대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 4, 499 ~ 524. Nov 2015

역동적 기하 환경에서 중등 영재학생들의 합동변환 활동에 대한 발생적 분해

양 은 경* · 신 재 홍**

본 연구는 GSP 환경에서 합동변환 개념에 대한 발생적 분해를 제시하고, 중학교 2학년 영재학급 학생 4명을 대상으로 참여 학생들의 합동변환 개념에 대한 발생적 분해가 어떻게 드러나고 변화하는지, 또한 드래그 활동이 합동변환 개념의 이해에 어떤 역할을 하는지 알아보고자 하였다. 합동변환 개념을 이해할 때, 학생들은 중요한 두 스키마인 '한 점 이동 스키마'와 '변환 이동 스키마'를 동시에 고려하였으며, 한 학생이 어느 한 스키마를 선호하거나 치중하여 사용하기 보다는 두 스키마를 모두 고려하되 방향을 정하기 어려운 과제일수록 '한 점 이동 스키마'에 더 의존하는 경향을 보였다. Law(1991)의 '한 점 이동 스키마'의 집약화에 따른 '도형 이동 스키마'는 학생들에게 관찰되지 않았으며, 합동변환의 합성을 완벽하게 이해하기 위해서 조정뿐만 아니라 가역적 사고가 더 필요하였다. 또한, 합동변환 개념을 이해하는 과정에서 학생의 드래그 활동은 정의역과 치역을 평면 위의 점으로 확장하는데 도움이 되었고, 벡터, 회전의 중심, 대칭축의 역할을 인식하는데 도움이 되었다.

Ⅰ. 서 론

기하학적 문제를 해결하는데 있어서 수학자들이 발견하고 창조해 낸 유용한 방법 중의 하나는 주어진 도형에 대한 기하학적 연구를 보다 편하고 쉽게 할 수 있는 익숙한 다른 도형으로 변환시키는 것이다. Euclid는 합동의 개념을 '포갬'이란 아이디어로 정의하고 이동의 개념을 도입하지만 어떻게 포개어지는가에 대해서는 그다지 중요하게 생각하지 않았으며, 그러한 이동의 수학적인 해석을 제공한 것은 Klein의 변환기하학(transformation geometry)이었다(우정호, 1998). Klein(1932)은 기하학에 군의 개념을 도입한 변환군(transformation group)을 이용하여 다양해진 기하학의 통합을 시도하였으며 기하학을 '어떤 특정한 변환군 아래에서 불변인 도형의 성질을 연구하는 학문'으로 규정하였다(백용배, 1995, 재인용). 수학에서 변환기하학을 도입해야 하는 이유는 기하학적 사고를 정적인 것에서 동적인 것으로 변화시킬 뿐만 아니라 기하의 기본 개념이면서도 지금까지 직관적으로 취급된 합동, 닮음 등의 개념을 자연스럽게 함수적 관점에서 명확히 지도할 수 있고(김정학, 1971; 안응용, 1995; 우정호, 1998), 초등기하에서의 합동변환, 닮음변환과 그에 대한 불변성 개념은 장래 사영기하, 아핀기하, 위상기하 등을 학습하기 위한 준비가 되기 때문이다(우정호, 1998). 변환기하학은 직관기하와 논증기하를 고등학교의 해석기하로 자연스럽게 연결해주는 가교 역할을 할 수 있고, 공

* 한국교원대학교 대학원, dubu123@hanmail.net (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)

학도구의 발달로 이제는 변환의 역동적이고 시각적인 측면에 훨씬 쉽게 다가갈 수 있는 환경도 마련되었다(박연정, 2006). 특히, 동적 기하 소프트웨어(Dynamic Geometry Software, 이하 DGS)를 이용하면 대칭변환, 회전변환, 평행이동뿐만 아니라 이들의 합성도 쉽게 할 수 있고 시각적으로 보여줄 수 있으며 도형을 연속적이며 역동적으로 관찰할 수 있어서 도형의 개념을 정확히 이해시키는데 도움을 줄 수 있고 수학의 여러 성질을 추론하게 할 수 있다(손홍찬, 2011; Guven, 2012; Dixon, 1997). DGS에서 드래그 활동(dragging activity)[1]은 DGS와 다른 공학도구 환경을 구별하는 뚜렷한 특징이며(Lopez-Real, & Leung, 2006; Baccaglini, 2010), 변화 속에서 기하학적 불변량(geometrical invariants)을 시각적으로 나타내고 의미 있게 해석하도록 도와준다(Leung, 2012).

Piaget의 조작적 수학 인식론의 핵심 개념인 반영적 추상화 이론에 근거하여 1980년 Dubinsky에 의해 소개된 APOS (Action-Process-Object-Schema) 이론은 학생이 수학 개념을 어떻게 학습하는지를 분석하는 이론으로서, 학습자의 인식과정은 비교적 일관성이 있는 방법으로 문제에 반응하는 경향인 스키마로 설명될 수 있다는 가정 하에(Dubinsky, 1991), 학생이 개념 학습에서 구성할 필요가 있는 구조와 메커니즘을 설명해주는 유용한 인지적 모델을 발생적 분해(genetic decomposition)라고 하였다(Weller et al., 2003).

지금까지 APOS 이론을 사용한 기존 연구들(Breidenbach. et al., 1992; Monaghan & Tall, 1994; Zazkis et al., 1996; Meagher et al., 2006, 박혜숙, 김서령, 김완순, 2005)은 수학적 귀납법, 함수, 선형대수, 군, 무한 등과 같은 내용에 집중되어 있었고, GSP(Geometer's Sketchpad) 환경에서 기하 내용을 소재로 한 국내 연구는 거의 없었다. 그러나 함수도 조작의 측면에서 볼 때는 변환의 일종이고(김정학, 1971), 합동변환은 함수적 관점뿐만 아니라 변환군의 구조를 보여줌으로서 대수학적인 내용과 기하학적인 내용의 관련성과 공통된 구조에 대한 안목을 제공해주며(우정호, 1998; 박연정, 2006), 지필환경보다 테크놀로지 환경이 학생의 탐구활동을 보다 극대화 할 수 있다는 점에서, GSP 환경에서 학생의 드래그 활동을 반영한 합동변환 개념의 인지적 모델을 세우는 연구는 의미가 있을 것이다.

따라서 본 연구는 그 중요성에 비해 상대적으로 많이 주목받지 못했던 '변환기하' 영역에서 학생들의 GSP를 활용한 합동변환 활동에서 드러나는 발생적 분해를 제시하고, 학생이 합동변환 개념을 이해할 때 역동적 환경에서의 주요 조작 활동인 드래그 활동이 어떤 역할을 하는지 알아보고자 한다. 이를 위해 다음과 같이 2가지 연구 문제를 설정하였다.

가. GSP 환경에서 학생은 합동변환의 개념을 어떻게 이해하는가? 합동변환의 발생적 분해는 무엇인가?

나. GSP 환경에서 합동변환을 이해할 때, 학생의 드래그 활동은 어떤 역할을 하는가?

---

1) 본 연구에서는 Arzarello et al.(2002)에 의해 소개되고 선행 연구들(Baccaglini-Frank, 2010; Leung, 2012; Leung, & Lopez-Real, 2002; 양은경, 신재홍, 2014a, 2014b)에 의해 검증된 4가지 드래그 활동을 말한다. 구체적으로 임의적 드래그(wandering dragging)는 학생이 도형의 흥미로운 형태나 규칙성을 발견하기 위해서 '드래그 가능한 점'들을 계획 없이 무작위로(randomly) 드래그 하는 것이고, 안내된 드래그(guided dragging)는 특별한 도형의 형태를 유지하기 위해서 '드래그 가능한 점'을 드래그 하는 것이며, 숨겨진 자취 드래그(dummy locus dragging)는 도형에서 발견된 성질이나 유지하기 위한 형태를 보존하기 위해서 '드래그 가능한 점'을 드래그 하면서 흔적이나 자취를 그리는 활동이고, 마지막으로 드래그 검증(dragging test)은 자신의 추측을 검증하고 구성된 도형이 요구한 성질을 보존하는지 알아보기 위해서 경로를 따라 점을 드래그 하는 활동을 말한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 합동변환(congruent transformation)

가. 합동변환의 종류

수학에서 변환(transformation)이라는 것은 한 점에서 다른 점으로 옮기거나, 도형을 다른 도형으로 옮기거나, 식을 다른 형태의 식으로 바꾸는 것을 모두 변환이라 하며, 합동변환은 점을 점으로 옮길 때, 두 점 사이의 거리가 변하지 않는 것을 말한다(최종렬, 1992). 즉, 합동변환은 두 집합 P, Q 사이에서 일대일 대응이고 등장사상(isometry)인 경우를 말한다(백용배, 1995). 이러한 합동변환은 도형을 이루고 있는 모든 점이 한 방향으로 같은 거리(벡터)만큼 움직이는 평행이동(translation), 도형을 그 평면 위의 고정된 한 점(회전의 중심)에 대해 일정한 각도만큼 회전하여 이동되는 회전이동(rotation), 도형을 이루는 모든 점을 마치 거울에 반사된 것처럼 주어진 선(대칭축)에 대해 뒤집는 대칭이동(reflection, 반사)[2], 대칭이동과 평행이동을 조합한 것으로 대칭축에 대하여 뒤집고, 다시 대칭축에 평행한 벡터를 따라 이동시키는 미끄러짐 반사(glide reflection, transflection)[3]로 구분된다.

나. 변환군(transformation group)

Klein(1932)은 여러 가지 기하학을 19세기 그 당시에 새로운 학문으로 각광받고 있던 군의 개념으로 통일하고 기하학적 성질을 군론적 입장에서 변환기하를 소개하였다. 이 때, 집합 X 상의 모든 변환집합 $T=\{f, g, h, \cdots\}$가 다음의 세 조건 ① $f, g \in T$ 이면 $f \circ g \in T$ (the closure property) ② 항등변환 $i \in T$ (the identity property) ③ $f \in T$ 이면 $f^{-1} \in T$ (the inverse property)를 만족할 때 T을 간략하게 변환군(transformation group)이라고 하며(백용배, 1995), 모든 합동변환의 집합은 군을 이룬다. 합동변환 집합이 합성에 대하여 닫혀 있고 역변환이 존재한다면 항등변환의 존재성도 보장되므로 합동변환의 집합이 군이 되는지 확인하기 위해서는 닫힘성과 역변환의 존재성이 중요하다(Martin, 1982). 두 합동변환의 합성은 항상 하나의 합동변환으로 환원 가능하다는 사실을 말해주며, 미끄러짐 반사는 합동변환 집합이 합성에 대하여 군을 이루어 변환군을 보장하는 필수 요소이자, 변환군이 완벽한 체계가 될 수 있도록 하는 합동변환의 한 종류이다(Wesslen, & Fernandez, 2005).

다. 부동점(fixed point)과 불변성(invariance)[4]

집합 X에서의 변환 f에 의하여 한 점 $P \in X$에 그 자신이 대응하면, 즉 $f(P)=P$이면 점 P는 변환 f의 부동점이라고 부르며, X의 모든 원소가 부동점이면 그 변환을 X에서의 항등사상이라고 부른다(송석준, 박종국, 1998). 예를 들어, 삼각형 ABC가 직선 DE에 대하여 대칭이동을 할 때, 이 대칭이동은 삼각형 ABC에만 적용되는 것이 아니라 삼각형 ABC와 직선 DE를 포함한 평면 위의 모든 점에 대하여 적용된 것이

2) 대칭이동에는 선대칭뿐만 아니라 점대칭과 면대칭이 존재하고, 한 도형을 한 점 주위로 180° 회전했을 때, 본래의 도형에 완전히 겹치는 경우를 점대칭이동이라고 하며, 본 연구에서의 대칭이동은 모두 선대칭이동을 의미한다.

3) 미끄러짐 반사에서 대칭이동과 평행이동의 순서는 상관없다.

