대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 4, 657 ~ 673. Nov 2015

수÷0에 대한 초등교사의 PCK 분석

임 미 인* · 장 혜 원**

수÷0은 수학사에서도 드러나듯이 인식론적 어려움을 내포하고 있기 때문에 교수·학습 상황에서 주의를 기울일 필요가 있는 연산이다. 우리나라의 현행 초등학교 수학과 교육과정과 교과서에서 수÷0을 다루고 있지 않지만, 초등학교 수학에서 0을 포함한 범자연수를 다루면서 수÷수를 지도하고 있기 때문에 수÷0에 대한 질문이 학생들에 의해 종종 제기되곤 한다. 이에 대한 교사의 명확한 이해와 학생 수준을 고려한 적절한 지도는 학생들의 계산 과정에서 발생할 수 있는 오개념 및 오류를 방지하여 후속 학습에 긍정적인 영향을 미칠 수 있다. 본 연구에서는 수÷0에 대한 초등교사들의 PCK 관련 중 내용지식 수준과 그들이 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법을 조사하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해, 초등교사 30명을 대상으로 개별 면담을 실시하였다. 면담 내용을 분석한 결과, 일부 초등교사는 수÷0과 그에 대한 적절한 지도 방법을 알고 있지 못하는 것으로 확인되었다. 분석 결과에 따른 논의로부터 몇 가지 교수학적 시사점을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

현행 교육과정에서 학생들은 초등학교 3학년에서 처음으로 등분제와 포함제로서 나눗셈의 의미를 학습하게 된다. 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계는 그 개념과 형식에 있어서 뗄 수 없는 관계이기 때문에 교사들이 나눗셈을 지도할 때 자연스럽게 곱셈을 언급하게 되며 이는 2009 개정 교과서[1])에서도 확인되는 바이다. 구체적으로, 수학 3학년 1학기(교육부, 2015)에서 나눗셈을 지도할 때 등분제와 포함제의 의미를 학습한 후, ‘곱셈과 나눗셈의 관계 알기, 곱셈식에서 나눗셈의 몫 구하기, 곱셈구구에서 나눗셈의 몫 알기’ 차시를 차례로 제시하여 곱셈의 역연산으로서의 나눗셈을 강조하고 있는 것으로 보인다.

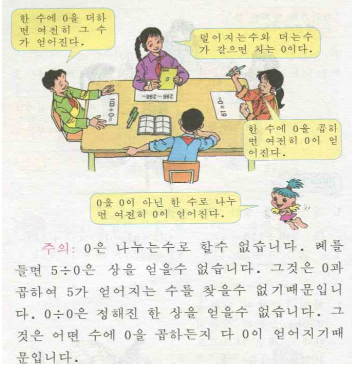
이에 학생들은 나눗셈을 학습함에 있어 자연스럽게 이전 학년에서 배운 곱셈구구와 곱셈 알고리즘을 연계하여 사고하는 과정을 거치게 된다. 초등학교 저학년 단계에서 곱셈 학습 시 수의 범위가 0과 자연수이기에 0×수=0, 수×0=0이 2학년 2학기에서 다루어지고 있다. 따라서 3학년에서 나눗셈을 학습할 때 의미 자체가 다소 추상적이어서 학생들에게 난해하게 여겨지기는 하나, 종종 이미 학습한 0×수=0 또는 수×0=0으로부터 형식적 유사성에 기초하여 나눗셈에 있어서도 0÷수와 수÷0이 얼마인지 질문하는 학생들이 있다. 즉, 곱셈과 연계한 이 질문은 매우 자연스러운 일인 것이다.

그러나 0의 개념과 0이 포함된 계산은 학생들이 수학을 학습함에 있어서 어려워하는 내용 중 하나이며(김수미, 2004, 2006, 2009; 장혜원 외,

* 서울교육대학교 교육전문대학원, ssbin22@sen.go.kr (제1 저자)
** 서울교육대학교, hwchang@snue.ac.kr (교신저자)
1) 본 연구에서는 2009 개정 교육과정에 따른 수학 교과서를 편의상 2009 개정 교과서라고 칭할 것이다.

