다보면, 수직이등분한 두 직선 $r$와 $s$가 [그림 II-2(b)]처럼 일치되는

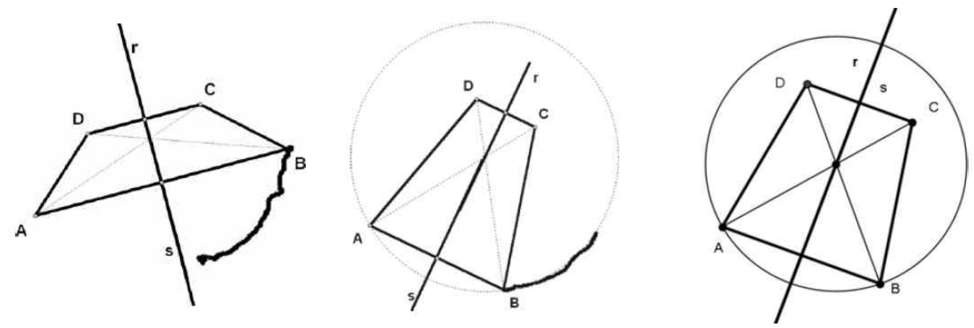



[그림 II-2] Drag to contrast (Leung, 2012; Leung et al 2013)

경우에 주목하게 된다. 이것을 Leung은 '*대조를 위한 끌기(Drag to contrast)*'라고 하였다. '*대조를 위한 끌기(Drag to contrast)*'는 동적 도형을 끌어서 변형시키다 보면, 어떤 특정한 조건(예를 들어 $r$와 $s$가 일치 되는 경우)을 만족될 때와 그렇지 않을 때를 서로 대조시키는 것을 의미한다. 즉, *대조(contrast)*를 위한 끌기는 동적 도형이 변화되는 동안 무언가 다르게 인식되는 점에 주목하여 불변량을 지각하게 도와준다고 볼 수 있다.

이제 점 B에 자취의 흔적을 보이게 한 후, 두 직선 $r$와 $s$가 일치되도록 유지하면서 점 B를 계속 드래그 하다보면 [그림 II-2(c)]와 같은 자취를 그리게 된다. 이 때, B의 경로가 꾸불꾸불한 것은 $r$와 $s$가 일치되는 점들을 의도적으로 추출(*separation*)하려는 노력의 결과라고 볼 수 있다. 이때 명확히 확신하지는 못하지만, B의 자취가 대략적으로 원의 호(arc)에 가깝기 때문에 학습자는 $r$와 $s$가 일치하게 되면 점 B의 자취는 원주 위에 있을 가능성이 있다고 생각하게 될 것이다(즉, 새로운 '2-수준의 불변량'을 인식하기 시작). 이러한 끌기를 Leung은 '*추출을 위한 끌기*(*Drag to separation*)'라고 명하였다. '*추출을 위한 끌기*(*Drag to separation*)'는 불변적인 기하학적 성질을 발견하는데 결정적인 역할을 하며, 동적 기하 환경에서 '불변성 탐색 끌기 (maintaining dragging 또는 lieu muet dragging)'(조정수, 이은숙, 2013; Baccaglink-Frank & Mariotti, 2010; Arzarello et al., 2002; Olivero, 2002)와도 의미가 상통하는 끌기 유형(dragging modalities)이라고 할 수 있다. 즉, 추출을 위한 끌기는 다른 현상들을 고정시켜 놓고 관심있는 어떤 특정한 현상에만 의도적으로 변화를 주어 결정적인 기하학적 성질이 추출될 수 있게 함으로써 불변량을 인식하게 하는 끌기 유형이다.

이제 학습자는 $r$와 $s$가 일치('1-수준 불변량') 하게 되어 B의 자취가 원의 호('1-수준 불변량')에 가깝다는 사실에서 원의 중심을 찾으려는 시도를 하게 되고 이러한 시도는 자연스럽게 대각선 AC, BD에 관심을 갖게 해준다([그림 II-3(a)]). 그리고 점 A를 지나면서 AC와 BD의 교점을 중심으로 하는 원을 작도한 후, 점 B를 작도한 원 주 위에서 움직이도록 유연한 드래깅(*soft dragging*)(Laborde, 2005)을 시도할 때 $r$와 $s$가 일치됨을 확인하게 된다([그림 II-3(b)]). Leung은 이와 같은 끌기 유형을 '*일반화를 위한 끌기*(*Drag to generalize*)'라고 하였다. 일반화를 위한 끌기는 *대조*(*contrast*)와 *추출*(*separation*)을 위한 끌기를 통해 발견한 기하학적 성질을 더 많은 상황에서 성립여부를 입증해보는 활동이다. 마지막으로 점 B를 원주 위에서만 움직이는 점



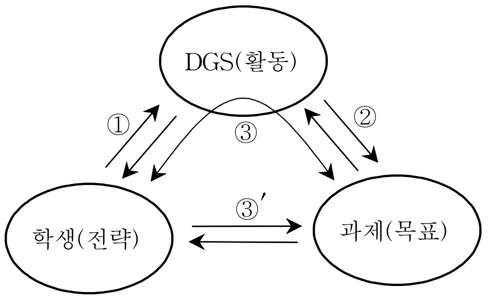
(a) (b) (c)

[그림 II-3] Drag to generalize (Leung, 2012; Leung et al 2013)

으로 설정한 후 드래그 활동을 실시하는 강건한 끌기(*robust dragging*)(Laborde, 2005)를 수행해 봄으로써 “점 B가 대각선 AC와 BD의 교점을 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이면 $r$와 $s$는 언제나 일치하게 된다”는 2-수준의 불변량(1-수준의 불변량들 사이의 관계)을 인식할 수 있게 된다.

## 2. 학생과 DGS, DGS와 과제 간의 다중적 관계

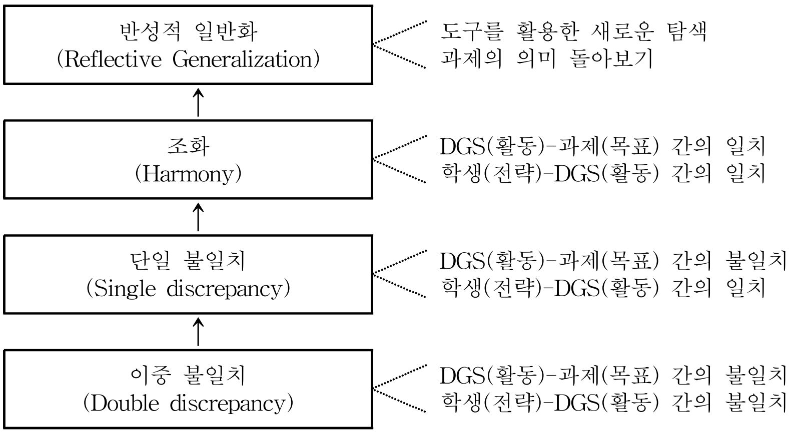
Verillon과 Rabardel의 도구화된 행동상황모델을 토대로 윤옥교(2013)는 [그림 II-4]와 같은 ‘DGS에서 도구화된 행동상황모델’을 제시하였다.




[그림 II-4] DGS에서 도구화된 행동상황 모델(윤옥교, 2013)

이때, 학생(전략)과 DGS(활동), DGS(활동)와 과제(목표) 간의 상호 작용의 결과에 따라 다중적 상호작용의 발달 단계를 *이중 불일치*(*Double discrepancy*), *단일 불일치*(*Single discrepancy*), *조화*(*Harmony*), *반성적 일반화*(*Reflective Generalization*)의 네 가지 범주로 구분하였으며, 발달 단계는 과제의 특성이나 실험 집단에 따라 일부 단계가 생략될 수는 있으나, 그 순서가 바뀌지는 않는다고 하였다. [그림 II-4]에서 ①은 학생들의 전략과 DGS 활동 간의 상호 작용 과정을 의미하며 학생들의 전략이 DGS 활동을 통해 잘 구현되면 일치, 그렇지 못하면 불일치의 상태가 된다. ②는 DGS활동과 과제의 목표 간의 상호작용 과정을 의미하며 DGS활동을 통해 과제의 목표를 달성하면 일치, 그렇지 못하면 불일치의 상태가 된다. 이때의 불일치는 도구인 DGS에 대한 기능적인 측면의 미숙함이거나 과제에 대한 이해나 개념의 부족 등이 원인이 될 수가 있다고 하였다. ①에서 일치를 경험하는 것이 반드시 ②에서의 일치를 보장하지는 않지만 ①에서 불일치가 되면 ②에서도 불일치가 된다.

*이중 불일치*(*Double discrepancy*)란 학습자가 DGE에서 주어진 과제를 해결하기 위해 전략을 세우고 DGS를 조작하지만 마음속에 형성된 전략과 DGS를 조작하는 활동 간의 불일치를 경험




[그림 II-5] 다중적 상호작용 발달 단계(윤옥교, 2013)

하고 따라서 과제 해결이라는 목표와 DGS활동도 일치하지 않게 되어 ①과 ②에서 모두 불일치를 경험하게 되는 상호작용 단계를 의미하고, *단일 불일치*(*Single discrepancy*)란 학습자가 자신의 의도나 전략대로 DGS를 이용해서 구현할 수 있게 되었지만 여전히 과제의 목표와 DGS 활동 간의 불일치를 경험하게 되는 상황을 의미한다.

*조화*(*Harmony*)는 DGS와의 상호작용을 통해 DGS의 특성을 이해하고 그 특성을 바탕으로 새로운 전략을 세우거나 DGS 활동을 통해 기존의 전략을 의도대로 구현하여 과제의 목표를 달성하는 것을 의미한다. 즉, ①과 ②에서 모두 일치되는 경험을 하여 ③의 과정이 이루어지는 단계를 의미하고, *반성적 일반화*(*Reflective Generalization*)는 도구의 특성을 활용해서 주어진 과제의 의미를 전체적으로 돌아보거나(③′) 새로운 과제를 통한 일반화 가능성을 탐색하는 단계를 의미한다. 이는 비슷한 유형의 과제를 여러 번 해결하면서 이러한 경험을 토대로 새로운 과제를 탐색하게 되는 단계를 의미한다.