4) GSP 환경에서 한 점을 드래그하는 동안 불변하는 도형의 특성과 유클리드 공간에서 합동변환군에 의하여 불변인 성질을 구분하기 위해서 전자를 불변량(invarinats)이라고 하고, 후자를 불변성(properties which are preserved by a congruent transformation)이라고 해석한다.

며, 직선 DE 위의 모든 점들은 부동점이다. 평면에서 정의역의 모든 점들이 부동점인 대칭축 위에 있을 때, 이 대칭이동은 항등사상이 된다. 즉, 삼각형 ABC만을 정의역으로 생각하지 않고 평면 위의 모든 점을 정의역으로 이해하는 것은 변환을 함수로 바라보는 관점에서 중요한 일이며(Hollebrands, 2003), 변환에서 부동점의 존재를 파악하는 것은 등장사상과 항등사상을 이해하는 데 도움이 된다.

또한 각 변환의 성질간의 포함관계 (위상변환 ⊂ 사영변환 ⊂ 아핀변환 ⊂ 닮음변환 ⊂ 합동변환)가 있음을 알 수 있으며, 불변성의 이해는 변환에 대한 보다 체계적인 개념 형성뿐만 아니라 변환을 일반화하는 데 효율적인 지도 방법이 될 것이다.

라. 합동변환과 수학과 교육과정

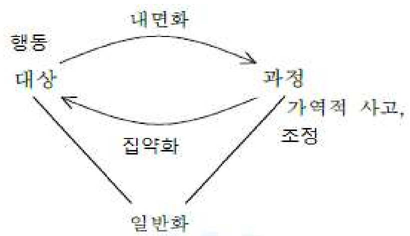
평행이동은 초등학교의 '밀기' 이후 일차함수와 이차함수의 그래프의 평행이동으로 진행되고 대칭이동은 초등학교 때 배운 '뒤집기'와 선대칭도형으로 시작하여 중학교 3학년에서의 이차함수 그래프의 축 대칭이동으로 나아가며, 회전이동은 초등학교 때 배운 '돌리기' 이후 중학교에서는 언급되지 않는다(교육과학기술부, 2011). 중학교에서 학생들은 합동조건을 이용한 논증기하를 중심으로 삼각형의 성질을 배우고 일차함수와 이차함수에서 그래프의 이동이라는 직관에 의존하여 평행이동, 대칭이동을 언급하며, 고등학교에서는 좌표를 도입한 해석기하를 사용하여 도형의 이동을 학습한다(교육과학기술부, 2011). 그러나 합동변환의 한 종류인 미끄러짐 반사는 교육과정 전체에서 언급되지 않으며, 평행이동의 벡터 개념은 고등학교 '기하와 벡터'에서 정식으로 다루어지게 된다.

초등학교의 합동변환 개념을 발전시키고 변환군을 통해서 합동변환 집합을 완벽한 체계로 이해할 수 있다면 학생들은 중학교의 논증기하와 다른 차원에서 기하를 새롭게 바라볼 수 있고, 도형의 이동을 변환의 관점으로 접근할 수 있으며, 대수와 기하의 공통적인 요소를 통해 두 영역 간의 연결성을 생각할 수 있을 것이다.

2. APOS 이론

가. 스키마의 구성요소와 요소 간의 상호작용

학생은 행동(action), 과정(process), 대상(object), 스키마(schema)라는 구조(structures)와 내면화(interiorization), 조정(coordination), 가역적 사고(reversal), 집약화(encapsulation), 일반화(generalization), 주제화(thematization)와 같은 정신적 메커니즘(mechanisms)을 통해 수학 개념을 이해한다(Arnon et al., 2013). 세 가지 기본 구조인 행동, 과정, 대상은 스키마라고 불리는 구조로 조직된다([그림 II-1] 참고).



[그림 II-1] 스키마와 스키마의 구성 (Dubinsky, 1991, p. 142)

행동이란 '대상'을 변환시키는 반복할 수 있는 실제적 또는 정신적 조작을 의미하며, 각 단계를 반드시 거치지 않고도 개인의 의식 속에서 총체적으로 완전한 활동이 일어나거나 일어나는 것으로 상상될 때, 활동이 과정으로 내면화되었다고 한다(Dubinsky, 1991). 이렇게 되면 학생이 새

로운 과정들을 얻기 위하여 이 과정과 다른 과정을 통합하기도 하고 기존의 과정과 새롭게 얻은 과정을 적절하게 연결시키면서 또 다른 과정을 형성하기도 하고(조정) 새로운 과정을 얻기 위하여 가역적 사고로 돌아가기도 한다(Arnon et al., 2013). 과정이 활동에 의하여 변형되는 것이 가능할 때 그 과정이 응집된 덩어리가 되어(집약화되어) 대상이 되었다고 한다(박혜숙 외 2인, 2005). 주제화는 스키마가 대상으로 전환되어 그 위에서 행동이 수행되거나 과정이 적용될 수 있는 메커니즘이고, 학생은 일반화를 통해 자신이 가지고 있는 과정으로부터 새로운 과정을 구성할 수 있는데, 동화(assimilation)와 조절(accommodation)이 모두 일반화의 예이다(Arnon et al., 2013).

예를 들어, 함수 스키마에서 행동에 머물러 있는 학생은 함수식(외재적 실마리)이 주어지지 않는 한 제시된 문제 상황이 함수인지 확인할 수 없으며, 특정한 점들을 대입해서 계산하거나 식을 조작하는 것을 제외하고는 이 함수를 다루지 못하게 된다(Dubinsky, 1991). 과정 단계의 학생은 하나 이상의 독립변수를 대입하여 종속변수의 값을 산출하는 것을 함수로 생각하여 가령 실수 x에 대한 함수값 $\sin x$을 생각할 수 있고, 합성함수와 역함수를 구할 수 있으며, 대상 단계의 학생은 함수의 집합을 구성하고 이를 더하거나 곱하는 조작에 대하여 생각할 수 있다(Asiala et al., 1997). 마지막으로 함수 스키마를 구성한 학생은 함수들을 집합으로 생각하여 그 집합 위에서 실행될 조작(연산)을 도입하고 조작(연산)의 성질을 확인하여 벡터 공간, 선형 사상 공간, 함수 대수 같은 개념을 적용할 함수 공간을 구성할 수 있다(Arnon et al., 2013).

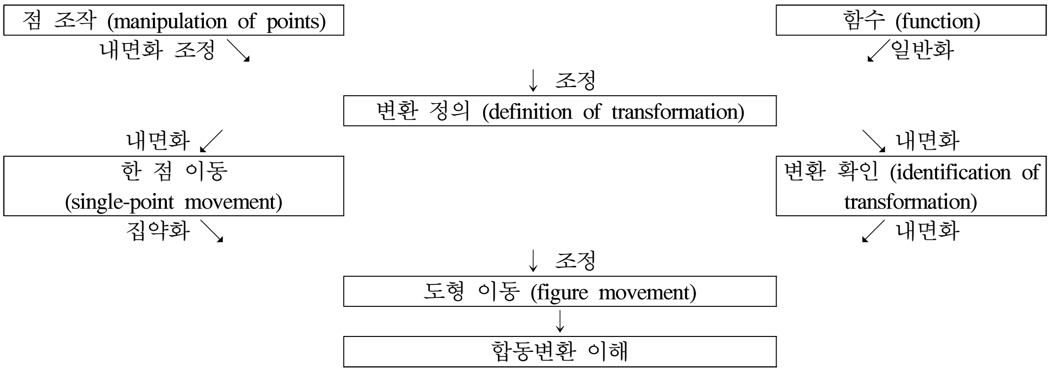
나. 발생적 분해

발생적 분해는 학생이 특정한 수학 개념을 학습하기 위해 구성할 필요가 있는 정신적 구조와 메커니즘을 설명하는 가설적인 모델이다. 개념에 대한 연구자의 교수·학습 경험, APOS 이론에 대한 지식, 수학 지식, 선행연구, 역사적 지식을 토대로 하여 만들어진 예비(preliminary) 발생적 분해로 시작하는 것이 일반적이며, 발생적 분해는 교수학적 자료와 설정을 발전시키거나 자료 수집을 통해 모델을 검증하기 위한 일종의 가설로 사용된다(Arnon et al., 2013).

1) 합동변환의 발생적 분해

아래의 [그림 II-2]는 ‘점 조작 스키마’와 ‘함수 스키마’가 조정되어 ‘변환 정의 스키마’를 구성하고 이를 내면화하여 ‘한 점 이동 스키마’와 ‘변환 확인 스키마’가 나란히 발달되며, 이 두 스키마가 조정되어 ‘도형 이동 스키마’를 구성함으로서 학생은 합동변환 개념을 이해할 수 있다고 설명한다.

‘점 조작 스키마’란 두 점을 지나는 직선을 작도하기, 한 직선 위에 있는 두 점 사이의 거리 측정하기, 두 직선 사이의 거리를 복사하기, 각을 측정하기, 각을 복사하기, 주어진 직선에 평행하고 한 점을 지나는 직선 작도하기, 주어진 직선과 수직하고 한 점을 지나는 직선 작도하기, 특정한 방향과 거리로 도형을 이동하기, 한 점을 중심으로 도형을 회전하기, 한 직선을 중심으로 도형을 뒤집기 등 이러한 대상(점) 위의 행동을 의미한다. 예를 들어, 평행이동에서 벡터의 길이(시점과 종점 사이의 거리)를 측정한 뒤 한 점 A를 지나면서 벡터와 평행한 직선을 긋고, 점 A에서 벡터의 크기만큼 재어 표시한 점을 B라고 하자. 이러한 ‘점 조작 스키마’가 내면화되고 두 가지 이상의 과정(벡터의 길이를 측정하기, 점 A를 지나면서 벡터와 평행한 직선을 긋기 등)이 조정될 때, 학생은 두 합동도형(두 점 A, B)이



[그림 II-2] 합동변환의 발생적 분해 (Law, 1991, p. 75)

일정한 방향으로 일정한 거리만큼 떨어져 있다는 사실을 인식하고 점 A가 점 B로 평행이동했다고 이해한다. 도형의 변환에서 '함수 스키마'란 점이 점으로 이동하는 일대일 대응을 이해하는 것을 말한다(Hollebrands, 2003). 즉, '함수 스키마'를 일반화한 학생은 평면에서 주어진 대상(점, 선 등)이 같은 평면에서 동일한 형태의 대상(점, 선 등)으로 이동한다는 것을 알 수 있다. 이제 이 두 스키마(점 조작 스키마와 함수 스키마)를 조정할 수 있는 학생은 합동변환의 정의를 말로 설명하거나 행동으로 표현할 수 있는 '변환 정의 스키마'를 구성하게 된다.[5] 합동변환에서 위치(location)[6]와 방향(orientation)은 중요한 요소인데, 학생이 이 두 가지 요소를 모두 인식하고 조정하여 어떤 합동변환인지 구체적으로 찾아낼 수 있다면 '도형 이동 스키마'에 이른 것이며, 점의 위치에 치중하여 합동변환을 인식하면 '한 점 이동 스키마', 도형의 방향에 치중하여 인식하면 '변환 확인 스키마'를 가지고 있다고 설명하였다. 예를 들어, '한 점 이동 스키마'를 가진 학생은 삼각형을 선대칭 이동시킨 상(image)을 작도할 때, 한 꼭짓점과 대칭축까지 거리를 재어 그 거리만큼 대칭축에서 떨어진 거리에 대응점을 작도하고 같은 방법으로 나머지 대응되는 두 꼭짓점을 더 작도한 뒤 세 점을 선분으로 연결하여 완성한다. 반면, '변환 확인 스키마'를 가진 학생은 두 합동도형이 제시될 때, 한 도형이 다른 도형으로 변환할 수 있는지 없는지 판단하기 위해서 두 도형의 방향을 따지고 비교한다. 따라서 학생은 '변환 확인 스키마'를 내면화하고, '점 조작 스키마'를 하나의 대상으로 집약화하여 두 스키마를 조정한 뒤에야 합동변환 개념을 이해하게 된다.