2014; Henry, 1969 등), 특히 0÷수와 수÷0은 다양한 오류를 유발할 가능성이 높은 것으로 주장되어 왔다(김수미, 2006, 2009; Lannin et al., 2013 등). 이에 대한 학생들의 의미론적인 이해가 어려울지라도 교사는 명확한 내용지식을 통해 학생들의 이해를 도울 수 있으며(배종수, 2005), 박성택(1989), Lannin et al.(2013) 등 또한 지도의 필요성은 아닐지라도 그 지도 가능성에 대해 언급하고 있다. 이때 0÷수는 아무 것도 없는 구체적인 상황을 이용함으로써 초등학생들에게도 충분히 지도될 수 있는 내용이다. 반면, 수÷0이 불능이라는 사실은 대수적 조작을 통해야 파악되는 매우 추상적인 내용으로, 초등학생들에게는 명확한 이해가 어렵기 때문에 초등학교 교육과정에 포함되어 있지 않다. 그러나 앞서 언급한대로 0을 포함하는 곱셈식으로부터 유추하여 수÷0에 대한 학생들의 호기심은 얼마든지 가능하며, 따라서 학생들이 그에 대해 질문할 경우 학생들의 수준에 적합한 답변이 제공되어야 한다.

학교 현장에서는 실제로 학생들이 수÷0에 대해 질문하는 상황이 종종 발생하고 있기 때문에 수 연산 오류를 방지하고 후속 학습에 등장하는 0이 포함된 다양한 계산을 정확하게 수행할 수 있기 위해서 이에 대한 적절한 지도가 이루어져야 한다. 이와 관련하여 중국의 4학년 교과서에서 0의 사칙계산에 대해 각각 구분하여 언급하면서 수÷0이 불능인 이유를 '5÷0은 상을 얻을 수 없습니다. 그것은 0과 곱하여 5가 얻어지는 수를 찾을 수 없기 때문입니다(과정교재연구소, 2007)'와 같이 자세히 제시하고 있는 것은, 학생들이 0의 사칙계산에서 어려움을 겪고 있는 점을 인지하고 수÷0 계산에 대한 주의를 환기시키기 위함임을 참조할 필요가 있다([그림 I-1]). 또한 이스라엘의 4학년 교과서에서는 0에 대한 사칙계산 중에 수÷0을 포함하여 지도하고 있으며, 지도서에서는 반복적 빼기 모델 등을 사용하여 왜 수÷0이 불능인지에 대해 설명할 것을 제안하고 있다(Tsamir & Tirosh, 2002).



[그림 I-1] 중국 4학년 교과서에 제시된 0의 사칙계산 및 수÷0 (과정교재연구소, 2007)

본 연구는 수÷0을 초등학교 교육과정이나 교과서에 포함하여 가르치자고 주장하기 위함이 아니며, 일부 국가에서는 초등학교 수학에서 다루어질 정도인 수÷0의 의미에 대해 적어도 교사들은 그에 관한 정확한 내용교수지식(Pedagogical Content Knowledge, 이하 PCK)을 갖추어야 한다는 필요에 기인한다. 교사들의 PCK는 교육과정에 기반을 두는 것이 자연스러울 수 있으며 교육과정 외의 학문적 지식을 모른다 하더라도 일상 수업에서 큰 문제가 발생하지 않을 것으로 예상된다. 그러나 Ball et al.(2008), Caldwell et al.(2011), Usiskin(2014) 등으로부터 효과적인 수업을 위해서 교사는 학생들이 아는 지식보다 많은 것을 알고 있어야 하며 교사의 PCK는 교육과정의 테두리를 벗어나야 함을 도출할 수 있다.

수학 수업의 질은 수업 내용에 대한 교사의 견고한 이해에 좌우되며, 교사는 가르칠 내용에 대한 아이디어와 절차에 대한 명확한 이해뿐만 아니라 각각의 아이디어간의 관계도 알고 있어야 학생의 이해를 도울 수 있다(Ball et al.,

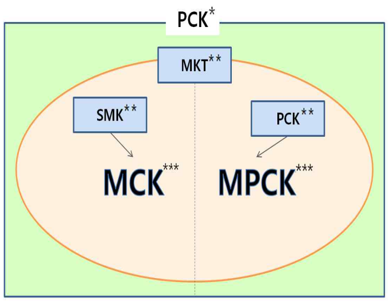
2008). 그러므로 교사들이 그릇된 이해를 지닌 채로 학생들을 지도한다면 학생들은 관련 수학 내용에 대해 정확한 개념을 형성할 수 없고 이러한 상황은 지속적인 악순환으로 이어질 것이다(임해경, 2014). 따라서 본 연구는 초등 수학 수준에서 수÷0에 대한 적절한 지도 방법을 모색할 필요에 따라 수÷0에 대한 초등교사의 내용지식 수준은 어떠하며, 학생이 제기하는 수÷0 질문에 대해 교사가 생각하는 적절한 지도 방법은 무엇인지 조사·분석함으로써 그 결과로부터 교수학적 시사점을 도출하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 수학내용지식(MCK)과 수학내용교수지식 (MPCK)