‘이중 불일치’ 반응이 발생하는 이유는 분명하다. 즉, (공학)도구를 능숙하게 다룰 수 없어 자신이 의도한 바를 구현할 수 없기 때문에 과제 해결이라는 목표도 달성하지 못하는 것이다. 그러나 ‘단일 불일치’ 반응은 자신이 의도하는 대로 능숙하게 도구를 조작할 수 있는데도 불구하고 과제의 목표를 달성하지 못하는 상황을 의미하는데, 이러한 상황이 발생하는 원인이나 이유에 대한 보다 구체적인 설명이 필요하다. 즉, 도구를 능숙하게 다룰 수 있으며, 과제에 대한 이해가 충분한 상황에서도 과제의 목표를 달성하지 못하게 된다면 그 이유와 원인은 무엇인지 드러낼 필요가 있다.

## Ⅲ. 연구 방법

### 1. 연구방법 및 절차

본 연구는 고대 그리스 시대부터 수학자들이 기구를 이용해 대수곡선을 작도하고 생성했던 것처럼 수학영재들로 하여금 기구를 대신해 공학을 이용해 곡선의 자취를 작도하고 탐구하게 할 때 나타나는 사고과정과 학생 스스로 새로운 곡선을 생성해보는 창의적인 활동 과정을 분석하기 위해 질적 사례연구 방법을 선택하였다. 연

<표 III-1> 교수 실험 일정

| 구분 | 일자 | 시간 | 내용 |
|---|---|---|---|
| 본 실험 | 2014. 01. 12 | 오후 3:00～오후 5:00 | • 사전면담 실시[8명을 선정]<br>• 예비수업(GeoGebra 기능 배우기)<br>- 입력창, 기하창, 대수창<br>- 도구상자 및 도구 도움말<br>- 함수의 그래프와 슬라이더<br>- 기하(도형, 이차곡선, 극좌표)<br>- 도형의 자취와 애니메이션 |
| | 2015. 01. 13 | 오후 3:00～오후 5:00 | |
| | 2015. 01. 14 | 오후 3:00～오후 5:00 | |
| | 2015. 01. 15 | 오후 3:00～오후 5:00 | |
| | 2015. 01. 16 | 오후 3:00～오후 5:00 | |
| | 2015. 01. 19 | 오후 3:00～오후 5:00 | • Strophoid 곡선과 Cissoid 곡선<br>• Lemniscate 곡선 |
| | 2015. 01. 20 | 오후 3:00～오후 5:00 | • Cardioid 곡선과 limaçon 곡선<br>• Conchoid곡선과 Cissoid 곡선 |
| | 2015. 01. 21 | 오후 3:00～오후 5:00 | • 이차곡선 및 극방정식과 연계 |
| | 2015. 01. 22 | 오후 3:00～오후 5:00 | • 새로운 곡선의 생성(1) |
| | 2015. 01. 23 | 오후 3:00～오후 5:00 | • 새로운 곡선의 생성(2) |

구 대상은 연구목적에 맞는 풍부한 반응을 보여 줄 것으로 기대되는 학생들로서 영재교육진흥법 시행령에 따라 설립 및 지정·운영되는 과학영재학교에 재학 중인 2학년 학생들이다. 영재고 입학 당시 또래 연령의 상위 3%이내에 속하며, 과학영재학교에서 실시한 영재선발 기준에 적합한 절차에 따라 영재로 선발되어 영재교육을 받고 있다. 이들 중 수학적 재능이 탁월하고 평소 도전적이며 새로운 수학문제해결을 즐기는 학생들을 중심으로, 실험에 자발적으로 참여하기를 희망한 8명(예비실험에서는 16명)의 학생을 선정하여 개인별 반응을 세부적으로 관찰하였다.

실험에 참여한 학생들은 정규 수업 시간을 통해 이차곡선(원, 포물선, 타원, 쌍곡선), Cycloid, Epicycloid, Hypocycloid 곡선을 6개월 전에 학습하였다. 그리고 극좌표에서 극방정식으로 Cardioid, limaçon, Lemniscate 곡선을 학습하였으나, 본 실험에서 다뤄지는 기구를 이용해 곡선을 유도하는 방법으로 다루어 본 경험은 없다. 또한, 학생들이 GeoGebra의 사용법에 익숙해져서 자신이 의도하는 대로 도형이나 곡선을 작도할 수 있고, 과제의 목표를 달성할 수 있도록 충분히 사전교육을 실시하였다(<표 III-1>참조).

예비실험에서는 두 명의 학생이 한 조가 되어 컴퓨터를 사용하면서 서로 대화를 나누면서 과제를 해결하도록 유도해 보았으나, 습득능력이 빠르고 수학적 추론 능력이 우수한 수학영재들이다 보니 연구자가 원하는 다양한 대화를 나누면서 과제를 해결하기 보다는 자신만의 아이디어를 선호하고 다양한 전략을 구사하려는 경향이 더 크다는 판단 하에 본 실험에서는 개인별로 각자의 컴퓨터를 사용해 과제를 해결하도록 실험설계를 변경하였다. DGS는 GeoGebra 4.4.45를 사용하였다.

## 2. 연구과제

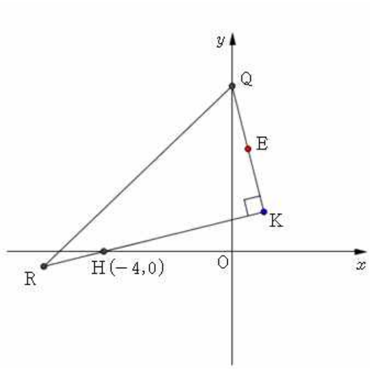
연구문제 ‘가’ 실험에 투입되는 과제는 Strophoid (또는 Cissoid) 곡선과 Lemniscate 곡선의 자취를 소재로 제작하였다. 먼저, Strophoid(또는 Cissoid) 곡선을 소재로 제작된 [과제A]는 [그림 III-1]과 같다.

이 과제는 [그림 III-2]와 같이 기구를 제작하여 작도했던 곡선의 자취를 불변량을 이용하여

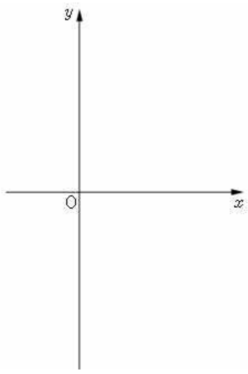
※ 다음 [제시문]을 읽고 물음에 답하시오.

[제시문]

[그림1]과 같이 좌표평면에 $\overline{QK}=4$인 직각삼각형 QRK가 놓여 있다. 꼭짓점 Q가 $y$축 위를 움직일 때, $\overline{RK}$는 항상 $(-4, 0)$을 지나면서 직각삼각형 QRK가 움직인다고 한다. 이때, 꼭짓점 K의 자취를 $T_1$라 하고, $\overline{QK}$의 중점 E의 자취를 $T_2$라 하자.




[그림1]



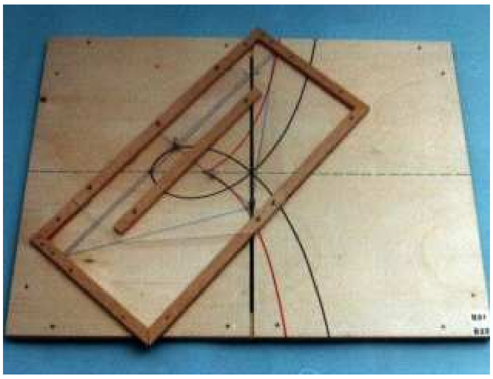

[그림2]

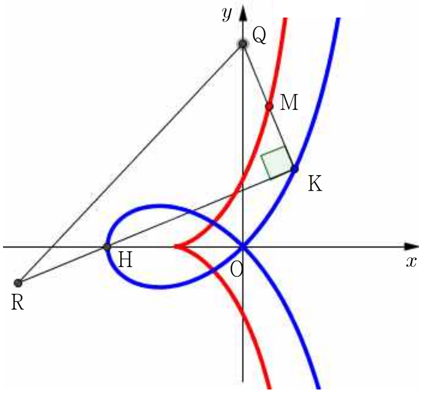
A-1. [그림2]에 $T_1$에 대한 곡선의 개형을 예상하는 대로 그려보시오.

A-2. 컴퓨터(GeoGebra)를 사용해 [제시문]대로 작도를 한 후, $T_1$과 $T_2$의 자취를 "애니메이션" 기능을 통해 확인해보시오.

A-3. OK와 $x$축이 이루는 각을 $\theta$라 할 때, 곡선 $T_1$의 좌표$(x, y)$를 매개변수방정식 $x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$로 나타내보시오.

[그림 III-1] 연구문제 '가' 를 위한 과제(1)






[그림 III-2] Cissoid와 Strophoid 곡선의 작도 기구와 DGS를 이용한 작도

작도할 수 있도록 구성하였다. 학생들은 기구가 작동되는 원리를 이해하고 예상되는 곡선의 자취를 지필환경에서 그려본 후, DGS에서 곡선의 자취를 작도하여 본인이 처음에 예상해서 그렸던 자취와 비교하는 활동을 하게 된다.

DGS를 사용해 곡선의 자취를 작도하기 위해서는 먼저 움직이는 도형들 사이의 기하학적 관계나 구조를 파악하는 수학적 분석이 선행되어야 작도가 가능하다. 특히, 동적 도형을 드래그하여 변형시켜도 변하지 않고 계속해서 유지되는 불변적 성질인 불변량(Invariants)에 대한 인식이 무엇보다도 중요하다. 구체적으로 [그림 III-2]에서 꼭짓점 K의 위치를 임의로 변경(또는 점Q의 위치를 직접 변경시키고, 그에 따라 점 K가 간접적으로 이동되더라도)시켜도 언제나 유지되는 불변적 성질인 '$\triangle HOQ \equiv \triangle QKH$'의 관계를 인식하고 이것을 작도에 반영할 수 있어야 비로소 작도가 가능하다.