2) 합성함수와 역함수의 발생적 분해

Vidakovic(1996)은 함수 개념의 대상(집약화)에 이르지 못하더라도 학생이 함수 개념의 과정(내

5) Law(1991)의 연구 대상이었던 Purdue University의 예비초등학교 교사들은 형식적인 논증 기하수업(formal deductive geometry course)을 들은 적이 없고, 대칭이동을 뒤집기, 평행이동을 밀기, 회전이동을 돌리기로 배웠기 때문에, Law(1991)는 합동변환의 정의를 수학적으로 설명하거나 행동으로 표현할 수 있는(예를 들어, 대칭이동을 손바닥으로 뒤집어서 표현하는 행동 등) 학생은 '변환 정의 스키마'를 가지고 있다고 주장하였다.

6) Law(1991)는 방향(orientation)과는 다르게 '점 조작 스키마'에서 중요한 요소를 위치(location)이라고 하였는데, '점 조작 스키마'의 대상이 점이라는 사실을 감안할 때, 점의 위치란 한 점이 회전의 중심까지 이르는 거리, 한 점이 벡터의 크기만큼 이동한 거리, 한 점이 대칭축까지 이르는 거리에 의해 정해지는 대응점의 위치를 의미한다.

함수 스키마 (함수 개념의 과정-대상 이해)
정의역, 치역, 변환의 규칙, 그래프 등의 새로운 개념을 구성하고, 행동, 과정, 대상을 통해 함수 스키마에 이러한 개념을 부가하여 함수 스키마를 강화할 수 있다.

합성함수 스키마
- 둘 이상의 함수 과정을 조정할 수 있다.
- 과정 $F_f(g)$을 $F_f(g) = f \circ g$으로 정의할 수 있다.

역함수 스키마
- 함수 과정의 가역적 사고를 할 수 있다.
- 항등원을 구하기 위해 두 함수의 과정을 조정할 수 있다.
- x와 y의 위치를 바꾸고 y에 대하여 풀 수 있다.

함수 스키마, 합성함수 스키마, 역함수 스키마를 조정하여 역함수에 적용시킬 수 있다.

[그림 II-3] 합성함수와 역함수의 발생적 분해 (Vidakovic, 1996, p. 311)

면화)에 도달하면 합성함수 스키마를 구성할 수 있다고 주장하였고, [그림 II-3]과 같이 합성함수와 역함수의 발생적 분해를 기술하였다.

3) 본 연구의 예비 발생적 분해

Law(1991)는 지필환경에서 형식적인 논증 기하 수업을 들은 적이 없는 18명의 초등예비교사를 대상으로 세 종류의 합동변환(밀기, 뒤집기, 돌리기)만 가지고 연구하였다. 본 연구는 영재학급 학생을 대상으로 GSP 환경에서 미끄러짐 반사(대칭이동과 평행이동의 합성)를 포함한 네 종류의 합동변환의 개념을 모두 다룰 것이기 때문에 Law(1991)의 발생적 분해에 Vidakovic(1996)의 합성함수 개념이 추가될 것으로 예상되었고, 역동적 기하 환경에서 중요한 조작활동인 드래그 활동이 발생적 분해의 구성과정에 많은 영향을 미칠 것으로 예상하였다. 따라서 본 연구에서는 Law(1991)의 합동변환 스키마를 기본으로 하되, 예비 발생적 분해를 [그림 II-4]와 같이 가정하였다.

대칭이동, 평행이동, 회전이동 스키마
(합동변환 개념의 과정 이해)
한 점 이동 스키마의 집약화와 변환 확인 스키마의 내면화를 조정하여 도형 이동 스키마를 구성할 수 있다.

미끄러짐 반사 스키마
- 둘 이상의 합동변환 과정을 조정할 수 있다.
- 미끄러짐 반사를 집약화하여 하나의 대상으로 생각할 수 있다.

드래그 활동

[그림 II-4] 본 연구의 예비 발생적 분해

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

연구자들은 상황의 심층적 이해와 그 상황에 관계된 것들의 의미를 깊이 파악하기 위하여 질적 사례 연구(qualitative case study)를 사용한다. 질적 연구는 어떻게 그 모든 부분들이 모여 하나의 전체를 이루는지를 이해하기 위한 맥락 안에서의 해석이고, 질적 연구의 목표는 연구자의 영향력을 제거하는 것이 아니라 이를 이해하고 생산적으로 사용하는 것이다(Maxwell, 2012). 본 연구는 GSP 환경에서 합동변환 개념을 이해하는 학생들의 사고과정을 살펴보고, 학생과의 원활하고 의도적인 상호작용을 위해 수업 진행자가 연구자(teacher-researcher, 이하 연구자)인 질적 사례 연구 방법으로 설계되었다.

Piaget의 임상적 면접(clinical interview)에서 유래된 교수 실험(teaching experiment)은 인간이 자기조직화(self-organizing)와 자기조정(self-regulating)이 가능하다는 전제 하에 학생의 수학(students' mathematics)[7)]을 살아있는 모델로 확립하고 학생이 구성하는 스키마를 생산하는 것을 기본 목표로 하며, 연구자는 자신의 이론적 가정과 선행 경험에 기반한 가설과 예비적 모델로 시작하여 가설 형성, 실험적 검증, 가설의 재구성이라는 순환 사이클을 사용하여 교수실험을 진행한다(Steffe & Thompson, 2000). 이와 같은 맥락에서 본 연구는 이론적 분석, 수업 설계와 구현, 자료 수집과 분석의 3단계로 이루어졌다.

1. 연구 대상

본 연구가 기존의 중학교 유클리드 기하를 새로운 관점에서 바라볼 수 있는 새로운 소재를 다루고 GSP 환경에서 합동변환의 스키마를 찾아내어 인지적 모델을 제안하는 것이기 때문에, 연구대상자로서 일반학생보다는 영재학급의 학생들이 더 적합하다고 생각되었고, 유클리드 기하(합동변환, 닮음변환), 아핀기하, 사영기하, 위상기하를 포함한 다소 어려울 수 있는 변환기하

<표 III-1> 연구 대상자들의 특징

학생(가명)	특징
가영(여)	과제가 주어지면 항상 끝까지 완벽하게 수행하려는 모습을 보였다. 자신이 모르는 내용은 항상 교사에게 질문하면서 수업시간에 적극적으로 참여하였다. 과제에 대한 집착력과 집중력이 뛰어났고 모든 수업이 끝난 후 수업 내용을 가장 잘 이해하고 가장 우수한 성취를 보여준 학생이었다. 짝인 서영이와의 활발한 의사소통으로 어려운 과제들을 많이 성공하였다.
서영(여)	과제에 대한 집착력이 있으며, 다소 활발한 성격으로 기하학적 직관력이 뛰어나며, 창의력이 있는 학생이었다. 어려운 과제들은 짝인 가영이와 대체로 협력 하였으나, 자신 만의 해결법을 고집하기도 하였다.
호영(남)	수학에 대한 기본 지식이 풍부하며 매사 긍정적인 학생이었다. 자신의 생각을 잘 표현하는 편이며, 교사에게 질문을 많이 하는 학생이었다. 새로운 내용에 관심이 많고, 수업 하는 내내 과제 해결의 주도권을 잡고 짝인 호진이를 도와주는 모습이 인상적이었다.
호진(남)	신중함과 성실함이 돋보이나 자신의 생각을 잘 표현하지 못하고 질문이 있어도 교사에게 물어보지 않고 스스로 해결하려는 경향이 강한 학생이었다. 수업 시간 동안 짝인 호영이의 의견을 대체로 들어주는 편이었고, 호영이의 도움을 많이 받았다.

7) students' mathematics는 일반적이거나 보편적인 개념의 수학이 아닌 학생의 실재(reality)에 있는 수학을 말하며, mathematics of students는 students' mathematics에 대한 연구자의 해석과 students' mathematics의 살아있는 모델을 의미한다(Steffe & Thompson, 2000).

학을 합동변환을 기준으로 중학교 수준에 맞게 2학년 영재학급 학생들에게 가르쳤다. 첫 수업 시간에 영재학급 20명의 학생들을 대상으로 van Hieles geometry test[8])를 실시하였고 단일사례 추출을 위해서 GSP 프로그램을 전혀 다룬 적이 없는 ‘3’ 수준인 4명의 학생 즉, 남자 2명, 여자 2명을 연구대상자로 선정하였다. 또한, 문제 해결 과정에서 학생들의 참여 및 의사소통을 극대화하기 위하여 같은 반, 동성으로 두 사람씩 짝지어 앉도록 하였다. <표 III-1>은 연구 대상자들의 성향과 과제 해결 과정에서 보였던 특징이다.

2. 연구 일정

본 연구는 2015.1.24.부터 2015.8.17.까지 진행되었다(<표 III-2> 참고). 교수・학습 경험, 선행 연구 검토, APOS 이론 분석을 통해 약 2개월에 걸쳐 예비 발생적 분해를 마련하였고, 총 8차시 수업 중 1-2차시에는 연구대상자 선정 및 본 수업을 위해 학생들이 GSP의 기능을 익히는 시간을 따로 가졌으며, 2015.4.17.부터 2015.7.17.까지 합동변환의 정의, 합동변환의 합성 및 성질을 하위 주제로 하는 본 수업을 실시하였다.

<표 III-2> 본 연구 일정 및 수업 내용

일 시	연 구 추 진 내 용	차시	수업 주제 및 내용	소요 시간 (분)
4/10	수업 실현을 위한 연구 대상자 선정	1	오리엔테이션 및 van Hieles geometry test	90
4/13	본 수업을 위한 준비단계	2	GSP 기본 기능 익히기	90
4/17	수업 구현, 자료 수집과 자료 분석 (자료 수집과 분석은 동시에 이루어지며, 분석 결과는 다음 차시 수업에 반영된다.)	3	**합동변환의 정의1** : 합동변환의 개념을 이해하고 GSP 환경에서 평행이동한 도형을 작도하기	90
6/12		4	**합동변환의 정의2** : 합동변환의 개념을 이해하고 GSP 환경에서 대칭이동, 회전이동, 미끄러짐 반사한 도형을 작도하기	90
6/15		5	**합동변환의 합성1** : 대칭이동만으로 평행이동, 회전이동 만들기	90
6/22		6	**합동변환의 합성2** : 두 합동변환의 합성을 작도하고 성질 파악하기	90
7/10		7	**합동변환의 합성3** : 두 합동변환의 합성을 작도하고 성질 파악하기	90
7/17		8	**합동변환에 좌표평면 도입하기**	90
7/18 -	자료 정리 및 작성			

8) van Hiele는 기하 학습 수준을 5가지로 나누었는데, 3 수준(추상적 관계적 수준)의 학생들은 도형에서 존재하는 성질들과 성질 사이의 관계를 알 수 있으며, 도형의 포함관계와 수학적 정의를 이해할 수 있고, 간단한 형식적 증명도 가능하다(김자경, 2005).

3. 수업 과제

본 연구의 수업 과제 선정을 위해서 선행 연구에서 사용된 문제들을 수집하여 GSP 환경과 중학교 2학년 수준에 적합하게 재구성하였고, 영재학급을 담당하는 2인의 수학교사에게 추가 검토 및 수정을 받았다. <표 III-3>는 과제에 대한 개요 및 참고문헌을 나타낸 것이다.