Shulman(1986, 1987)에 의해 처음 제안된 PCK는 해당 교과에 대해 교사가 지닌 교수지식을 의미하는 개념이다. 수학교육에서도 PCK에 대한 다수의 논의가 이루어져 왔으나, PCK가 지닌 특성으로 인하여 그 개념에 대해 명확하게 합의된 정의가 없고 연구자마다 제안하는 하위 요소와 특징에 있어서도 차이가 존재한다(백석윤, 조누리, 2013). 그 중 Ball et al.(2008)은 수학 교과를 지도하는 데 필요한 지식(Mathematical Knowledge of Teacher, 이하 MKT)이라는 개념에 대해 교과내용지식(Subject Matter Knowledge, 이하 SMK)과 PCK로 구분하여 제시하고 있다. 그러나 각 하위 요소와 관련 용어는 실제적으로 일반적인 교과 전체를 포괄하고 있기 때문에 이로 인한 연구자들 간의 혼란을 야기하기도 하였으며 이는 수학 교육에 국한된 용어 정리의 필요로 이어진다.

본 연구에서는 PCK에 관한 선행연구(Shulman, 1986, 1987; Ball et al., 2008 등)와 TIMSS(수학과학 국제학업성취도비교평가) 결과를 토대로 TEDS-M (Tatto et al., 2012)에서 종합된 수학 교과 관련의 PCK 연구에 기초하여 수학 교과에서 교사의 PCK는 수학내용지식(Mathematics Content Knowledge, 이하 MCK)과 수학내용교수지식(Mathematics Pedagogical Content Knowledge, 이하 MPCK)으로 이루어진다는 관점을 따를 것이다([그림 II-1]). 백석윤, 조누리(2013)는 TEDS-M(Tatto et al., 2012)에서 제시한 이러한 MCK와 MPCK라는 용어가 Ball et al.(2008)의 SMK와 PCK를 수학 교과에 적용하여 새롭게 명명한 것임을 언급하고 있다. TEDS-M(Tatto et al., 2012)에서는 수와 연산, 기하와 측정, 대수와 함수, 자료와 가능성의 4가지 내용 영역과 이해, 적용, 추론의 3가지 인지 영역에서의 MCK 분석틀을 제시하였고, MPCK에 있어서 수학 교육과정 지식, 수학 교수·학습 계획에 관한 지식, 수학 교수·학습의 실행과 같이 3가지 하위 영역을 제시하고 있다. 즉, 수학 교육에서 교사의 PCK는 MCK와 MPCK로 이루어진다고 볼 수 있으며, 본 연구의 관심인 초등교사의 수÷0에 대한 지식 중 내용지식은 MCK, 지도 방법은 MPCK와 관련된다.



* Shulman(1986, 1987)
** Ball et al.(2008)
*** Tatto et al.(2012)

[그림 II-1] MCK와 MPCK의 위상

이러한 PCK와 관련하여 Merseth(1993)는 실제

로 많은 초등교사들이 수학적 지식과 능력에 있어서 스스로가 부족함을 느낀다고 하였으며, 우정호(2000)는 가르친 내용이 목표로 하는 지식을 알게 하는 데 실패하는 것은 가르치고자하는 지식의 적절한 교수학적 변환이 실패했기 때문이라고 하며 교사의 PCK의 중요성을 강조하고 있다. 장경윤 외(2014)는 교사의 전문성은 학습자에게 큰 영향을 미치기 때문에 학교수학을 다루는 데 필요한 교사의 수학내용지식을 확인하고 지원할 필요가 있으며, 이는 단순한 교과 관련 지식 이외의 지식을 두루 포함하는 것이라고 하였다. 즉 교사들이 수÷0을 제대로 이해하지 못하고 효과적인 지도 방법을 알지 못한다면, 학생들에게 이와 관련된 지식을 올바로 지도하기 어려우며 이는 교사의 개인적인 문제로만 국한될 수 없는 것이다.