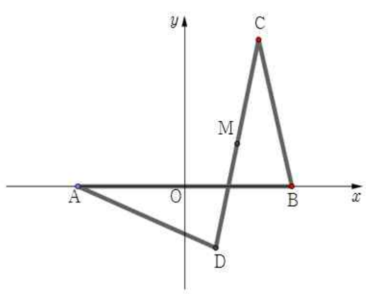
이러한 불변량에 대한 인식을 바탕으로 주어진 과제를 해결하기 위해 학생 스스로 세운 전략과 DGS를 조작하는 활동 간의 상호작용 및 과제의 목표와 DGS 활동 간의 상호 작용의 결과에 따라 다중적 상호 작용의 발달 단계가 결정될 것이다(윤옥교, 2013). 또한 작도활동이 끝나면 스스로 작도한 곡선의 자취에 대한 점, 선분들 사이의 종속관계를 인식하고 구성해 보는 활동을 통해 규칙성을 파악하고 매개변수와 같은 대수적인 수식으로 나타내는 경험을 하게 된다.

다음은 Lemniscate 곡선을 소재로 과제를 개발하여 학생들에게 투입한 [과제B]이다.

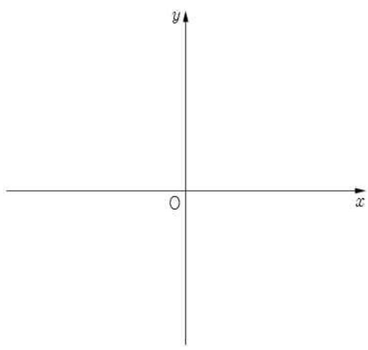
※ 다음 [제시문]을 읽고 물음에 답하시오.

[제시문]

[그림1]과 같이 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$에 선분 AB가 놓여 있고, 선분 CD는 선분 AB와 항상 교차하면서 AB=CD, AD=BC, AB= $\sqrt{2}$BC를 만족하면서 움직이고 있다. 선분 CD의 중점 M의 자취를 $T_5$라 하자.



[그림1]



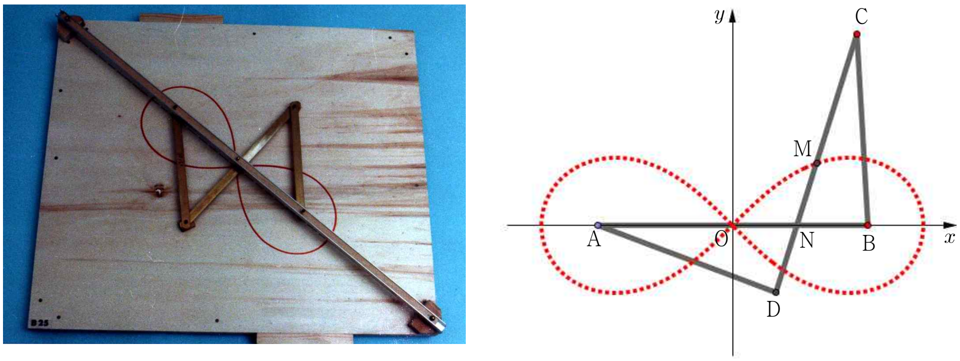
[그림2]

B1-1. [그림2]에 $T_5$에 대한 곡선의 개형을 예상하는 대로 그려보시오.

B1-2. 컴퓨터(GeoGebra)를 사용해 [제시문]대로 실제로 작도를 한 후, $T_5$의 자취를 "애니메이션" 기능을 통해 곡선을 그려보시오.

B1-3. 곡선 $T_5$의 좌표$(x, y)$를 방정식으로 나타내시오.

[그림 III-3] 연구문제 '가' 를 위한 과제(2)




[그림 III-4] Lemniscate 곡선 작도 기구와 DGS를 이용한 작도

이 과제는 [그림 III-4]와 같이 기구를 제작하여 작도했던 Lemniscate 곡선의 자취를 DGS를 사용해 작도하게 하고 있다. 마찬가지로, 곡선의 자취를 작도하기 위해서는 움직이는 도형들 사이의 기하학적 관계를 파악하는 수학적 분석이 선행되어야 한다. 특히, 동적 도형을 드래그하여 이동 또는 변형시켜도 변하지 않고 계속해서 유지되는 불변량을 인식하고 사용할 수 있는 능력이 중요하다. 즉, [그림 III-4]에서 꼭짓점 C 또는 D의 위치를 임의로 드래그하여도 계속 유지되는 불변적 성질 '$\triangle ADN \equiv \triangle CBN$'(N은 AB와 CD의 교점)의 관계를 인식하고 활용할 수 있어야 작도할 수 있다.

연구문제 '나'를 위한 과제는 고대 수학자들이 기구를 사용해 곡선을 생성했던 것처럼 수학영재들도 스스로 공학을 사용해 새로운 곡선을 생성해보는 과제이며, 구체적 내용은 다음과 같다.

고대의 수학자들은 기계적인 도구를 손수 제작하는 수고를 감내하면서도 곡선을 탐구하고자 하였다. 오늘날에는 공학의 발달로 복잡한 기구를 직접 제작해야 하는 소모적인 부담에서 벗어나 자신의 의도와 아이디어를 충분히 반영할 수 있는 동적 환경이 조성되었기에, 학생들도 충분히 고대 수학자들처럼 곡선을 생성하는 활동이 가능하게 되었으며, 그에 따른 통찰의 기회도 더 많이 제공할 수 있다. 더구나 수학 영재들을 위한 교육활동은 피동적으로 지식만을 습득하는 것이 아니라 수학자처럼 창조적으로 수학적 지식을 산출해 보는 생산자의 역할이 강조될 필요가 있으므로 이러한 교육 활동이 더욱 요구된다.

### 3. 자료수집 및 분석

GeoGebra에서 드래그하면서 작도하는 과정은 학생들의 사고과정을 추적하기 위해 필수적이므로, 동영상 캡쳐 프로그램(oCam)을 통해 작도 과정을 저장하였다. 이 과정에서 연구자는 실험참여자의 작도 해결 과정을 세밀하게 관찰하고, 관

고대의 수학자들은 기계적 도구를 직접 제작하여 곡선의 자취를 연구하였다. 그러나 여러분들은 그런 복잡하고 소모적인 부담에서 벗어나 자신이 의도대로 도형들을 작도할 수 있는 현대적 기구(GeoGebra)를 사용할 수 있게 되었다. 그러므로 과거의 수학자들이 기구를 이용해 곡선을 탐구했던 것처럼 여러분들도 현대적 기구(GeoGebra)를 사용해 자신이 직접 만들어낸 새로운 곡선을 만들 수 있을 것이다. 자! 지금부터 GeoGebra를 사용해 새로운 곡선을 발견해 보고, 그 곡선을 (매개변수)방정식으로 나타내보아라.

[그림 III-5] 연구문제 '나' 를 위한 과제

찰노트를 작성하며, 해결과정에서 연구자가 이해하기 힘든 부분에 대한 보충설명이나 정당화 과정이 요구될 때에는 면담을 통해 학생들의 반응을 수집하였다.

DGE에서 불변량을 이용해 새로운 곡선을 생성하는 연구문제 '나'에서의 활동은 아직 발견되지 않은 새로운 곡선을 창출하거나 또는 이미 알려져 있으나 실험참여자에게는 새로운 수학적 내용을 (재)창출해보는 창의적 경험을 수행해야 하므로 원하는 연구결과가 도출되기가 쉽지 않을 것으로 예상된다. 그러므로 다양하고 풍부한 반응과 그에 따른 원하는 결과를 최대한 얻기 위해 4시간(240분)을 기본 활동시간으로 부여하였으며, 학생이 시간이 더 필요하다면 특별히 제한을 두지 않고 개인별로 수학적 발견의 경험을 최대한 발휘될 수 있도록 기회를 제공하였다. 자료수집 및 분석의 신뢰성을 확보하기 위하여 참여자의 작도해결과정과 심층면담과정을 비디오로 기록하였으며, 참여자의 새로운 아이디어를 창출하는데 도움이 될 수 있는 발문이나 힌트는 제공하지 않으면서 연구자의 개입을 최소화하였다. 이와 같은 방법으로 연구자는 학생과 의사소통과정을 촬영한 비디오 자료, 학생의 사고활동을 추적할 수 있는 개별 활동지 및 관찰자 및 면담내용을 통해 자료를 수집하였다.

본 연구에서 분석관점은 Leung(2012; Leung et al, 2013)이 제시한 불변량에 관한 이론과 윤옥교(2013)의 다중적 상호작용의 발단 단계를 기반으로 연구문제 가에서는 불변량이 곡선의 작도에 미치는 영향을 <표 III-2>와 같은 관점으로, 연구문제 나에서는 예비실험을 통해 나타난 수학영재들이 새로운 곡선을 생성하는 과정에서 불변량을 활용하는 유형을 토대로 본 연구자가 설계한 분석틀 <표 III-3>를 사용하여 분석하였다.