<표 III-3> 본 연구의 수업 과제

상위 주제		하위 주제		참고문헌
과제 1	삼각형 ABC를 벡터 $\overrightarrow{DE}$(시작점 D, 도착점 E)만큼 평행이동한 도형을 예상하고, <파일 1>을 열어 GSP를 사용하여 이를 작도하여라.(벡터는 삼각형의 한 변 위에 있다.)	문제 1-1	합동변환의 불변성	Hollebrands (2007)
		문제 1-2	부동점	
		문제 1-3	항등원	
		문제 1-4	함수적 사고	
		문제1-5	벡터 개념	
과제 2	삼각형 ABC를 점 O에 90도 회전이동한 도형(시계반대방향)을 예상하고, <파일 2>를 열어 GSP를 사용하여 작도하여라.(회전의 중심이 삼각형 내부에 있다.)	문제 1-1	합동변환의 불변성	Hollebrands (2004)
		문제 1-2	부동점	
		문제 1-3	항등원	
		문제 1-4	함수적 사고	
		문제 1-5	회전의 중심 개념	
과제 3	삼각형 ABC와 그 내부를 선분 DE에 대칭이동한 도형을 예상하고, <파일 3>을 열어 GSP를 사용하여 작도하여라.(대칭축은 삼각형의 한 꼭지점을 지난다.)	문제 1-1	합동변환의 불변성	Hollebrands, K. F. (2003).
		문제 1-2	부동점	
		문제 1-3	항등원	
		문제 1-4	함수적 사고	
		문제 1-5	대칭축 개념	
과제 4	삼각형 ABC를 선분 DE, 벡터 FG(시작점 F, 도착점 G)에 미끄러짐 반사한 도형을 예상하고, <파일 4>를 열어 GSP를 사용하여 작도하여라.	문제 1-1	합동변환의 불변성	
		문제 1-2	부동점	
		문제 1-3	미끄러짐 반사개념	
과제 5	삼각형 ABC를 두 대칭축($\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{FG}$)에 대하여 각각 대칭이동한 도형을 GSP를 이용하여 작도하시오.(단 , $\overline{AC} // \overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{FG}$이며, 순서는 $\overleftrightarrow{DE}$에 대하여 대칭이동 한 후 $\overleftrightarrow{FG}$로 대칭이동하며, 처음 대칭이동한 도형에는 삼각형 A′B′C′를, 두 번째 대칭이동한 도형에는 삼각형 A″B″C″라고 이름을 각각 붙이시오.)	문제 5-1	두 합동변환의 조정	Hollebrands (2003)
		문제 5-2	두 합동변환의 가역적 사고	
과제 6	삼각형 ABC를 두 대칭축($\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{FG}$)에 대하여 각각 대칭이동한 도형을 GSP를 이용하여 작도하시오.($\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{FG}$, 두 대칭축 $\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{FG}$의 교점은 H) (단, 순서는 $\overleftrightarrow{DE}$에 대하여 대칭이동 한 후 $\overleftrightarrow{FG}$로 대칭이동하며, 처음 대칭이동한 도형에는 삼각형 A′B′C′를, 두 번째 대칭이동한 도형에는 삼각형 A″B″C″라고 이름을 각각 붙이시오.)	문제 6-1	두 합동변환의 조정	Martin (1982), Wesslén & Fernandez (2005)
		문제 6-2	합동변환의 가역적 사고	

4. 자료 수집 및 분석 방법

각 차시별로 학생들의 수업 장면은 동영상으로 녹화되었으며, 컴퓨터 화면상의 학생들의 GSP 조작 과정은 oCam 프로그램을 사용하여 수집되었다. 학생들이 수업시간에 작성한 활동지와 GSP 파일, 학생과의 비구조화된 면담 내용, 연구자가 작성한 현장노트(field note)도 연구의 자료로서 수집되었다. 질적 사례 연구의 타당도와 신뢰도를 높이기 위해서 자료수집 과정을 4개월 이상 잡았으며, 한 가지의 관찰에 의존하기 보다는 다양한 자료 출처를 활용하는 삼각검증법(triangulation)을 사용하였다. 수업 화면 동영상은 모두 전사되고 패턴들은 범주들로 변형되며, 이후 항목들은 이 범주들로 분류되었다. 인용된 발췌문은 <발췌문 번호 - 과제 번호 - 학생명>으로 구분하여 제시되었으며, 교사는 TR[9])로, 학생은 가영, 서영, 호영, 호진이라는 가명으로 표현되었다. 또한, 인용된 발췌문에서 연구자는 확신이 있는 경우에 한하여 대괄호([ ])를 사용하여 학생의 생략된 인터뷰 내용을 보충하였고, 소괄호(( ))를 사용하여 학생이나 연구자의 행동을 자세하게 서술하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 합동변환의 발생적 분해

가. 학생은 합동변환에서 두 도형 사이의 모양과 크기에 대한 불변성과 일대일대응 관계를 이미 인식하고 있었는데, 이것은 합동변환을 이해할 때 학생이 이미 함수 스키마를 가지고 있음을 말한다.

합동변환 후의 도형을 예상하고 작도하는 과제(과제 1- 과제 4)에서 과제 1의 호진이를 제외한 모든 학생들이 삼각형 ABC(합동변환 전의 도형)의 모양과 크기를 그대로 보존한 채 삼각형 A′B′C′(합동변환 후의 도형)를 작도하였다. [그림 IV-1]은 합동변환 전후의 불변성에 대한 활동지의 물음에 호진이가 작성한 답이며, 다

과제 1(3)-평행이동	과제 2(3)-회전이동
(3) 삼각형 ABC와 평행이동한 삼각형 A'B'C'에서 변하지 않는 것은 무엇인가? (예 ; 위치, 모양, 크기, 방향, 면적, 각의 크기, 벡터의 크기, 위치, 방향 등) 모양, 크기, 면적, 각의 크기, 각변의 길이가 있다.	(3) 삼각형 ABC와 회전이동한 삼각형 A'B'C'에서 변하지 않는 것은 무엇인가? (예 ; 점의 순서, 직선성, 평행성, 각도, 모양, 선분의 길이, 면적, 회전이동의 중심 등) 각도, 모양, 선분의길이 면적, 회전이동의 중심
과제 3(3)-대칭이동	**과제 4(3)-미끄러짐반사**
(3) 삼각형 ABC(내부 포함)와 대칭이동한 삼각형 A'B'C'에서 변하지 않는 것은 무엇인가? (예 ; 점의 순서, 직선성, 평행성, 각도, 모양, 선분의 길이, 면적, 대칭축 등) 각도, 모양, 선분의 길이, 면적, 대칭축, 직선성	(3) 삼각형 ABC와 미끄러짐 반사한 삼각형 A'B'C'에서 변하지 않는 것은 무엇인가? (예 ; 점의 순서, 직선성, 평행성, 각도, 모양, 선분의 길이, 면적, 대칭축 등) 직선성, 각도, 모양, 선분의길이, 면적, 대칭축

[그림 IV-1] 과제 1(3), 과제 2(3), 과제 3(3), 과제 4(3)에 대한 호진이의 활동지

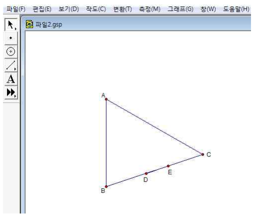
9) 본 논문의 제1저자가 교사로서 모든 수업을 진행하였다.

른 학생들도 동일하게 대답하였다. 도형의 변환에서 '함수 스키마'란 점이 점으로 이동하는 일대일 대응을 이해하는 것으로(Hollebrands, 2003), 학생들은 삼각형 ABC가 삼각형 A′B′C′로 변환할 때, 모양과 크기를 유지하는 것뿐만 아니라 각 꼭짓점 사이의 대응관계도 이미 인식하고 있었다.

다음은 삼각형 ABC의 평행이동에 대한 <과제 1>에 대한 호진과의 대화내용과 호진이의 예상 작도 ([그림 IV-2])이다.

<발췌문 1 - 과제 1 - 호진>

<과제 1> 삼각형 ABC를 벡터 $\overrightarrow{DE}$(시작점 D, 도착점 E)만큼 평행이동한 도형을 예상하고, <파일 1>을 열어 GSP를 사용하여 이를 작도하여라. (벡터는 삼각형의 한 변 위에 있다.)



1TR : [네가 a라고 쓴 부분에서] 선생님이 이해한 바는 $\overrightarrow{BB'}$가 벡터 $\overrightarrow{DE}$의 크기였던 것 같아. 맞니?

2호진 : 네.

3TR : 그런데 이 두 작도를 비교해볼 때, 왼쪽 작도에서 두 삼각형의 크기가 달라졌는데 [삼각형 A′B′C′이 더 커졌는데]...

4호진 : 아, 작도를 할 때, 키보드가 밑에 있어서 그리다가 점 A′가 빗겨나가 찍힌 거예요. 원래 똑같이 맞추려고 했는데[두 삼각형의 크기가 같도록 하려고 했는데].

5TR : 아, 원래 두 삼각형[삼각형 ABC, A′B′C′]의 크기가 같아야 한다?

6호진 : 네, 그렇죠.

7TR : 그럼. 어떻게 그린거야?

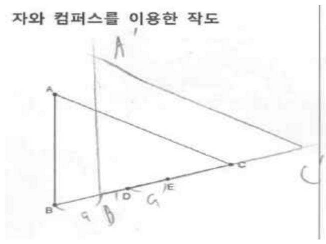
8호진 : 네?

9TR : 점 A를 찍고 점 A′를 찍은 건가?

10호진 : 아니요. 선분 AB의 길이만큼 A′B′를 찍고, 선분 BC의 길이만큼 B′C′를 찍어서 [선분 A′C′를] 연결했죠.

11TR : 아, 선분의 길이를 중심으로 작도를 했던 거야?

12호진 : 네.



[그림 IV-2] 호진이의 <과제1>에 대한 예상 작도

호진이는 <과제 1>의 평행이동 결과를 [그림 IV-2]처럼 예상하여 작도하였고, 교사는 삼각형 ABC와 삼각형 A′B′C′의 크기가 달라진 점을 발견하고(3TR) 호진이가 작성한 [그림 IV-1]의 내용과 상충되고 있음을 확인하였다. 그러나 호진이는 평행이동에서 두 삼각형의 크기가 서로 같다는 사실을 알고 있었고(6호진), 활동지 아래에 키보드가 있는 것을 모르고 선을 긋는 바람에 선이 삐뚤어졌다고 설명하였기 때문에(4호진), 호진이의 작도는 단순한 실수에 불과한 것이었다. <과제 1>에서 호진이가 다른 학생들과 달리 합동변환 후 도형의 크기가 달라진 점을 인지하지 못했다고 보기는 힘들며, 오히려 크기를 그대로 유지해야 한다고 말하는 점을 보아(4호진), 작도하기 전에 이미 두 도형의 모양과 크기에 대한 불변성뿐만 아니라 두 도형이 서로 일대일 대응임을 아는 함수 스키마를 가지고 있었다.

이렇게 중학교 학생들이 두 합동변환 사이에서 모양과 크기의 불변성을 이미 인식하고 일대일대응을 쉽게 파악할 수 있었던 것은 초등학교 교육과정에서 평면도형의 이동을 활용하여 자신만의 규칙적인 무늬를 만들고, 실생활에서 같은 무늬 찾기, 종이 겹쳐 오리기, 도장 찍기, 데칼코

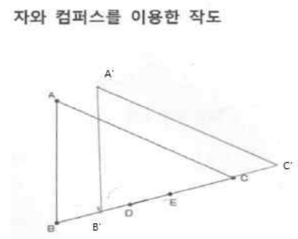
마니 등 구체적인 조작 활동을 통하여 도형의 합동의 뜻을 직관적으로 이해시키고, 선대칭도형과 점대칭도형의 성질을 이용하여 각 도형의 나머지 부분을 그릴 수 있게 하는 활동을 통해 대칭이동을 도입하였기 때문이다(교육과학기술부, 2011).

나. 합동변환을 이해할 때, 학생은 ‘한 점 이동 스키마’와 ‘변환 이동 스키마’를 동시에 고려하였다.