2. 수÷0에 대한 역사적 인식 및 선행연구

인도의 수학자 바스카라는 a≠0일 때 $\frac{a}{0}$는 무한대라고 주장하였다. 바스카라가 무한의 개념에 정통해 있었으나 이와 같은 주장으로 미루어볼 때 그가 살았던 12세기 당시에 0으로 나누는 개념이 분명하지 않았음을 짐작할 수 있다(Sanderson, 1996).

수÷0의 아이디어는 Euler(1765)에서도 확인된다. Euler는 1/0을 생각하기 위해 먼저 1/∞에서 시작하며 그 아이디어의 전개는 다음과 같다. 1/2, 1/3, 1/4, ⋯, 1/12,⋯. 이 분수들의 값은 계속 감소하며 더 큰 정수로 나눌수록, 더 많은 수의 부분으로 쪼갤수록 그 값은 작아지는 것이다. 즉, 분모가 클수록 그 분수가 가지는 값은 작아진다. 그렇다면 분모를 한없이 크게 해서 그 값이 0이 되도록 할 수 있을까? 할 수 없다. 단위 길이를 어떤 수로 분할하여 그 부분을 아무리 작게 한다고 해도 여전히 작은 부분은 분명 어떤 형태의 크기가 있는 것이다. 그러나 이 분수 수열은 계속 나열할 수 있으므로, 결과적으로 분수가 0에 가까워지기 위해 분모는 무한이어야 한다. Euler는 이 때 무한의 개념과 그 기호로서 ∞를 도입한다. 이어서 1/0에 대한 다음의 생각이 이어진다.

> 그래서 1/∞은 사실상 거의 무라고 할 수 있다. [⋯] 분수 1/∞은 1을 ∞로 나눈 몫이다. 여기에서 1을 다시 1/∞, 즉 0으로 나눈다면 다시 제수인 ∞를 얻는다. 이를 통해 우리는 무한대에 대한 또 다른 새로운 개념을 얻게 된다. 즉 1을 0으로 나누면 무한히 큰 수, ∞로 표시한다는 것을 알 수 있다(Euler, 1765).

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$과 관련하여 1/∞이 결코 0이 될 수 없지만, 위 인용문으로부터 Euler는 1÷∞를 사실상 0으로 간주하고 1÷0은 ∞가 된다고 설명하고 있음을 알 수 있다. 비록 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$가 1÷0=∞라는 것을 의미하는 것은 아니지만, 이를 통해 일찍이 1÷0에 대한 Euler의 접근 방식을 확인할 수 있는 것이다. 이처럼 과거 유명한 수학자들도 제수가 0인 나눗셈에 관심을 갖고 있었지만, 불능인 수÷0 개념 이해에 있어서 큰 혼란을 겪었음을 짐작할 수 있다.

학교수학에서 수÷0에 대한 교사의 PCK 관련 선행연구는 Reys(1974), Reys & Grouws(1975), Blake & Verhille(1985), 김수미(2004) 등이 있다. Reys(1974)는 수÷0과 관련하여, 4, 6학년 교사 각 6명에게 수÷0을 구체화하여 6÷0이 무엇인지 묻는 인터뷰를 실시하였다. 그 결과, 4학년 교사 3명과 6학년 교사 2명은 0이라고 답했으며, 다른 4학년 교사 3명과 6학년 교사 2명은 알지 못한다고 응답하였다. 나머지 6학년 교사 2명만이 이유는 잘 모르나 나눌 수 없다고 답하였다. 또한

동일한 12명의 교사에게 만약 학생이 6÷0은 얼마인지 묻는다면 어떻게 지도할지 질문하고 그 반응을 조사하였으며, 교사들의 응답 결과를 정리하면 다음과 같다.