<표 III-2> 불변량이 곡선의 작도에 미치는 영향에 대한 분석 관점

| 분석 대상 | 분석 관점 |
|---|---|
| 불변량의 인식이 작도에 미치는 영향 | '1-수준 불변량'을 인식하고 사용할 때 작도과정 및 결과는 어떠한가? |
| | '2-수준 불변량'을 인식하고 사용할 때 작도과정 및 결과는 어떠한가? |
| | 불변량은 '단일 불일치' 반응과 어떤 관계가 있는가? |
| | 불변량은 '조화' 반응과 어떤 관계가 있는가? |

<표 III-3> 곡선 생성 과정에서 불변량(Invariants) 활용 유형

| 유형 | 판단 기준 |
|---|---|
| 활용유형-1 | 불변량을 활용하여 주어지지 않은 새로운[3] 곡선을 생성할 수 없을 때 |
| 활용유형-2 | 불변량을 활용하여 주어지지 않은 새로운 곡선을 생성할 수 있으나 생성한 곡선을 대수식으로 나타낼 수 없을 때, |
| 활용유형-3 | 불변량을 활용하여 주어지지 않은 새로운 곡선을 생성할 수 있으며, 생성한 곡선을 대수식으로도 나타낼 수 있을 때, |
| 활용유형-4 | (활용유형-2 또는 활용유형-3을 통해) 생성한 곡선을 유연한 사고로 확장 및 발전시킬 수는 있으나, 그 곡선을 대수식으로 나타낼 수 없을 때, |
| 활용유형-5 | (활용유형-2 또는 활용유형-3을 통해) 생성한 곡선을 유연한 사고로 확장 및 발전시킬 수 있을 뿐만 아니라, 그 곡선을 대수식으로도 나타낼 수 있을 때, |

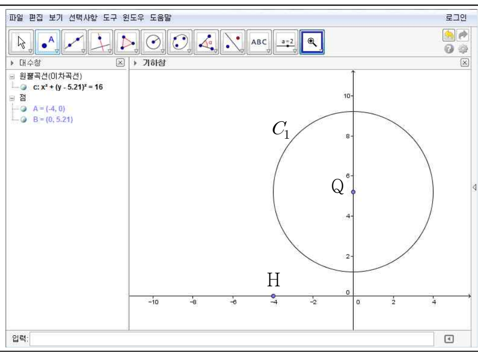
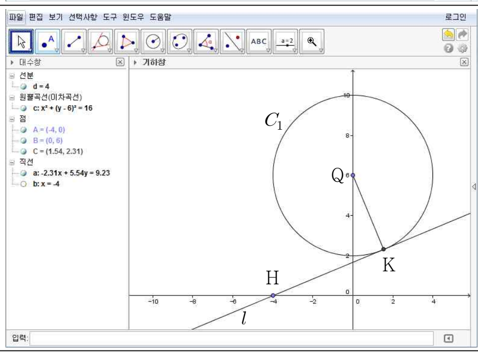
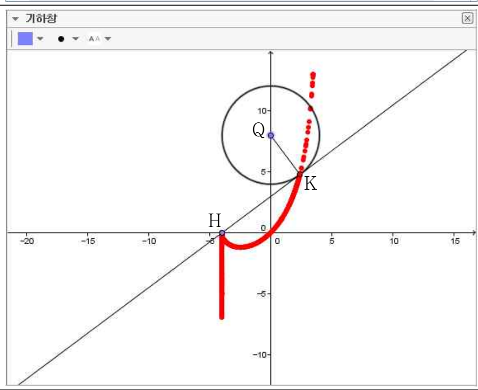
3) 여기서 '새롭다'는 의미는 비록 수학적으로 큰 가치가 없으며 혹은 누군가에 의해 이미 창출된 결과물일지라도, 학생이 직접 오랜 시간 몰입하여 스스로의 아이디어에 의해 산출해 내었다면, 그것이 사회적으로 인정받지는 못하더라도 학생 자신에게는 새로움을 제공해주었기 때문에 교육적으로는 새로운 것이라는 Weisberg(2006)가 언급한 새로움을 의미한다.

# Ⅳ. 결과 분석 및 논의

## 1. 불변량이 곡선의 작도에 미치는 영향

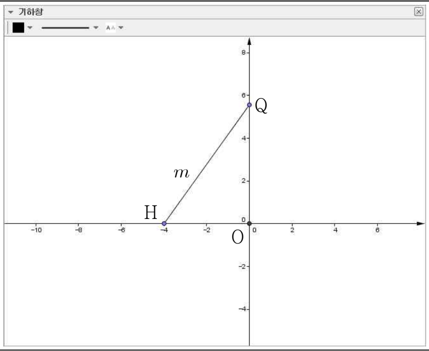
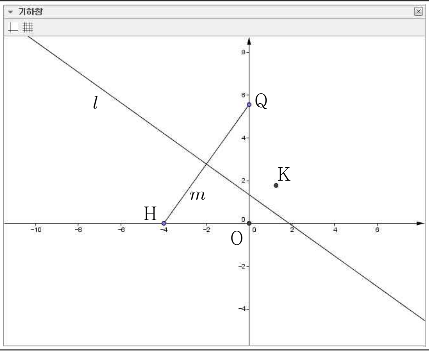
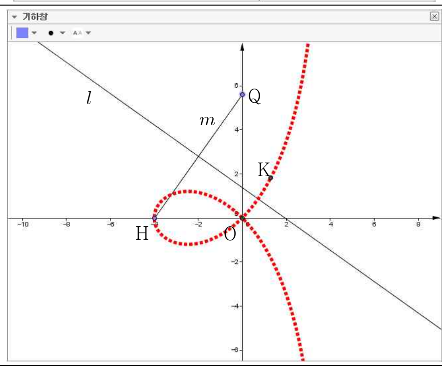
### 가. [과제A]에 대한 반응 분석

8명의 학생들에게 GeoGebra를 이용해서 자신이 예상한 곡선의 자취를 작도하게 유도하였다. 이 때, 8명의 학생들 중 7명의 학생들이 다음과 같은 방법으로 곡선을 작도하였다.

| | |
|---|---|
| ① 고정점 $\mathrm{H}(-4,0)$을 작도한다.<br>② $y$축 위를 움직이는 동점 Q를 작도한다.<br>③ Q가 중심이고 반지름이 4인 원 $C_1$을 작도한다. ($\because\ \overline{\mathrm{QK}}=4$) | <br> |
| ④ 점 H를 지나고 원 $C_1$에 접하는 접선 $l$을 작도한다.<br>⑤ 직선 $l$과 원 $C_1$의 교점(접점) K를 작도한다.<br>⑥ 점K가 움직일 때 흔적을 남길 수 있도록 오른쪽 마우스로 클릭한 후 “자취보이기”를 활성화한다. | <br> |
| ⑦ 점 Q를 오른쪽 마우스로 클릭하여 “에니메이션 시작”을 선택하고, 점 K가 그리는 곡선의 자취($T_1$)를 관찰한다. | <br> |

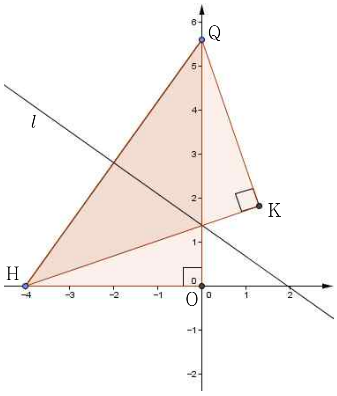
[그림 IV-1] M1 학생의 작도 과정

이 작도과정에서 주목할 점은 동점 Q의 위치가 변하더라도 언제나 HK⊥QK관계를 유지하게 되는 것에 착안하여 작도하였다는 점이다. HK⊥QK 관계는 문제의 제시된 삼각형이 직각삼각형이기 때문에 변하지 않고 유지되는 기하학적 성질이다. 즉, Leung의 '1-수준 불변량'에 해당된다. 그러나 $T_1$의 자취는 점 Q의 $y$값이 $x$축 위에서 움직일 때에는 원하는 곡선의 자취가 그려졌으나, 점 Q의 $y$값이 $x$축 아래로 이동되었을 때에는 HK⊥QK 관계는 유지되지만 의도하지 않는 $x$축에 수직인 직선 모양의 자취를 그리게 되자 학생들은 당황해하였다. 이런 문제를 해결하는 새로운 방법의 작도를 찾고자 노력하였지만 생각만큼 잘 되지 않은 듯, 시간이 다소 지나갔다. 22분의 시간이 경과되었을 쯤, 한 학생(M5)이 "선생님 저 할 수 있어요" 라고 대답했으며, 다른 학생들이 작도 방법을 찾는데 방해가 되지 않도록 M5 학생에게만 자신의 작도과정을 조용히 반복해 보도록 유도하였다. 다음은 M5의 곡선 작도 과정이다.

| | |
|---|---|
| ① 원점 O와 고정점 H$(-4,0)$을 작도한다.<br>② $y$축 위를 움직이는 동점 Q를 작도한다.<br>③ 점 Q와 H를 연결하는 선분$(m)$을 작도한다. |  |
| ④ 선분 $m$을 수직이등분하는 직선 $l$을 작도한다.<br>⑤ 직선 $l$에 대하여 원점 O가 대칭되는 점 K를 작도한다.<br>⑥ 점K가 움직일 때 흔적을 남길 수 있도록 오른쪽 마우스로 선택한 후 "자취보이기"를 활성화한다. |  |
| ⑦ 점 Q를 오른쪽 마우스로 클릭하여 "에니메이션 시작"을 선택하고, 점 K가 움직일 때 남기는 곡선의 자취를 관찰한다. |  |

[그림 IV-2] **M5** 학생의 작도 과정

M5의 작도 과정에서 중요한 특징은 드러나 있는 '1-수준 불변량'이 아니라 숨겨져 있는 '2-수준 불변량'을 이용해서 작도하였다는 점이다. 이렇게 판단할 수 있는 근거는 이전에 학생들은 기본점 Q의 $y$값이 $x$축 위에서 움직일 때 항상 $\overline{\mathrm{HK}} \perp \overline{\mathrm{QK}}$ 관계인 (즉, '1-수준 불변량')를 유지한다는 사실에만 주목하였으나, [그림 IV-3]에서 보는 것처럼 M5학생은 "$\triangle\mathrm{HOQ}$와 $\triangle\mathrm{QKH}$에서, $\overline{\mathrm{HK}} \perp \overline{\mathrm{QK}}$, $\overline{\mathrm{HO}} \perp \overline{\mathrm{QO}}$, $\overline{\mathrm{HO}} = \overline{\mathrm{QK}}$, HQ공통 $\Rightarrow$ $\triangle\mathrm{HOQ} \equiv \triangle\mathrm{QKH}$"를 유지한다는 불변량 사이의 관계(즉, '2-수준 불변량')를 활용하였다.




[그림 IV-3] 2-수준 불변량($\triangle\mathrm{HOQ} \equiv \triangle\mathrm{QKH}$)을 이용한 작도

<발췌문1> M5학생의 작도에 관한 교사와의 의견 교환

교사 : (학생의 작도과정을 본 후) 이야~ 대단하네? 어떻게 이렇게 작도해야겠다고 생각한 거니? 설명해 줄 수 있겠니?