[그림 II-2]의 발생적 분해에서 가장 중요한 두 스키마는 ‘한 점 이동 스키마’와 ‘변환 이동 스키마’이며, Law(1991)는 학생에 따라 ‘한 점 이동 스키마’를 선호하는 학생과 ‘변환 이동 스키마’에 집중하는 학생이 따로 있다고 주장하였다. 그러나 본 연구에서 4명의 학생은 모두 삼각형 ABC에 대한 합동변환의 상을 찾을 때, 기준(벡터, 회전의 중심, 대칭축)으로부터 떨어진 점의 위치를 기반으로 하는 ‘한 점 이동 스키마’와 방향을 비교하여 판단하는 ‘변환 이동 스키마’를 모두 고려하였으며, 어느 한쪽의 스키마만 내면화하지 않았다. 이것은 Law(1991)의 발생적 분해에서 ‘한 점 이동 스키마’와 ‘변환 이동 스키마’가 위계를 가지고 발전하는 것이 아니라 나란하게 발전한다는 주장과는 동일하지만, 학생에 따라 어느 한 쪽의 스키마를 선호한다는 주장과는 다른 것이다.

<발췌문 2 - 과제 1 – 가영>

1TR : 우리 첫 시간에 했던 거야. 평행이동.
2가영 : 네.
3TR : 작도를 어떻게 했는지 말해줄래?
4가영 : 작도를요?
5TR : 응.
6가영 : 작도할 때 자를 사용해서 제대로 한 건 아닌데.
7TR교사 : 음. 아니. 방법 말이야. 아니 이 정도도 반듯한 거 아닌가? 음. 점을 먼저 찍고 이렇게 그린 건지, 아니면 어차피 삼각형 형태가 같으니까 그대로 그린건지. 그게 궁금한 거야.
8가영 : 아. (손가락으로 선분을 그리면서) 이때는 그냥 [선분을] 그린 것 같은데.
9TR : 이렇게 선분을 위주로 해서[그려서]?
10가영 : 네.
11TR : 그러니까 선분 A′B′를 그리고 어차피 B′C′는 같은 방향이니까[아래 변의 연장선이니까]
12가영 : 네.
13TR : 그래서 A′랑 C′를 연결한 거구나.
14가영 : 네.
15TR : 아, 그렇구나.



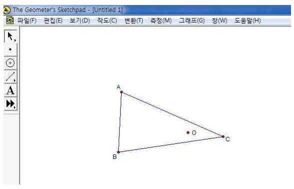
[그림 IV-3] 가영이의 <과제1>에 대한 예상 작도

다른 학생들과 마찬가지로 가영이는 ‘점 이동 스키마’를 내면화하여 변환하려는 대상을 점이 아닌 두 선분($\overline{AB}, \overline{BC}$)으로 생각하였고(8가영), 변 $\overline{BC}$ 위의 벡터 $\overrightarrow{DE}$가 방향에 대한 단서를 제공해 주는 바람에(11TR, 12가영) 방향을 결정하는 ‘변환 이동 스키마’를 쉽게 고려할 수 있었다. Law(1991)는 ‘한 점 이동 스키마’의 집약화란 도형 작도하는 과정을 하나의 대상으로 집약화하여 그러한 대상을 ‘점 이동 스키마’에 동화시키는 것으로 설명하였다. 가영이가 변환하려는 대상을 점이 아닌 두 선분($\overline{AB}, \overline{BC}$)으로 생각한 것을 사실이지만 마지막에 두 점(A’, C’)을 선분으로 연결시켰으므로(13TR, 14가영), Law(1991)의 ‘한 점 이동 스키마’의 집약화가 일어났다고

보기는 힘들다.

<발췌문 3 - 과제 2 - 가영>

<과제 2> 삼각형 ABC를 점 O에 90도 회전이동한 도형(시계반대방향)을 예상하고, <파일 2>를 열어 GSP를 사용하여 작도하여라. (회전의 중심이 삼각형 내부에 있다.)



1TR : 이 문제가 쉬운 문제가 아니었는데, 차분하게 잘 해 주었어.

2가영 : 하하.

3TR : 작도하는 과정에서 각도기 필요하다고 얘기 했던 것 기억나니?

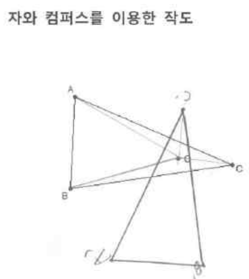
4가영 : 아, 네.

5TR : 네 작도에서 샘이 이해한 부분이 맞는지 확인해줘.

6가영 : 네.

7TR : 회전의 중심과 각 꼭짓점을 연결시키고 각 꼭짓점을 90도씩 이동시켜서 [A′, B′, C′를] 선분으로 연결한 것 맞아?

8가영 : 네.



[그림 IV-4] 가영이의 <과제2>에 대한 예상 작도

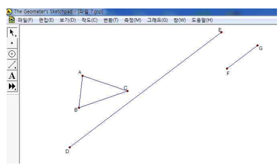
[그림 IV-3]에서 가영이는 각 꼭짓점을 회전의 중심까지 선으로 연결하고 90도 회전한 뒤에 생긴 점들(A′, B′, C′)을 연결하여 삼각형 A′B′C′를 작도하였다. <발췌문 2>에서 가영이는 ‘한 점 이동 스키마’를 내면화하여 ‘변환 이동 스키마’를 사용한 반면, <발췌문 3>에서는 90도 회전이라는 방향을 고려한 ‘변환 이동 스키마’를 생각하지만 ‘한 점 이동 스키마’에 더 의존하여 작도한 것을 알 수 있었다.

<과제 2>는 <과제 1>에 비해 방향을 결정하는 일이 보다 까다로운 회전이동 과제였다. 이것은 선호도에 따라 학생이 ‘한 점 이동 스키마’나 ‘변환 이동 스키마’를 취사선택한다는 Law(1991)의 주장과는 달리, 학생들은 두 스키마를 동시에 고려하되 과제의 특성에 따라 어느 한쪽 스키마에 더 많이 의존하고 있음을 말해준다.

다. 위치보다 방향이 더 까다로운 합동변환에서 학생은 ‘한 점 이동 스키마’에 의존하여 문제를 해결하였다.

<발췌문 4 - 과제 4 - 호영>

<과제 4> 삼각형 ABC를 선분 DE, 벡터 FG(시작점 F, 도착점 G)에 미끄러짐 반사한 도형을 예상하고, <파일 4>를 열어 GSP를 사용하여 작도하여라.

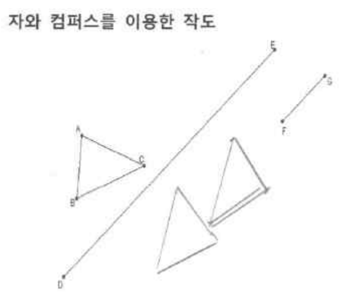


1TR : 그림 하나 더 보면, 맨 마지막에 미끄러짐 반사를 작도했어. 이건 어떻게 작도한 거야?

2호영 : 이것도[대칭이동도] 점을 찍어서 한 거고[우선 대칭이동한 삼각형은 점을 찍어서 작도한 것이고]. 이것은[대칭이동한 삼각형은] 전체가 [평행이동하게] 움직인 거예요. [벡터의] 길이와 방향을 생각한 것이지만 [방향과 각도는] 정확하게 그려지진 않았어요. (미소)

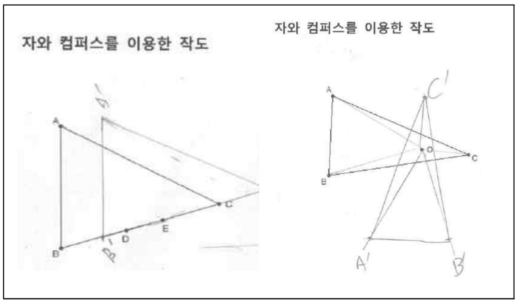
3TR : 아, [처음 대칭이동할 때는] 점을 찍었구나. 대칭이동한 삼각형이 약간 삐뚤게 된

것은 수직으로 내릴 때 약간 착오가 있었다 고 생각하면 되는 거야?
4호영 : 네.



[그림 IV-5] 호영이의 <과제4>에 대한 예상 작도

미끄러짐 반사는 대칭이동과 평행이동의 합성으로 <발췌문 4>에서 호영이는 삼각형 ABC의 대칭이동을 먼저 한 뒤 대칭이동한 삼각형을 다시 평행이동을 하여 미끄러짐 반사를 완성하였다(2호영). 호영이는 대칭이동하는 과정에서 '한 점 이동 스키마'에 치중하였고, 이를 평행이동하는 과정에서는 '전체가 움직였다'고 말하는 것을 보아 방향을 고려한 '변환 이동 스키마'에 치중하였음을 알 수 있었다(2호영). 이것은 대칭이동과 평행이동이 공존하는 미끄러짐 반사에서 학생이 작도를 하기 위해 의존하는 스키마가 서로 다르다는 사실을 명백하게 드러내는 것이다.



[그림 IV-6] 서영이의 <과제1>, <과제2>에 대한 예상 작도(좌: 과제1, 우: 과제2)

[그림 IV-6]에서는 서영이가 평행이동과 회전이동을 작도하기 위해서 사용한 중심 스키마가 서로 다르다는 사실을 나타낸다. 평행이동에서 서영이는 다른 학생들과 마찬가지로 '변환 이동 스키마'에 의존하여 선분들을 변환하였고([그림 IV-6, 좌]), [그림 IV-6, 우]에서는 <발췌문 3>의 가영이처럼 '한 점 이동 스키마'에 의존하여 각 꼭짓점을 90도씩 회전이동 시킨 후 선분으로 연결하였다.

이것은 대칭이동과 회전이동은 평행이동에 비해 방향을 따지는 일이 더 까다롭기 때문에 작도를 정확하게 하기 위해서 학생들은 선분이나 도형 전체를 한 번에 변환하기 보다는 한 점씩 이동시켜 선분으로 연결하는 '한 점 이동 스키마'에 주로 의존한다는 사실을 말해주고 있다.

라. 학생은 '한 점 이동 스키마'의 내면화와 '변환 이동 스키마'의 내면화의 조정을 통해 합동변환의 개념을 이해하였다.

Law(1991)는 '도형 이동 스키마'를 가진 학생은 '한 점 이동 스키마'를 도형 F에 적용시키고, 도형 F를 다시 과정으로 비집약화하고 나서 '변환 이동 스키마'와 조정하여 도형 F를 완전체(a whole entity)로 집약할 수 있다고 하였다. 예를 들어, 정사각형의 합동변환 도형을 작도할 때, '한 점 이동 스키마'에만 머문 학생은 정사각형의 각 꼭짓점의 상을 찾아서 이들을 선분으로 연결하지만, '도형 이동 스키마'를 가진 학생은 한 점에 대하여 '한 점 이동 스키마'를 적용시키고, 이를 방향을 결정하는 '변환 이동 스키마'와 조정하여 정사각형을 통째로 한 번에 작도할 수 있다. 이것은 Law(1991)가 학생들에게 모눈종이에다 작도를 요청했기 때문에 그의 '도형 이동 스키마'에 대한 설명처럼 '한 점 이동 스키마'를 한 꼭짓점에 적용하고 나머지 부분을 통째로 작

도할 수 있었다. 그러나 본 연구에서는 학생에게 제시된 과제도 정삼각형이 아닌 일반적인 삼각형인데다가 작도를 해야 할 종이도 모눈종이처럼 위치에 대한 힌트가 깔려있는 종이가 아니었기 때문에 학생들은 ‘한 점 이동 스키마’를 사용하여 한 점을 작도하고 나서 전체를 하나로 인식하여 나머지 부분을 한 번에 작도할 수 없었다. 이것은 모눈종이가 아닌 환경에서 비정형적인 도형을 제시받은 경우, ‘한 점 이동 스키마’를 집약화하여 도형 F에 적용시키고 ‘변환 이동 스키마’와 조정하여 도형 F를 완전체(a whole entity)로 집약할 수 있다는 Law(1991)의 ‘도형 이동 스키마’가 학생들에게 관찰되지 않음을 의미한다. 따라서 본 연구에서 학생들은 ‘한 점 이동 스키마’를 모든 꼭짓점에 대하여 적용시켜 내면화한 뒤 ‘변환 이동 스키마’의 내면화와 조정하여 도형 개념을 이해하였다(<발췌문 1> ~ <발췌문 4>).