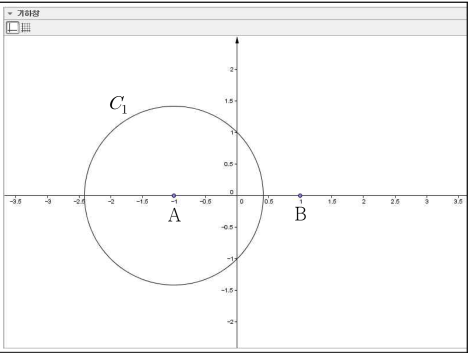
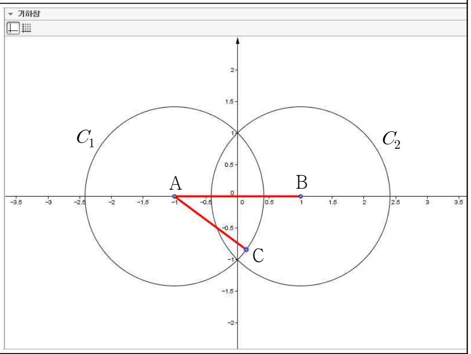
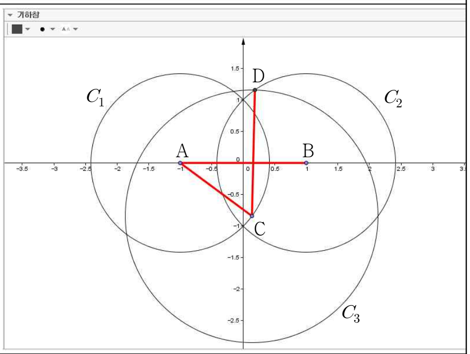
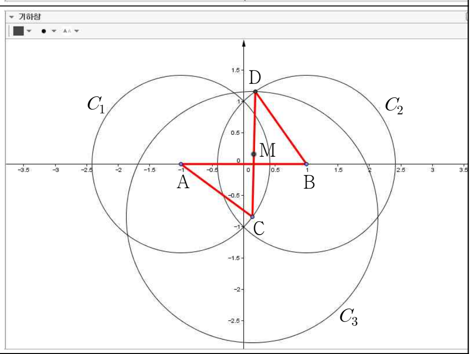
M5 : 얘(Q)가 움직여도 이 삼각형($\triangle$HOQ)이랑 이 삼각형($\triangle$QKH)이 직선($l$)에 대칭이 된다는 사실을 이용했어요.

교사 : 그래 아주 잘했구나! 그럼 이제 점K의 자취를 매개변수 방정식으로 나타내 보렴.

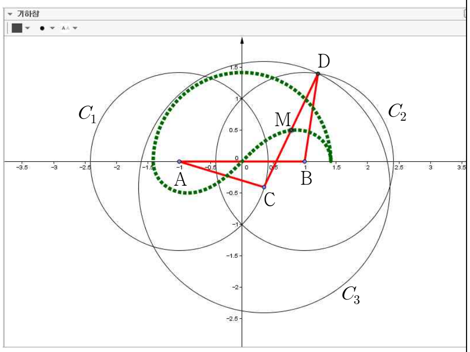
M5 학생처럼 작도에 성공한 학생은 8명중 2명뿐이었다. 나머지 6명의 학생은 생각해볼 시간을 더 제공하였으나 '2-수준 불변량'을 인식하고 활용하여 작도과제를 해결하지 못하였다.

2) [과제B]에 대한 반응 분석

다음은 M4학생이 Lemniscate 곡선을 작도한 과정이다.

| | |
|---|---|
| ① 고정점 A$(-1,0)$, B$(1,0)$을 작도한다.<br>② A를 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{2}$인 원($C_1$)을 작도한다. |  |
| ③ B를 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{2}$인 원($C_2$)을 작도한다.<br>④ $C_1$위를 움직이는 동점 C를 작도하고, 점 A와 C를 연결하는 선분($\overline{AC}$)을 작도한다.<br>⑤ 점 A와 B를 연결하는 선분($\overline{AB}$)을 작도한다. |  |
| ⑥ C를 중심으로 하고 반지름이 2인 원 $C_3$를 작도한다.<br>⑦ 원 $C_3$와 원 $C_2$의 교점 중 선분 $\overline{AB}$와 교차되는 점을 D라 하고, 점C와 D를 연결하는 선분($\overline{CD}$)을 작도한다. |  |
| ⑧ 점B와 D를 연결하는 선분($\overline{BD}$)을 작도한다.<br>⑨ 선분 $\overline{CD}$의 중점(M)을 작도한다.<br>⑩ 점 M이 움직일 때 흔적이 남길 수 있도록 오른쪽 마우스로 클릭한 후 “자취보이기”를 활성화한다. |  |

⑪ 점 C를 오른쪽 마우스로 클릭하여 “에니메이션 시작”을 선택하고, 점 C가 움직일 때 점 M이 남기는 곡선의 자취를 관찰한다.




[그림 IV-4]  M4 학생의 작도 과정

M4 학생의 작도 과정에서 주목할 점은 동점 C, D는 각각 점 A, B 를 중심으로 하는 (반지름이 $\sqrt{2}$ 인)원 위를 움직인다는 사실에 중점을 두고 작도를 수행하였다는 점이다. 또한, (점 A로부터 거리가 $\sqrt{2}$ 인) 점 C에서 점 D까지의 거리도 2이므로, 점 C를 중심으로 하는 반지름이 2인 원을 이용하였다. 즉, “한 점에서 움직이는 거리(반지름)가 일정한 점의 자취”를 이용하였는데, 이것은 ‘1-수준 불변량’을 사용해서 작도를 수행하였다는 것을 의미한다. 그런데, 점 C가 원 $C_1$의 아래쪽($x$축 아래)에서 움직일 때에는 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 서로 교차되어 움직이기 때문에 원하는 곡선의 자취가 그려졌으나, 점 C가 원 $C_1$의 위쪽($x$축 위)으로 이동해서 움직일 때에는 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 서로 교차되지 않아 (즉, 평행사변형ABDC) 의도하지 않는 곡선의 자취를 그리게 되었다([그림 IV-4] 참조). 대부분(8명)의 학생들이 이와 같은 방법으로 작도를 하였으며, 의도하지 않은 결과에 대해 또 다시 당황해 하였다.

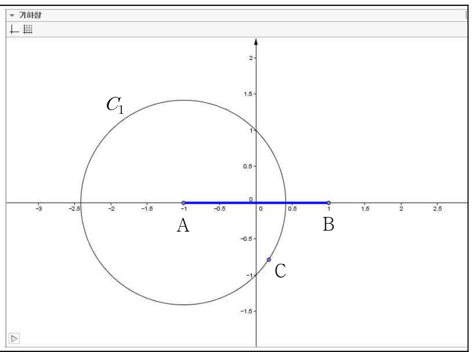
$\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 서로 교차되는 관계를 유지할 수 있는 작도방법을 찾고자 노력하였으나, 뜻대로 되지 않았다. 약 13분의 시간이 지났을 때, [과제A]에서 ‘2-수준 불변량’을 이용해서 작도에 성공했던 M1 학생이 제일 먼저 이 문제를 해결하였다. 다른 학생들에게 방해가 되지 않도록 M1 학생에게만 작도 과정을 반복하게 하고, 그 과정을 녹화하였다. 다음은 그 작도 과정이다.

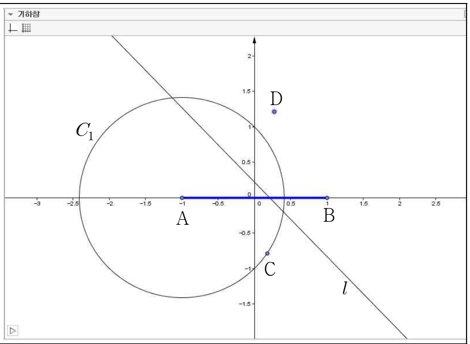
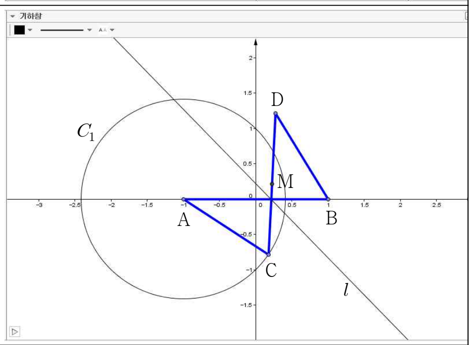
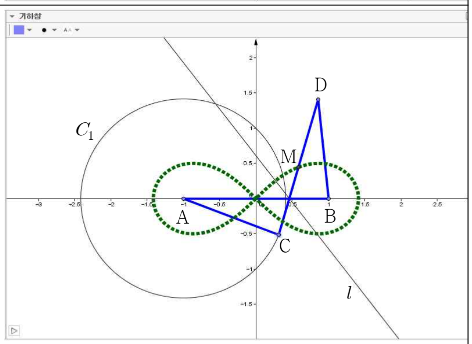
① 고정점 A$(-1,0)$, B$(1,0)$을 작도한다.

② 점A와 B를 연결하는 선분($\overline{AB}$)을 작도한다.

③ A를 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{2}$ 인 원($C_1$)을 작도한다.

④ 원 $C_1$ 위를 움직이는 동점 C를 작도한다.



| | |
|---|---|
| ④ 점 B와 점 C를 잇는 선분($\overline{BC}$)을 수직이등분 하는 직선($l$)을 작도한다.<br>⑤ 점 A를 직선 $l$에 대하여 대칭시킨 점 D를 작도한다. |  |
| ⑥ 점 A와 점 C를 잇는 선분($\overline{AC}$)을 작도한다.<br>⑦ 점 B와 점 D를 잇는 선분($\overline{BD}$)을 작도한다.<br>⑧ 점 C와 점 D를 잇는 선분($\overline{CD}$)을 작도한다.<br>⑨ 선분 $\overline{CD}$의 중점(M)을 작도한다. |  |
| ⑩ 점 M이 움직일 때 흔적이 남길 수 있도록 오른쪽 마우스로 클릭한 후 "자취보이기"를 활성화한다.<br>⑪ 점 C를 오른쪽 마우스로 클릭하여 "애니메이션 시작"을 선택하고, 점 C가 움직일 때 점 M이 남기는 곡선의 자취를 관찰한다. |  |

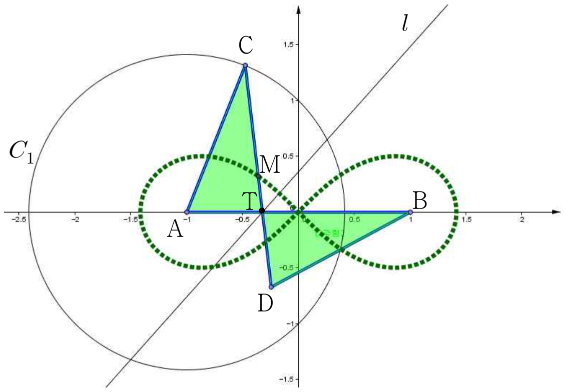
[그림 IV-5] '2-수준 불변량'을 이용한 작도

이번에도 M1 학생은 '2-수준 불변량'을 이용하여 작도하였다. 이전의 다른 학생들은 "한 점에서 움직이는 거리(반지름)가 일정"하다는 사실에 주목하여 작도를 하였지만, M1 학생은 "동점 C가 원주 $C_1$ 위를 움직여도 항상 직선 $l$에 대하여 합동인 두 삼각형이 대칭관계를 유지한다"는 사실을 이용하였다. 그러므로 '1-수준 불변량'들 사이의 관계인 '2-수준 불변량'을 활용하여 작도하였다고 판단할 수 있다.

<발췌문2> M1 학생의 작도에 관한 교사와의 의견 교환(2)

교사 : (학생의 작도 과정을 본 후) 이야~ 작도과정도 엄청 간단하네? 대단하다. 어떻게 이렇게 작도해야겠다고 생각한 거야? 설명해 봐.

M1 : 얘(C)가 움직여도 얘네들([그림 IV-6]에서 $\triangle ATC$와 $\triangle DTB$)이 직선($l$)에 대칭이 되면서 움직여요.
교사 : 그래! 그것을 이용했구나! 아주 잘했다.




[그림 IV-6] '2-수준 불변량'을 이용한 작도 : 합동인 두 삼각형이 항상 $l$에 대해 대칭

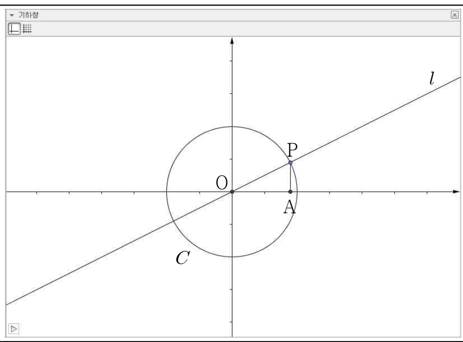
M1처럼 [과제B]를 해결한 학생은 2명뿐(M1, M5)이었다. 나머지 6명의 학생에게 더 시간을 제공해 주었으나, '2-수준 불변량'을 인식하고 사용하여 과제를 해결해내지는 못하였다.

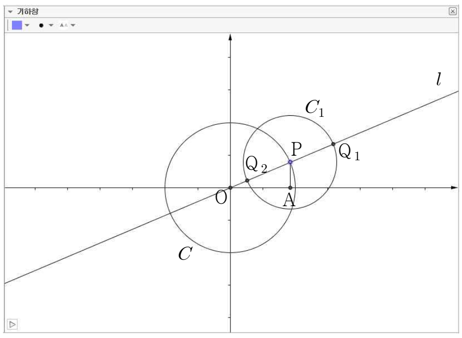
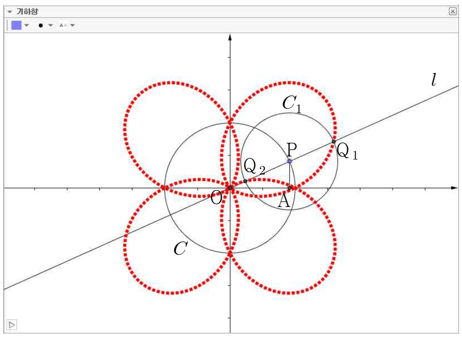
## 2. 곡선 생성 과정에서 나타나는 불변량의 활용 유형

### 가. '불변량 활용유형-2'와 '불변량 활용유형-3'의 반응

본 연구에서 '불변량 활용유형-3' 반응은 불변량을 활용하여 주어지지 않은 새로운 곡선을 생성할 수 있으며, 생성한 곡선을 대수식으로 나타낼 수 있을 때를 의미한다. 실험에서 '불변량 활용유형-3'에 해당하는 반응을 보여준 학생은 M1, M4, M5, M7학생이었다. 이들 중 M4학생의 작도과정을 분석하여 '불변량 활용유형-3' 반응을 설명하고자 한다. M4은 불변량을 활용해 네 잎 크로버 모양의 새로운 곡선을 생성하였는데, 그 작도 과정을 살펴보면 다음과 같다.

① 원점 O이 중심이고 반지름이 4인 원 $C : x^2+y^2=4$을 작도한다.
② 원 $C$ 위를 움직이는 동점 P를 작도한다.
③ 원점 O와 P를 지나는 직선($l$)을 작도한다.
④ 점 P에서 $x$축에 수선을 긋고 만나는 점(A)을 작도한다.



| | |
|---|---|
| ⑤ 점 P가 중심이고 반지름이 $\overline{\mathrm{OA}}*\overline{\mathrm{AP}}$인 원($C_1$)을 작도한다.<br>⑥ 원 $C_1$과 직선 $l$의 두 교점($\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$)을 작도한다.<br>⑦ 점 $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$이 움직일 때 흔적을 남길 수 있도록 오른쪽 마우스로 클릭한 후 “자취보이기”를 활성화한다. |  |
| ⑧ 점 P를 오른쪽 마우스로 클릭하여 “애니메이션 시작”을 선택하고, 점 P가 움직일 때 점 $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$가 남기는 곡선의 자취를 관찰한다. |  |

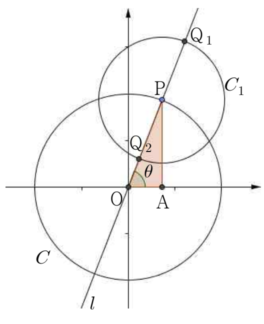
[그림 IV-7] ‘불변량 활용-유형-3’의 반응을 보여준 M4학생의 작도과정

M4 학생은 새로운 곡선을 생성한 후 자신의 작도 과정을 재음미하면서 곡선을 매개변수 방정식으로 나타내었다. [그림 IV-7]에서 점 P는 반지름이 2인 원주 위를 움직이는 동점이다. 즉, 원점에서 거리가 항상 2를 유지하고 있으므로 ‘1-수준 불변량’을 사용해 작도된 자유점이다. 점 A는 그 위치가 변하더라도 항상 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{PA}}$관계를 유지하면서 이동하므로 마찬가지로 ‘1-수준 불변량’을 사용하여 작도된 종속점이다. OP와 $x$축의 사잇각을 $\theta$라고 하면, $\mathrm{OA}=2|\cos\theta|$, $\mathrm{AP}=2|\sin\theta|$이므로 $C_1$의 반지름은 $4|\cos\theta\sin\theta|$에 해당된다. 즉, 점 $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$는 점 P에서부터 점 $\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{Q}_2$까지의 거리가 항상 $4|\cos\theta\sin\theta|$인 관계를 유지하면서 움직인다. 즉, [그림 IV-8]에서

$$\overline{\mathrm{OQ}_1}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}_1}=2+4|\cos\theta\sin\theta|$$

$$\overline{\mathrm{OQ}_2}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PQ}_2}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PQ}_1}=2-4|\cos\theta\sin\theta|$$

인 관계를 유지하므로, ‘1-수준 불변량’ 사이의 관계인 ‘2-수준 불변량’을 사용하여 작도하였다고 판단할 수 있다. 이와 같이 M4 학생은 ‘1-수준 불변량’과 ‘2-수준 불변량’을 적극적으로 활용하여 새로운 불변적 관계를 스스로 창출해 낼 뿐만 아니라, 이러한 불변적 관계를 대수식(극방정식 $r=2\pm4|\cos\theta\sin\theta|$)으로 나타낼 수 있었다. 그러므로 이 학생의 반응은 ‘불변량 활용 유형-3’에 해당되는 반응으로 분류할 수 있다.

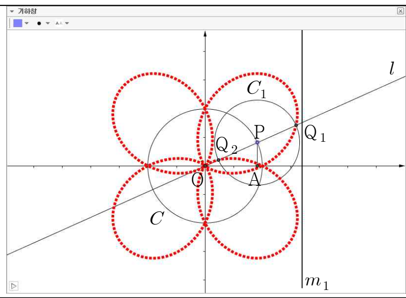
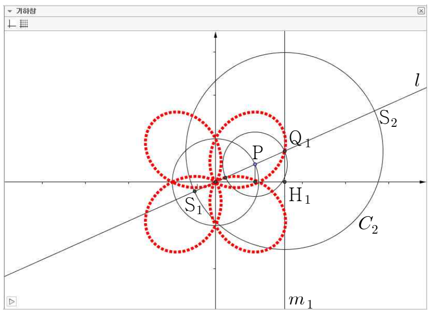
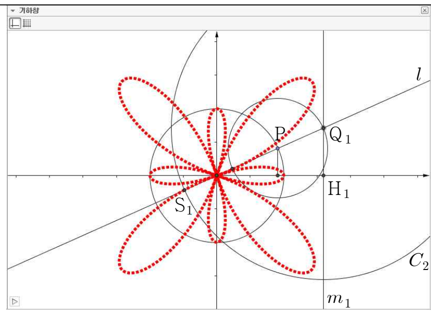



[그림 IV-8] 작도 분석II

‘불변량 활용유형-2’ 반응은 불변량을 활용하여 주어지지 않은 새로운 곡선을 생성할 수는 있으나 생성한 곡선을 대수식으로 나타내지 못하는 반응이다. 만약, M4 학생이 [그림 IV-7]과 같이 새로운 곡선을 불변량을 사용해 창출해냈지만 자신이 창출한 곡선에서 불변량 사이의 관계를 극방정식 $r = 2 \pm 4|\cos\theta\sin\theta|$과 같은 대수적인 표현으로 나타내지 못했다면 ‘불변량 활용유형-2’로 분류되었을 것이다. 본 실험에서 ‘불변량 활용유형-2’반응을 보인 학생은 M3, M6 학생이었다.