마. 합동변환 개념의 과정에 있는 학생도 두 합동변환의 조정(합성)은 쉽지 않았다.

학생들은 4가지의 합동변환 중 대칭이동을 가장 쉽다고 생각하였고, 미끄러짐 반사를 가장 어려워하였다. <표 IV-1>은 모든 수업이 끝나고 진행한 면담(2015.7.23.)에서 네 가지 합동변환 중 가장 어려운 합동변환을 말해보라는 교사의 질문에 학생들이 답한 내용이다.

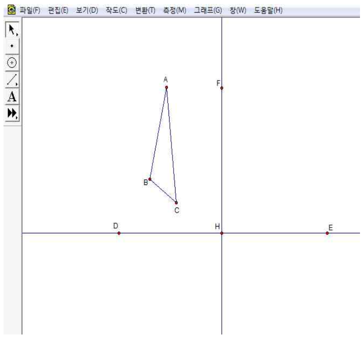
<표 IV-1> 네 가지 합동변환 활동에 대한 학생 네 명의 답변

가영	미끄러짐 반사요. 대칭이동이 가장 쉽기는 했지만... 평행이동도 어려운데, 평행이동하고 대칭이동 해야 하잖아요. 두 가지가 합쳐지니까 더 어려웠어요.
서영	미끄러짐 반사가 가장 까다로웠어요. 사실 아직도 ...
호영	제일 작도하기 쉬웠던 것은 선대칭. 제일 어려웠던 것은 미끄러짐 반사요. 아, 그리고 생각해보니까 회전이동도 생각보다 헷갈렸어요. 방향 때문에. 미끄러짐 반사는 아무래도 두 개의 합동변환이 합쳐진 거니까 더 어려웠고요.
호진	미끄러짐 반사요. 아무래도 두 가지를 동시에 생각해야 하니까요.

마-1. 학생은 두 합동변환의 조정에서 정의역과 치역을 파악하는 데에 어려움이 있었다.

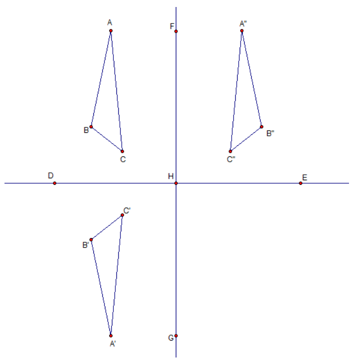
<u><발췌문 5 - 과제 6 - 호영></u>

<과제 6> 삼각형 ABC를 두 대칭축($\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{FG}$)에 대하여 각각 대칭이동한 도형을 GSP를 이용하여 작도하시오.($\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{FG}$, 두 대칭축 $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{FG}$의 교점은 H) (단, 순서는 $\overleftrightarrow{DE}$에 대하여 대칭이동한 후 $\overleftrightarrow{FG}$로 대칭이동하며, 처음 대칭이동한 도형에는 삼각형 $A'B'C'$를, 두 번째 대칭이동한 도형에는 삼각형 $A''B''C''$라고 이름을 각각 붙이시오.)



1호영 : (작도한 삼각형 $A'B'C'$를 삭제하고, 회전의 중심을 H로 한 뒤 삼각형 $A''B''C''$를 180도 회전이동 시키자 삼각형 $A'B'C'$와 똑같은 위치에 삼각형이 작도된다.) (호진에게) 오. 야 이거 봐. 내가 이것[삼각형 $A'B'C'$]을 지우고 이것[삼각형 $A''B''C''$]을 회전이동 해 봤거든.
2TR: 자, 잘 되고 있나요?
3호영 : <u>이건 운동이 두 개인데.</u>

4TR : 운동이 두 개야? 그럼 그 운동이 다른 운동인가요?
5호영 : 그렇죠. 제가 이것[삼각형 A′B′C′]을 없애고 [삼각형 A″B″C″를] 점 H에 180도 회전이동을 시켰더니 이게[삼각형 A′B′C′] 생겼어요.
6TR : 삼각형 ABC를 [직선] DE에 대칭이동하고 삼각형 A′B′C′를 [직선] FG에 대칭이동 했나요?
7호영 : 아니요.
8TR : 문제에서 말하는 바는 그건데.
9호영 : 아 그래요?



[그림 IV-7] 호영이의 <과제6>에 대한 GSP 파일

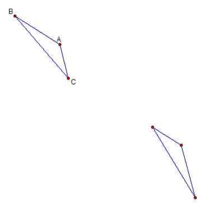
<발췌문 5>에서 호영이는 두 합동변환의 합성 결과를 생각할 때, 삼각형 ABC를 직선 FG에 대하여 대칭이동한 삼각형 A″B″C″과 삼각형 ABC를 직선 DE에 대하여 대칭이동한 삼각형 A'B'C'을 각각 정의역과 치역으로 여기고 있음을 알 수 있다(5호영). 호영이는 두 개의 합동변환의 합성을 두 합동변환의 조정으로 생각하지 못하고, 두 가지 합동변환의 결과를 서로 비교하는 것으로 착각하고 있었다(3호영).

결국, 학생은 두 합동변환을 합성하는 과정에서 정의역이 어떤 것인지 치역이 어떤 것인지를 파악하는데 어려움이 있었고, 단일한 합동변환에서는 쉽게 적용되었던 함수 스키마가 두 개 이상의 합동변환의 합성 결과에서는 쉽게 적용되기 어려웠음을 말해준다.

마-2. 두 합동변환의 합성에서 '변환 이동 스키마'의 내면화에 이른 학생도 대칭축과 벡터를 거꾸로 찾아내는 일은 쉽지 않았다.

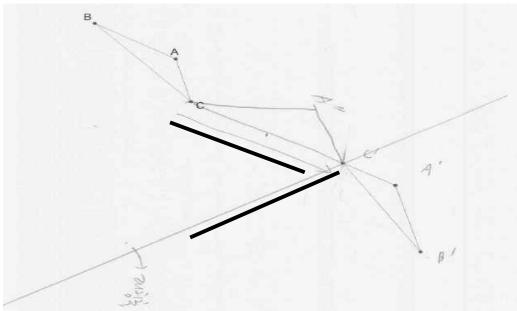
<발췌문 6 - 추가과제 - 호진>

<추가과제> 다음 두 합동도형은 어떤 변환인지 말하고, 대칭이동이면 대칭축을, 회전이동이면 회전의 중심을, 평행이동이면 벡터를, 미끄러짐 반사이면 대칭축과 벡터를 작도하시오.



1TR : 이거 합동변환이야. 뭔지 알겠어?
2호진 : 네
3TR : 아, 알겠어? 뭐야?
4호진 : 잠깐만요. 회전이동 같아요.
5TR : 회전이동... 그렇구나. 회전의 중심을 한번 그려봐.
6호진 : (두 삼각형의 가운데를 손가락으로 가리키며) 여기요.
7TR : 그럼 몇 도 회전이동이야?
8호진 : 아니. 회전이동이 아닌 것 같아요.
9TR : 그럼 뭐 같아?
10호진 : 미끄러짐 반사 같아요.
11TR : 아, 미끄러짐 반사 같아? 미끄러짐 반사면 대칭축이랑 벡터가 있잖아.
12호진 : 네.
13TR : 혹시 [대칭축이랑 벡터를] 그려 볼래?
14호진 : (가만히 있다.)
15TR : 완벽하게 그릴 수는 없어. 그래도 대칭축이랑 벡터를 대강이라도 좋으니 한번 그려봐. 미끄러짐 반사는 맨 처음에 뭐가 있어야 하지?
16호진 : 벡터요.
17TR : 벡터로 먼저 평행이동하고 싶은 거야?

18호진 : 네.
19TR : 그 다음은?
20호진 : 대칭축.
21TR : 얘[삼각형 ABC]를 움직일래? 아니면 얘 [또 하나의 다른 삼각형]을 움직일래?
22호진 : 얘[삼각형 ABC]요.
23TR : 그럼 어디로 갔으면 좋겠어?
24호진 : (삼각형 A″C′C를 그리고 가만히 있다.)
25TR : 음. (연필을 잡고 호진이의 작도 위에 벡터, 대칭축을 그리면서) 이게[삼각형 ABC가] [평행이동으로] 이렇게[삼각형 A″CC′으로] 움직인 것이구나.
26호진 : 네.
27TR : 그러면 대칭축은? [C″를 지나는 한 직선을 그으면서] 그럼 혹시 대칭축이 이렇게 되는 거니?
28호진 : 네.
29TR : 그렇구나.



[그림 IV-8] 호진이의 추가 과제에 대한 작도 그림

8차시의 모든 수업이 끝난 뒤 개별 면담을 통해 <추가과제>를 제시하였고, 합동인 두 도형이라는 사실 외에 다른 힌트를 제공하지 않기 위해서 한 쪽 도형의 꼭짓점에는 이름을 붙이지 않았다. 처음 호진이는 두 합동도형이 서로 회전이동이라고 생각하였으나(4호진), 회전각을 물어보는 교사의 질문에 다시 미끄러짐 반사라고 대답하였다(10호진). 호진이는 미끄러짐 반사의 대칭축과 벡터를 작도하는 과정에서는 힘겨워 하는 모습을 보였으며(14호진, 24호진), 작도를 완료하는데 교사의 도움이 많이 필요하였다. 호진이는 삼각형 ABC의 미끄러짐 반사한 도형을 평행이동한 다음 대칭이동한 결과로 생각하였다(15TR-20호진). 미끄러짐 반사에서 대칭축과 벡터가 서로 평행해야 하는데도 불구하고 호진이는 삼각형 ABC의 평행이동한 도형을 삼각형 A″C′C로 작도하였고(24호진, 25TR, [그림 IV-8]), 대칭축을 점 C‘를 지나게 생각하여(28호진) 대칭축과 벡터가 전혀 평행하지 않게 되었다.

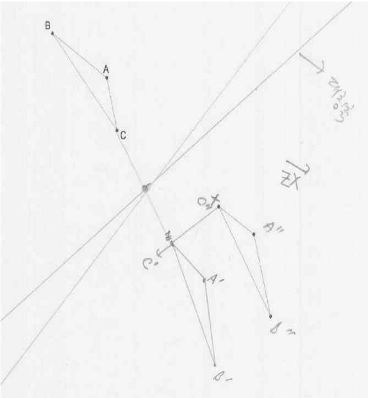
이것은 두 합동변환의 합성에서 변환 전후의 관계를 인식하는 ‘변환 이동 스키마’를 내면화하는 학생에게 대칭축과 벡터를 거꾸로 작도하는 일은 어려운 것임을 말해준다.

바. 학생이 두 합동변환의 합성 개념을 확실하게 이해하기 위해서는 가역적 사고가 필요하였다.

<발췌문 7 - 추가과제 - 호영>

1TR : 이 두 도형은 서로 합동변환인데, 어떤 합동변환일까?
2호영 : 미끄러짐 반사 같은데요.
3TR : 대칭축과 벡터를 그려줄 수 있니?
4호영 : 그릴 수 있을 것 같은데.
5TR : 정확하게 그릴 수 없더라도 한번 그려봐.
6호영 : (처음에 대칭축을 작도했다가 다시 다른 대칭축을 그어 완성한다.) 이쪽이고. 이쪽에 벡터가. ($\overrightarrow{ZX}$라고 쓴다.)
7TR : 그럼 잠깐만. (호영이가 작도한 종이 에 꼭짓점의 이름을 쓰면서) 이 점이 C′, B′, A′, C″, B″, A″인 거야? 이 선은 그럼 뭐야? 잘못 그은 거야?
8호영 : 네, 잘못 그은 거예요.
9TR : 그럼 이 선은?
10호영 : 대칭축.
11TR : (호영이의 작도 그림에 대칭축이라고 쓴다) 그럼 이 선은 어떻게 그었어?
12호영 : 두 점[두 점 C와 C′]을 연결해서 중점.
13TR : 점 하나로 직선이 만들어지진 않잖아.