나. ‘불변량 활용유형-4’와 ‘불변량 활용유형-5’의 반응

‘불변량 활용유형-5’는 스스로 산출한 곡선을 더욱 유연한 사고로 확장 및 발전시킬 수 있을 뿐만 아니라, 그 곡선을 대수적인 표현으로 나타낼 수 있을 때를 의미한다. 앞에서 ‘불변량 활용유형-3’의 반응을 보여주었던 M4 학생은 자신이 새롭게 창출한 곡선의 작도 과정에서 터득한 작도 방법을 수정 및 변형하여 더욱 새로운 곡선들로 확장시킬 수 있었다. 먼저, ‘불변량 활용유형-5’의 반응을 보인 M4 학생의 구체적인 작도과정을 살펴보면 [그림 IV-9]와 같다.

| | |
|---|---|
| [그림 IV-7]의 ⑧에 이어서 작도 수행한다.<br><br>① 점 $Q_1$을 지나고 $y$축에 수직인 수선($m_1$)을 작도한다. |   |
| ② 직선 $m_1$이 $x$축과 교점($H_1$)을 작도한다.<br>③ 원점 O에서 점 $H_1$까지 선분의 길이($\alpha$)를 측정하고, 점 $Q_1$에서 점 $H_1$까지 선분의 길이($\beta$)를 측정한다.<br>④ 점 $Q_1$가 중심이고 반지름이 $\alpha\beta$인 원($C_2$)을 작도한다.<br>⑤ 직선 $l$과 원 $C_2$의 두 교점($S_1$, $S_2$) 중 원점에 가까운 점($S_1$)을 작도한다. |   |
| ⑥ 점 $S_1$이 움직일 때 흔적을 남길 수 있도록 오른쪽 마우스로 클릭한 후 “자취보이기”를 활성화한다.<br>⑦ 점 P를 오른쪽 마우스로 클릭하여 “애니메이션 시작”을 선택하고, 점 P가 움직일 때 점 $S_1$가 남기는 곡선의 자취를 관찰한다. |   |

[그림 IV-9] ‘불변량 활용유형-5’의 반응을 보여준 M4학생의 작도과정

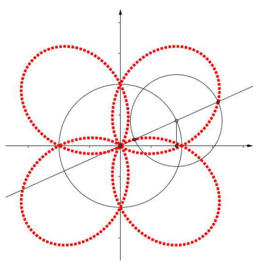
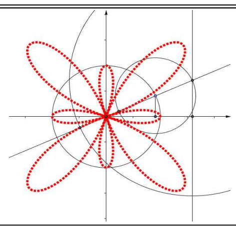
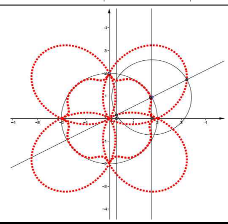
[그림 IV-9]의 ①에서 ⑤까지의 작도과정에서 $\overline{\mathrm{OH_1}}=\overline{\mathrm{OQ_1}}|\cos\theta|$, $\overline{\mathrm{H_1Q_1}}=\overline{\mathrm{OQ_1}}|\sin\theta|$이므로, 원 $C_2$의 반지름은 $\overline{\mathrm{S_1Q_1}}=\overline{\mathrm{OH_1}}\times\overline{\mathrm{H_1Q_1}}=\overline{\mathrm{OQ_1}}^2|\sin\theta\cos\theta|$가 된다. 따라서 동점 $\mathrm{S_1}$은 $\overline{\mathrm{OS_1}}=\overline{\mathrm{S_1Q_1}}-\overline{\mathrm{OQ_1}}=\overline{\mathrm{OQ_1}}^2|\sin\theta\cos\theta|-\overline{\mathrm{OQ_1}}$이다. 이 때 $\overline{\mathrm{OQ_1}}$는 '불변량 활용유형3' 반응([그림 IV-7])에서 이미 구하였던 길이 $\overline{\mathrm{OQ_1}}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ_1}}=2+4|\cos\theta\sin\theta|$를 이용할 수 있으므로, $\overline{\mathrm{OS_1}}$을 극좌표로 나타내면

$$\overline{OS_1} = (2+4|\sin\theta\cos\theta|)\{1-(2+4|\sin\theta\cos\theta|)|\sin\theta\cos\theta|\}$$

이 된다.

M4 학생이 생성한 곡선이 '불변량 활용유형-3'에서 '불변량 활용유형-5'로 발전하는 과정은 자신이 처음 곡선을 생성할 때 사용했던 작도 원리와 유사하지만, 조건을 추가하거나 혹은 변경하여 새로운 곡선을 창출하였다. 이와 같은 방법으로 '불변량 활용유형-3'에서 '불변량 활용유형-5'에 해당하는 반응으로 곡선을 확장 및 발전시켰다(<표 IV-1>참조).

<표 IV-1> M4학생의 '불변량 활용유형-3'에서 '불변량 활용유형-5'로의 발전

| '불변량 활용유형-3' 반응 | | '불변량 활용유형-5' 반응 |
|---|---|---|
|  | 발전 |  |
| | 발전 |  |

이와 같이 '불변량 활용유형-3'반응을 보인 M4 학생은 자신이 처음에 창출한 곡선을 더욱 발전시켜 더욱 새로운 곡선으로 발전시켰을 뿐만 아니라, 새롭게 창출한 곡선을 분석하여 대수적인 수식으로도 나타낼 수 있으므로, 본 연구에서 정의한 '불변량 활용 유형-5' 반응으로 분류할 수 있었다. 이와 같은 반응을 보인 학생은 M1, M4이다. 한편, '불변량 활용유형-4' 반응은 불변량을 활용하여 처음 새롭게 산출한 곡선을 확장 및 발전시킬 수는 있으나, 그렇게 생성한 곡선을 수학적으로 분석하여 대수적인 수식으로 나타내지 못하는 반응을 의미한다. 만약, [그림 IV-9]에서 M4 학생이 발전시킨 곡선에서 $\overline{\mathrm{OS_1}}$ 를 $(2+4|\sin\theta\cos\theta|)\{1-(2+4|\sin\theta\cos\theta|)|\sin\theta\cos\theta|\}$와 같은 대수적 표현으로 나타내지 못했다면 '불변량 활용유형-4'로 분류되었을 것이다. 본 연구에서 '불변량 활용유형-4'의 반응을 보인 학생은 M2 학생이었다.

## Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구에서는 고대 수학자들이 기구를 제작하여 탐구했던 곡선을 기구 대신 공학을 이용하여 탐구하는 활동을 통해 곡선의 자취를 예측하고 해석하는 능력을 향상시키는 한편, 학생들도 고대 수학자들처럼 새로운 곡선을 생성해보는 창의적인 활동을 수행해 봄으로써 곡선 탐구를 위해 공학의 구체적인 활용 방안의 가능성을 확인하였다. 본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 본 실험에서 수학영재들이 제시된 곡선을 작도할 때 불변량을 인식하고 사용하는 수준의 차이를 확인함으로써, '1-수준 불변량'과 '2-수준 불변량'으로 구분한 Leung(2012; Leung et al, 2013)의 이론을 실제로 검증할 수 있었다. 작도 수행이 복잡하거나 난이도가 높은 과제에서 '1-수준 불변량'만 사용하여 작도를 하게 되면, '단일불일치' 반응이 일어날 수 있게 되며, '조화' 반응은 '2-수준 불변량'을 인식하고 활용할 수 있어야 가능하였다. 모든 학생이 '2-수준 불변량'을 인식하고 활용할 수 있는 것은 아니며, '2-수준 불변량'을 활용하여 '조화'반응에 이른 학생들은 보다 유연한 사고와 통찰에 의한 도형 사이의 기하학적 관계를 파악하여 추론해 낸 것을 작도 과정에 반영한 결과이었다.

둘째, 수학영재들이 다양한 전략과 아이디어로 새로운 불변적 관계를 창출해내고, 생성한 불변적 관계를 지속적으로 확장, 발전시키는 수학영재들의 반응을 통해서 DGE에서 곡선을 산출하는 과정에서의 불변량 활용 유형을 <표 III-3>과 같이 세분할 수 있었다.

셋째, DGE에서 곡선을 작도해보는 활동은 먼저 불변량을 사용해 도형들 사이의 성질이나 관계에 대한 분석이 선행되지 않고서는 의도한 작선을 작도할 수 없기 때문에, 반드시 기하학적 분석을 수행하게 되므로 다소 대수적인 관점에서 접근했던 기존의 곡선 학습 활동을 기하학적 사고와 대수적 사고의 균형을 이루는 교수 학습 활동으로의 전환이 가능하게 해주었다.

넷째, 윤옥교(2013)의 다중적 상호작용을 토대로 DGE에서 불변량을 활용하여 주어진 곡선을 작도하고, 새로운 곡선을 생성하는 학생들의 반응을 분석함으로써, 다중적 상호작용 이론의 타당성을 뒷받침하는 결과를 얻을 수 있었다. 특히, 자신의 전략대로 공학을 사용해 능숙하게 도구를 조작할 수 있으며, 과제에 대한 이해가 부족한 상황이 아닌데도 불구하고 작도 과제를 해결하지 못하는 '단일 불일치' 반응이 일어나게 되는 원인을 규명할 수 있었다. 곡선의 작도 과정에서 표면적으로 드러나 있는 '1-수준 불변량'과 드러나 있지 않고 숨겨져 있는 '2-수준 불변량' 중 어떤 불변량을 인식하고 활용하느냐에 따라 '단일불일치' 반응 또는 '조화' 반응으로 나눠지게 되었다. 공학 도구를 능숙하게 활용할 수 있어도, 보다 유연한 사고로 기하학적 관계에 대한 통찰의 결과를 작도에 반영하지 못하면 '단일불일치' 반응에 이르게 됨을 실험을 통해 확인함으로써 동적 기하 교육에서 도구를 잘 다루는 능력도 중요하지만, 더욱 강조되어야 할 점은 보다 유연한 사고로 기하학적 관계들을 통찰하고 통찰한 아이디어를 작도에 반영할 수 있는 학생들의 수학적 능력임을 확인할 수 있었다. 한편, 학생 스스로 생성한 곡선에 대한 매개변수 방정식을 점검하고 신중하게 반성해보는 사고과정을 거쳐 추론 과정에 대한 오류를 수정하는 반성적 사고의 질적 변화를 경험하였으며, 학생 스스로 새롭게 산출한 곡선에서 얻어낸 불변적 성질이나 관계를 다른 대상에서 유사한 작도 방법으로 적용해보거나 또는 작도 방법을 일부 수정해서 작도함으로서 새로운 곡선을 지속적으로

유창하게 산출해내는 풍부한 반응을 통해 '반성적 일반화' 반응을 확인 수 있었다.