14호영 : 그렇죠. [선분 CC′에] 수직으로 나눈 선 [대칭축은 선분 CC′에 수직이고 선분 CC′의 중점을 지나는 선이어야 하죠.]
15TR : 혹시, 얘[대칭축]과 얘[벡터]가 평행하다는 건 알고 있었니?
16호영 : 네, 그럼요.



[그림 IV-9] 호영이의 추가과제에 대한 작도 그림

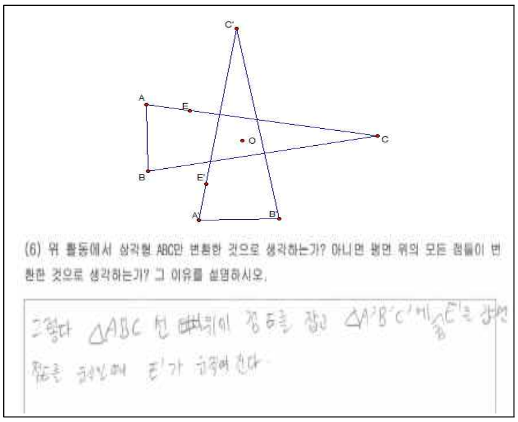
<추가과제>에서 호영이는 두 합동도형이 미끄러짐 반사라고 말하면서 대칭축과 벡터 작도에 자신감을 보였다(2호영, 4호영). 호영이는 대칭축과 벡터가 서로 평행하도록 기존의 대칭축을 수정하여 다시 작도하였고(8호영), $\overrightarrow{ZX}$을 직접 적어 넣었다(6호영). 호영이는 자신이 작도한 대칭축을 구체적으로 설명할 수 있었으며(12호영, 14호영), 대칭축과 벡터가 서로 평행하다는 사실을 정확하게 알고 있었다(16호영).

호영이는 두 합동변환인 대칭이동과 평행이동을 조정할 수 있었고, 거꾸로 이 합성 결과를 가능하게 한 대칭축과 벡터를 작도하는 가역적 사고가 가능한 유일한 학생이었다. 다른 학생들 모두 <추가과제>에서 미끄러짐 반사임을 말할 수 있었으나(두 합동변환의 조정을 할 수 있었으나), 정확한 대칭축과 벡터를 작도하는 일에는 실패하였다. 이것은 조정과 가역적 사고는 별개이며, 학생이 합동변환의 합성을 완벽하게 이해하기 위해서는 조정뿐만 아니라 가역적 사고가 더 필요함을 말해준다.

2. 합동변환 개념 이해 과정에서 학생의 드래그 활동의 역할

가. 임의적 드래그는 학생이 합동변환에서 정의역과 치역을 평면 위의 점으로 확장하는 함수 스키마의 일반화에 도움이 되었다.

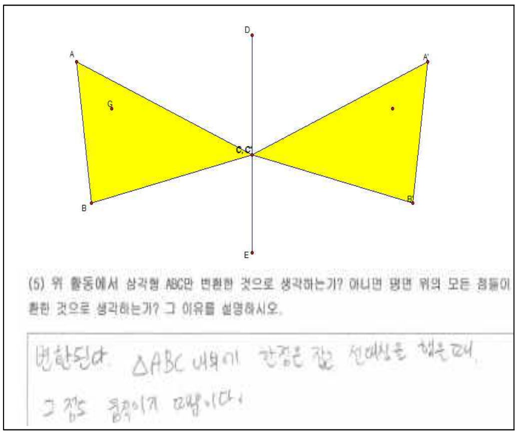
회전이동의 정의역을 삼각형 ABC으로만 생각하는지 평면 위의 모든 점으로 생각하는지를 물어보는 과제 3(6)를 해결하기 위해서 가영이는 삼각형 ABC의 한 변 AC 위에 임의의 점 E를 작도하였다. 가영이가 삼각형 ABC를 점 O에 대하여 회전이동하자 삼각형 A′B′C′에 점 E′가 함께 작도되었다([그림 IV-10, 위]). 삼각형 ABC에서 점 E를 임의적 드래그하자 동시에 점 E′도 함께 움직인다는 사실을 관찰한 가영이는 활동지에 [그림 IV-10, 아래]처럼 정리하였다.



[그림 IV-10] 가영이의 GSP 작도(위)와 활동지(아래) (과제3(6))

대칭이동에서 정의역을 평면 전체로 이해하는지를 묻는 과제(5(5))를 해결하기 위해서 가영이는 삼각형 ABC의 내부에 임의의 한 점 G를 작

도하고 이를 대칭이동 시킨 후 점 G′(점 G를 대칭이동 시킨 점, 가영이는 점 G′에 이름을 붙이지는 않았다)를 임의적 드래그하자([그림 IV-11, 위]), 점 G가 함께 따라 움직인다는 사실을 관찰하였다. 학생이 제출한 oCam 파일에서 가영이는 점 G′를 삼각형의 외부까지 드래그하면서 점 G의 움직임을 살펴보는 모습이 확인되었다.



[그림 IV-11] 가영이의 GSP 작도(위)와 활동지(아래) (과제5(5))

이러한 임의적 드래그를 통해서 가영이는 삼각형의 꼭짓점뿐만 아니라 삼각형의 경계와 내부(외부)의 점들이 모두 합동변환에서 정의역과 치역이 될 수 있다는 사실을 인식할 수 있었다.

나. 임의적 드래그는 평행이동에서 학생이 벡터의 역할을 정확하게 인식하는데 도움이 되었다. 특히, 안내된 드래그는 평행이동에서 학생이 영벡터를 인식하는데 도움이 되었다.

<발췌문 8 - 과제1(5) - 호영>

1TR : 호영이 기억할거야. 평행이동에서 벡터[전체]를 움직여도 두 도형의 위치에는 변화가 없었지?[두 도형은 그대로 있었지?]

2호영 : 네네.

3TR : 왜 그런 것 같아?

4호영 : 벡터의 끝점을 가지고 움직이면[시점이나 종점만 드래그하면] 안되겠지만[두 합동도형의 위치도 변하겠지만] 벡터 자체만 움직이면[드래그하면], 벡터는 길이와 방향만 있으면 되니까.

5TR : (삼각형 ABC와 벡터 $\overrightarrow{DE}$를 작도하고 평행이동 시킨 후 이 벡터를 복사하여 나머지 벡터들을 작도한다[그림 IV-14].) 내가 이것[삼각형 ABC]을 이것[벡터 $\overrightarrow{DE}$]으로 움직일 때, [벡터 $\overrightarrow{DE}$는] 이것들[나머지 벡터 $\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{HI}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{LM}$]과 같은 것일까? 다른 것일까?

6호영 : 똑같죠.

7TR : 똑같아?

8호영 : 네.

9TR : 음, 그럼 얘[벡터 $\overrightarrow{DE}$] 가 어떤 위치에 있다고 해도 같은 거야?

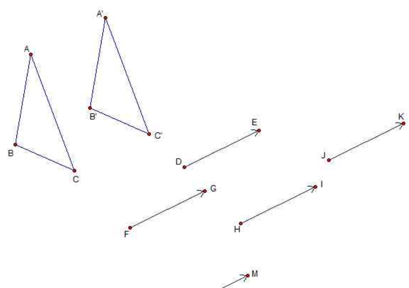
10호영 : 똑같은 거죠.

11TR : 얘[벡터 $\overrightarrow{DE}$]는 뭐하고 뭐가 중요하기 때문이니?

12호영 : 길이와 방향

13TR : 얘[벡터 $\overrightarrow{DE}$]를 어디에 놓아도 [두 도형의 위치에는] 변함이 없는 거지?

14호영 : (고개를 끄덕인다.)



[그림 IV-12] 교사가 제시한 GSP 작도

호영이는 <과제 1>에서 삼각형 ABC를 $\overrightarrow{DE}$에 대하여 평행이동한 뒤, $\overrightarrow{DE}$를 임의적 드래그하여

도 두 삼각형 ABC, A′B′C′에 아무런 변화가 없음을 확인하였다(1TR, 2호영). 호영이는 평행이동에서 벡터를 아무리 드래그 하여도 두 도형의 위치가 변하지 않는 이유를 벡터의 구성요소인 길이와 방향으로 설명하였고(4호영), 교사는 이를 재차 확인하기 위해 [그림 IV-12]를 제시하였다. 호영이는 길이와 방향이 같은 벡터는 그 위치에 상관없이 모두 같은 벡터라고 말하였고(6호영, 10호영), 그런 이유로 벡터를 임의적 드래그하여 벡터의 위치를 옮긴다고 하여도 주어진 변환에는 영향을 미치지 않는다고 주장하였다.

<발췌문 9 - 과제1(5) - 호진>

1TR : 호진이가 다른 친구들과는 달리 참 꼼꼼하게 이 문제[과제1(5)]를 해결하려고 노력했던 것 같아. [네가 제출한 oCam 파일을 보니까] 삼각형 ABC를 삼각형 ABC로 변환하기 위해서 점 D, E 사이를 계속해서 좁히더구나.

2호진 : 네.

3TR : <u>두 점을 일치하게 두고 벡터지정을 하니까 벡터지정이 되지 않았지?</u>

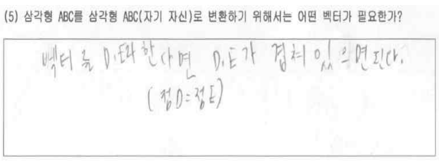
4호진 : <u>네.</u>

5TR : 음, 그래. 그래서 <u>두 점[두 점 D, E]을 최대한 가까이 두고 벡터지정을 한 다음 평행이동을 한 것 같더라.</u>

6호진 : <u>네.</u>

7TR : <u>그리고 나서 [삼각형이 자기 자신으로 변환하려면 두 점이 같아야 한다고] 확신을 갖게 된 것 같아.</u>

8호진 : <u>네. 맞아요.</u>



[그림 IV-13] 호진이의 활동지(과제1(5))

oCam 파일을 관찰한 결과 호진이는 삼각형 ABC를 자기자신인 삼각형 ABC로 변환하기 위한 벡터를 찾기 위해 고민한 흔적을 많이 보였다. 삼각형 ABC를 삼각형 ABC로 변환하기 위해서 두 점 D, E가 일치해야 한다고 생각하고 그러한 추측을 확인하기 위해서 두 점을 하나로 겹쳐 벡터지정을 시도했으나 GSP가 한 점에서의 벡터지정을 지원하지 않자(3TR, 4호진) 할 수 없이 두 점 D, E 사이를 약간 떨어뜨려 벡터지정을 하여 변환을 관찰하였다(5TR, 6호진). 결국, 호진이는 삼각형 ABC가 자기자신으로 변환하기 위해서는 두 점 D와 E가 겹쳐있으면 된다고 자신의 활동지에 적었다([그림 IV-13]).

호진이는 시점과 종점이 일치한 벡터가 평행이동에서 항등사상을 만드는 벡터라고 예상하였고 이러한 추측을 확인하기 위해 점 E를 다른 한 점 D에 가까이 끌어와서 두 점을 일치시키려는 안내된 드래그를 시도하였다. 그러나 한 점에서의 벡터지정이 불가능하다는 사실을 뒤 늦게 알게 된 호진이는 두 점 D, E를 인접하게 둠으로서 유사한 상황을 만들어 자신의 추측을 확인하는 것에 만족해야 했다.