본 연구의 결론으로부터 다음과 같은 시사점을 얻었다.

첫째, 고대 수학자들이 기구를 이용해 다양한 곡선을 탐구했던 것처럼 학생들도 현대적 기구인 공학을 이용해 곡선을 탐구함으로써, 다양한 변화 현상에서 동적인 종속관계와 불변량을 사용하여 곡선의 자취를 예측하고 해석하는 능력을 향상시키기 위한 대수곡선의 풍부한 교육적 활용 가능성을 시사해주었다.

둘째, DGE에서 불변량을 사용함으로써, 단순히 기존의 지식을 습득만 하는 소비자의 역할이 아닌, 고대 수학자처럼 학생들도 자신만의 새로운 곡선을 창출하고 발견하는 생산자의 역할을 경험해보는 활동이 가능할 수 있었다(유윤재, 2010).

셋째, '1-수준 불변량'을 이용해 작도하느냐 또는 '2-수준 불변량'을 이용해 작도하느냐에 따라 작도의 결과가 달리 나타났는데, 이는 불변량을 인식하고 활용하는 수준의 차이를 보여주는 결과이었다. 특히, 자신의 전략대로 공학을 사용해 능숙하게 도구를 조작할 수 있고, 과제에 대한 이해가 부족한 상황이 아닌데도 과제 목표를 달성하지 못하는 '단일 불일치' 반응이 일어나게 되는 원인을 불변량을 인식하고 활용하는 수준으로 설명할 수 있었다. 또한, '2-수준 불변량'은 도형 사이의 기하학적 관계에 관한 본질적 구조를 통찰하고, 보다 융통성을 발휘하여 추론해 낸 결과임을 확인할 수 있었다. 실제로, 본 실험에 참여한 8명의 학생 중 '2-수준 불변량'을 인식하고 사용한 두 학생(M1, M5)의 수학적 재능은 '1-수준 불변량'만을 인식하고 사용했던 학생들보다 상대적으로 패턴을 발견하고 귀납적으로 추론하는 능력, 문제해결에서 다양한 전략을 구사하는 능력, 추상적 사고 능력, 수학 교과 성적 등이 상대적으로 더 우수한 학생이었다. 그러므로, 이것은 불변량을 인식하고 사용하는 차이를 보여주는 실험 결과이며, 동적 기하 분야에서 더 많은 학생들이 '2-수준 불변량'을 인식하고 사용할 수 있도록 도와주는 교수학적 방안에 관한 연구가 필요함을 시사한다.

이러한 연구 결과와 시사점을 바탕으로 DGE에서 불변량을 이용한 곡선의 탐구 활동의 활성화를 위해 다음과 같은 후속 연구를 제언한다.

첫째, 예상되는 곡선을 추측해보고, 공학 도구를 사용해 곡선을 스스로 작도해보는 활동을 실시한 후, 자신의 작도 과정을 하나하나 재음미하여 곡선의 자취의 방정식을 찾아보게 하는 활동은 본질적으로 도형의 성질에 관한 이해를 촉진시키며, 대수적인 사고와 기하학적 사고 간의 균형을 유지하는 활동으로서 기존의 곡선 지도 방법이 갖는 한계를 보완하는 대안적 교수·학습 방안이 될 수 있을 것이다(류희찬, 제수연 2009; 장혜원, 1997; 진만영 외 2012).

본 연구를 통해 공학 분야에서 불변적 성질은 잠재성이 풍부한 탐구 활동임을 확인할 수 있었던 만큼, 학생들이 불변적 성질을 적극적으로 활용할 수 있는 교육적 방안에 관한 연구가 필요하다. 수학에서 변하지 않는 불변적 성질은 매우 중요한 내용적 요소이다. 왜냐하면 수학에서 불변성은 함수적 변환 관계에서 변하지 않는 도형의 성질을 탐구하는 변환기하나 위상공간에서 compact, connected 성질과 같이 위상변환에 불변적 성질을 연구하는 위상수학의 근간이 되는 내용들과 위계적으로 연결될 수 있기 때문이다. 특히, 동적 기하 교육에서 다루게 되는 불변적 성질인 불변량은 무엇보다도 동적 기하 분야에서만 유일하게 다룰 수 있는 분야이고, 학교수학에서 학생들에게 기하의 불변적 성질을 인식하고 다룰 수 있게 도와줄 수 있으므로 그 교육적 중요성과 활용성이 매우 높다고 할 수 있다. 따라

서 공학 분야에서 불변량에 관한 좀 더 다양한 연구가 요구된다.

둘째, 본 연구에서는 2차원 평면에서 다루는 곡선을 국한하여 연구하였으나, 3차원 공간에서 다루어지는 곡면이나 곡선을 대상으로 공간도형의 성질을 탐구하는 연구를 시도해 볼만하다. 더구나, 3차원 공간에서 다룰 수 있는 다양한 공학 도구가 개발되어 보급되어 있는 만큼, 마음속에서 상상하던 공간도형의 기하학적 관계를 실제로 작도하여 구현해보는 활동을 통해 공간도형의 성질을 탐구하고 공간추론에 의해 곡선을 매개변수 방정식 $(x(t), y(t), z(t))$으로 표현해보는 활동은 부족한 공간기하학적 사고를 자극하고 향상시킬 수 있는 좋은 기회가 될 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌


김진호, 김용대, 서보억(2011). **3대 작도 문제 해결을 위한 곡선과 기구**. 서울: 교우사.

김향숙, 박진석, 도석수, 윤삼열, 김영미, 이세룡, 정성곤, 배옥향, 이혜경, 박혜정(2007). **창의성 신장을 위한 문제일반화**. 서울: 경문사.

남선주(2006). **역동적 기하 환경에서 분석법을 활용한 증명학습에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

류희찬(2004). 수학교육에서 탐구형 소프트웨어의 활용과 의미. **청람수학교육, 14**, 1-15.

류희찬, 윤옥교(2013). 역동적 기하 환경에서 비례를 이용한 중학교 함수의 작도. **학교수학 13**(1), 19-36.

류희찬, 제수연(2009). 역동적 기하 환경에서 파푸스의 분석법을 이용한 이차곡선의 작도활동에서 나타난 학생들의 수학적 발견과 정당화. **한국교원대학교 교육연구원, 25**(4), 168-189.

유윤재(2010). **수학영재교육**. 서울: 교우사.

윤옥교(2014). **역동적 기하 환경에서 비례에 기반한 함수와 이차방정식 작도 문제 해결 과정 연구**. 한국교원대학교 박사학위논문.

장혜원(1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰. **대한수학교육학회 논문집 7**(2), 327-336.

조정수, 이은숙(2013), 역동기하 환경에서 “끌기(Dragging)”의 역할에 대한 고찰, **학교수학 15**(2), 481-501.

진만영, 김동원, 송민호, 조한혁(2012). 원뿔곡선의 수학사와 수학교육. **한국수학사학회지. 25**(4), 83-99.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O.(2002). A Cognitive Analysis of Dragging Practices in Cabri Environments. *ZDM, 34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., & Antonini, S.(2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 89-96. Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M.A.,(2010). Generating Conjectures through Dragging in Dynamic Geometry: the Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 15(3)*, 225-253.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M.(2010). Integrating technology into mathematics education : Theoretical perspectives. In C. Hoyles & JB. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain*. pp. 89-132. New York: Springer.

Falcaede, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A.(2007). Approaching functions; Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 317-333.

Jones, K.(2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpreations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 55-85.

Laborde, C.(2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: The case of Cabri-geometry. In W.-C. Yang, S. C. Chu, T. de Alwis, & M. G. Lee (Eds.), *Proceedings of the 8th Asian Technology Conference in Mathematics*(1), 23-38.

Laborde, C., & Laborde, J. M. (1995). What about a learning environment where Euclidean concepts are manipulated with a mouse? In A. di Sessa, C. Hoyles, R. Noss (Eds.), *Computers and exploratory learning*. 241-262.

Leung, A.(2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, 135-157.

Leung, A.(2012). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. Paper *presented at the 12th International Congress on Mathematical Education*, Seoul, Korea.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A.(2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3). 439-460.

Marrades, R., & Gutierrez, A.(2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics, 44*(1-2), 87-125.

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Doctoral thesis. Bristol: University of Bristol.

Tall, D.(1995). Cognitive developments, representations and proof. Paper presented at the conference Justifying and Proving in School Mathematics, *Institute of Education*, London, pp. 27-38.

Weisberg, R. W. (2006). *Creativity: Understanding Innovation in Problem Solving, Science, Invention, and the Arts*. NJ: John Wiley & Sons. (김미선 역). 서울: 시그마프레스.

# A Case Study on Utilizing Invariants for Mathematically Gifted Students by Exploring Algebraic Curves in Dynamic Geometry Environments

Choi, Nam Kwang (DeaJean Science High School)
Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to examine thinking process of the mathematically gifted students and how invariants affect the construction and discovery of curve when carry out activities that produce and reproduce the algebraic curves, mathematician explored from the ancient Greek era enduring the trouble of making handcrafted complex apparatus, not using apparatus but dynamic geometry software. Specially by trying research that collect empirical data on the role and meaning of invariants in a dynamic geometry environment and research that subdivide the process of utilizing invariants that appears during the mathematically gifted students creating a new curve, this study presents the educational application method of invariants and check the possibility of enlarging the scope of its appliance.

* Key Words : Mathematically gifted students(수학영재), level-1 invariants(1-수준 불변량), level-2 invariants(2-수준 불변량), types of creating curves utilizing invariants(곡선 창출과정에서의 불변량 활용 유형)

논문접수 : 2015. 9. 22
논문수정 : 2015. 11. 10
심사완료 : 2015. 11. 10