다. 임의적 드래그는 학생이 합동변환에서 회전의 중심, 대칭축의 역할을 정확하게 인식하는데 도움이 되었다.

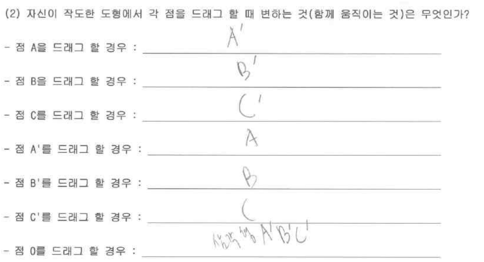
<발췌문 10 - 과제2(2) - 호영>

1TR : 회전의 중심이나 대칭축을 드래그하면 변환 전후에서 한쪽 도형이 움직였던 것으로 기억하는데. 왜 그럴까?

2호영 : 어, <u>회전이동은 [회전의] 중심을 중심으로 각을 맞춰서 이동하는 것인데, 그게[회전의 중심 O] 원래 도형[삼각형 ABC]에서 멀어지면 원래 도형과의 거리도 벌어지니까 새로 생긴 도형[삼각형 A′B′C′]과의 거리도 멀어져야겠지요.</u>

3TR : 거리도 변하고, 방향도?

4호영 : 변하죠.
5TR : 대칭축도 같은 의미였지?
6호영 : 네 그렇죠.


(2) 자신이 작도한 도형에서 각 점을 드래그 할 때 변하는 것(함께 움직이는 것)은 무엇인가?

- 점 A을 드래그 할 경우 : A'
- 점 B을 드래그 할 경우 : B'
- 점 C를 드래그 할 경우 : C'
- 점 A'를 드래그 할 경우 : A
- 점 B'를 드래그 할 경우 : B
- 점 C'를 드래그 할 경우 : C
- 점 O를 드래그 할 경우 : 삼각형 A'B'C'

[그림 IV-14] 호영이의 활동지(과제2(2))

호영이는 삼각형 ABC를 회전의 중심 O에 대하여 회전이동하여 삼각형 A′B′C′를 작도한 뒤, 각 꼭짓점과 회전의 중심을 드래그할 때 함께 움직이는 점을 관찰하여 [그림 IV-14]와 같이 작성하였다. 호영이는 회전의 중심을 임의적 드래그하면 기존의 삼각형 ABC에서 회전의 중심까지의 각과 거리가 변하기 때문에 이에 대응하는 삼각형 A′B′C′의 위치가 변한다고 설명하였다(2호영). 또한, 호영이는 대칭축을 임의적 드래그할 때에도 회전의 중심과 같은 이유로 삼각형 A′B′C′의 위치가 변한다고 말하였다(6호영).

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구는 GSP 환경에서 중학교 2학년 영재학급 학생의 합동변환 개념에 대한 발생적 분해를 제시하고, 학생이 합동변환 개념을 이해할 때, 드래그 활동이 어떤 역할을 하는지 알아보고자 하였다.

우선, 학생들은 초등학교에서 평면도형을 밀기, 뒤집기, 돌리기라는 구체적인 조작 활동을 통하여 직관적으로 접하였기 때문에 합동변환에서 두 도형이 서로 일대일대응이라는 사실은 쉽게 알고 있었다. 한편, 합동변환을 이해할 때, 학생들은 중요한 두 스키마인 ‘한 점 이동 스키마’와 ‘변환 이동 스키마’를 동시에 고려하였으며, 한 학생이 어느 한 스키마를 선호하거나 치중하여 사용하기 보다는 두 스키마를 모두 고려하되 방향을 결정하기 어려운 과제일수록 ‘한 점 이동 스키마’에 더 의존하는 경향을 보였다. Law(1991)의 ‘한 점 이동 스키마’의 집약화에 따른 ‘도형 이동 스키마’는 학생들에게 관찰되지 않았으며, 학생들이 합동변환의 합성을 완벽하게 이해하기 위해서는 조정뿐만 아니라 가역적 사고가 더 필요하였다.

이에 본 연구의 예비 발생적 분해를 수정한 합동변환의 발생적 분해는 [그림 V-1]과 같다.

합동변환 개념을 이해하는 과정에서 학생의

대칭이동, 평행이동, 회전이동 스키마 (합동변환 개념의 과정 이해)
한 점 이동 스키마의 ***내면화***와 변환 확인 스키마의 내면화를 조정하여 합동변환 개념을 이해할 수 있다.

미끄러짐 반사 스키마

- 둘 이상의 합동변환 과정을 조정할 수 있다.
- *둘 이상의 합동변환 과정을 조정한 뒤 함수 스키마를 이에 적용할 수 있다.*
- *둘 이상의 합동변환 과정을 조정한 뒤 가역적 사고를 할 수 있다.*

드래그 활동

[그림 V-1] 본 연구의 발생적 분해

드래그 활동은 정의역과 치역을 평면 위의 점으로 확장하는 함수 스키마의 일반화와 벡터, 회전의 중심, 대칭축의 역할을 인식하는데 도움이 되었다. 특히, 학생은 영벡터가 시점과 종점이 일치하는 한 점으로 표현되며, 삼각형 ABC를 삼각형 ABC로 변환하는 항등사상을 만드는 벡터라는 사실도 인식하게 되었다.

하지만 서영이의 경우 드래그 활동이 오히려 부동점을 인식하는데 방해를 주었는데 그 이유를 서영이는 "부동점이 움직이는 점을 말하는지 제가 드래그하여 움직일 수 있는 점을 말하는지 헷갈렸어요."와 같이 말하였다. 이것은 서영이가 GSP 환경에서 드래그의 의미를 이해하지 못하고 직접 드래그하여 움직인 점도 움직임이 있으므로 부동점이 아니라고 생각하였기 때문이다.

본 연구는 GSP를 이용하여 효과적으로 지도할 수 있는 내용을 의도적으로 선정하였고, 중학교 2학년 영재 학생들을 연구 대상으로 했다는 점에서 한계점이 있다. 또한, [그림 V-1]에서 합동변환 스키마와 드래그 활동과의 관련성을 보다 구체적으로 제시하지 못한 것은 추후 연구가 더 필요함을 나타낸다. 그러나 본 연구는 초등과정에서 직관적으로 다루어 졌던 밀기, 돌리기, 뒤집기와 같은 '변환기하적 조작활동'과 중등 과정에서 제시되는 해석기하학적 요소들과의 비연계성을 지적하고, 초등 과정의 직관적 조작활동이 '벡터', '회전의 중심', '대칭축'의 개념 구성을 통해 어떻게 내면화 되어 가는지 보여주었다는 데에 그 의의가 있다. 또한 다소 어려운 소재인 변환기하를 중학교 수준의 합동변환에서 자세하게 다루었고 이를 통해 GSP의 드래그 활동을 반영한 학생의 합동변환 개념의 인지적 모델을 세우는 데 기초 연구를 마련했다는 점에서 본 연구는 의미가 있을 것이다.

참고문헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. (교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8]).

김자경 (2005). **van Hieles의 기하 학습 사고 수준 이론을 적용한 도형 학습이 합동 변환의 이해력과 기하 수준 변화에 미치는 영향**, 이화여자대학교 석사학위논문.

김정학(1971). 도형의 함수적인 고찰, **논문집, 4**, 111-128.

박연정(2006). **고등학교 교육과정에서 도형의 변환에 대한 연구**, 서울시립대학교 석사학위논문.

박혜숙, 김서령, 김완순(2005). 수학적 개념의 발생적 분해의 적용에 대하여 - 추상대수학에서의 Z_n의 경우 -. **수학교육, 44**(4), 547-563.

백용배(1995). **기하학개론**. 서울: 교학연구사.

손홍찬(2011). 우리나라 수학교육에서 공학 활용의 역사와 현황. **학교수학, 13**(3), 525-542.

송석준, 박종국(1998). 고등학교 교육과정에서 도형의 변환에 대한 지도내용 분석 및 개선 방안, **과학교육, 15**, 151-168.

안응용(1995). **도형의 변환지도에 관한 연구**. 단국대학교 석사학위논문.

양은경, 신재홍(2014a). 개방형 기하 문제에서 학생의 드래깅 활동을 통해 나타난 수학적 추론 분석. **수학교육학연구, 24**(1), 1-27.

양은경, 신재홍(2014b). 작도 접근 방식에 따른 중학생의 기하학적 특성 인식 및 정당화. **수학교육학연구, 24**(4), 507-528.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**, 서울: 서울대학교 출판부.

최종렬(1992). **중등교육과정에서의 도형의 변환에 대한 연구**, 경성대학교 석사학위논문.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K.

(2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 34*, 66-72.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. MAA NOTES, 37-54.

Baccaglini-Frank, A. (2010). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-Generation through maintaining dragging*, Doctoral dissertation, University of New Hampshire, Durham, NH, USA. ISBN: 9781124301969.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

Dixon, J. K. (1997). Computer use and visualization in students' construction of reflection and rotation concepts. *School Science and Mathematics, 97*(7), 352-358.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 류희찬, 조완영, 김인수 (공역) (2002), 고등수학적 사고. 서울:경문사.

Guven, B. (2012). Using dynamic geometry software to improve eight grade students' understanding of transformation geometry. *Australasian Journal of Educational Technology, 28*(2), 364-382.

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 55-72.

Hollebrands, K. F. (2004). High school students' intuitive understandings of geometric transformations. *The Mathematics Teacher*, 207-214.

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, 164-192.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (Vol. 1). Courier Corporation.

Law, C. K. (1991). *A genetic decomposition of geometric transformations* (Unpublished doctoral dissertation). Purdue University, Indiana, U.S.

Leung, A. (2012). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. www.icme12.org/upload/submission/1961_F.pdf.

Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction, *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 145-165.

Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(6), 665-679.

Martin, G. E. (1982). *Transformation geometry: An* *introduction to symmetry*. Springer Science & Business Media.

Maxwell, J. A. (2012). *Qualitative research design: An interactive approach (Vol. 41)*. Sage.

Meagher, M., Cooley, L., Martin, B., Vidakovuc, D., & Loch, S. (2006). The learning of linear algebra from an APOS perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Monaghan, J., Sun, S., & Tall, D. O. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. Proceedings of PME, 18, 279-286.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. Handbook of research design in mathematics and science education, 267-306.

Vidakovic, D.(1996). Learning the concept of inverse function. *Journal of computers in Mathematics and Science Teaching, 15*, 295-318.

Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M., & Merkovsky, R.(2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. In A Selden, E Dubinsky, G Harel & F Hitt (eds). Research in Collegiate Mathematics Education V. Providence, RI: American Mathematical Socie.

Wesslén, M., & Fernandez, S. (2005). Transformation geometry. *Mathematics Teaching, 191*, 27-29.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A study of students' understanding of the group D 4. *Journal for research in Mathematics Education*, 435-457.

Gifted Middle School Students' Genetic Decomposition of Congruent Transformation in Dynamic Geometry Environments

Yang, Eun Kyung (Graduate School, Korea National University of Education)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)

In the present study, we propose four participating 8^{th} grade students' genetic decomposition of congruent transformation and investigate the role of their dragging activities while understanding the concept of congruent transformation in GSP(Geometer's Sketchpad). The students began to use two major schema, 'single-point movement' and 'identification of transformation' simultaneously in their transformation activities, but they were inclined to rely on the single-point movement schema when dealing with relatively difficult tasks. Through dragging activities, they could expand the domain and range of transformation to every point on a plane, not confined to relevant geometric figures. Dragging activities also helped the students recognize the role of a vector, a center of rotation, and an axis of symmetry.

* Key Words : congruent transformation (합동변환), APOS theory (APOS 이론), dragging activity (드래그 활동)

논문접수 : 2015. 10. 4
논문수정 : 2015. 11. 6
심사완료 : 2015. 11. 9