- 교육과정에 제시되어 있지 않기 때문에 지도하지 않는다.
- '0'이라고 대답한다.
- '6'이라고 대답한다.
- '선생님도 잘 모른다.'라고 대답한다.
- '0으로 나눌 수 없기 때문에 해결 방법이 없다(불능).'라고 대답한다.
- 곱셈과의 역연산을 통해 지도한다.
- 연관된 곱셈식과 나눗셈식 쌍을 해결하면서 지도한다.
  $6\times\square=6 \rightleftarrows \square=6\div6$
  $3\times\square=6 \rightleftarrows \square=6\div3$
  $2\times\square=6 \rightleftarrows \square=6\div2$
  $1\times\square=6 \rightleftarrows \square=6\div1$
  $0\times\square=6 \rightleftarrows \square=6\div0$

Reys는 이 중에서 0, 6이라고 대답한 경우가 가장 많았으며, 이 대답이 옳지 않음에도 불구하고 가장 보편적이고 일반적인 반응이라고 하였다. 이러한 연구 결과는 수÷0에 대한 아이디어는 결코 사소한 것이 아니며 교사들에게도 난해할 수 있음을 보인다. 또한 수÷0은 나눗셈 연산을 학습한 후인 3학년 이후에 학생들에 의해 빈번히 질문될 수 있다고 하였다. 결과적으로 이에 대해 어려움을 느끼는 교사는 학생들 또한 어려움을 느끼도록 만들 수 있기에, 교사가 명확한 내용지식과 올바른 지도방법을 알아야 함을 주장하고 있다.

Reys & Grouws(1975)는 0에 관한 나눗셈 연구에서 학생 인터뷰를 실시한 결과, 다수의 4학년 학생들이 수÷0을 0이라고 생각하며 그 이유를 교사의 지도 내용으로 돌렸다. 교사들은 특별한 이유의 언급 없이 '어떤 수를 0으로 나누면 0이다'라고 지도하였고, 학생들은 학교에서 교사들이 가르치는 것에 대한 절대적 신뢰 때문에 이를 있는 그대로 암기한 것으로 나타났다. 이러한 연구 결과는 학생들이 수÷0에 대한 정확한 개념을 형성하지 못했음과 더불어, 학교에서 수학을 지도하는 교사들이 지닌 정확한 MCK와 MPCK의 중요성을 함의한다.

Blake & Verhille(1985)은 학생들의 수÷0에 대한 인터뷰 결과 사례를 제시하고, 이에 대한 개념을 명확히 지도하기 위해서 역연산 관계를 사용해야 함을 주장하였다. 정답을 제시한 학생들이 0에 대한 올바른 개념과 더불어 나눗셈의 역으로서 곱셈을 활용하여 이 문제를 해결할 수 있음을 통해 역연산 관계의 수학적 구조가 중요함을 제시한 것이다. 또한 교사들이 사용하는 자료 중 다수에서 수÷0에 있어서 0의 개념을 잘못 취급하여 지도 시 어려움을 야기하고 있기 때문에, 0의 지도에 관한 교사용 자료의 중요성을 언급하였다.

국내의 수÷0에 대한 PCK 연구 중에서 김수미(2004)는 예비교사들의 5÷0, 0÷0에 대한 반응을 조사하였다. 조사에 참여한 예비교사 35명 중에서 5÷0은 약 63%, 0÷0은 약 29%의 정답률을 보임으로써 예비교사에게도 수÷0은 난제임이 드러났다. 또한 정답을 제시한 예비교사들조차 논리적이거나 구체적인 설명 없이, 0으로 나눌 수 없다거나 분모에 0이 올 수 없다는 말을 초등학교 때부터 줄곧 들어오는 등 학교에서 그렇게 배웠기 때문이라는 이유로 불능이 되는 것을 정당화하려는 경향을 보였다. 현직 교사에 비해 상대적으로 가까운 과거에 수÷0을 학습한 예비교사 조차도 약 37%가 오답을 보인 것은 수÷0을 학습한지 더욱 오랜 시간이 지난 현직 초등교사들도 물론 이에 대한 어려움을 겪고 있을 것이라는 예상을 가능케 하며 이는 본 연구의 필요로 이어진다.

III. 연구방법

1. 연구 대상

본 연구에서는 연구자의 지리적 접근성을 고려하여 서울특별시, 인천광역시에 근무하는 초등교사 30명[2])을 연구 대상자로 선정하였다. 공립학교에 근무하는 초등교사 중에서 신규 교사부터 경력 21년 이상의 고경력 교사를 골고루 표집하여 면담함으로써 교육 경력에 따른 연구 결과의 신뢰도를 확보하고자 하였다. 연구 대상자 30명에 대한 배경 요인은 <표 III-1>과 같다[3]).

<표 III-1> 연구 대상의 인적 정보

		교사 수 (명)
교육 경력	0-5년	12
	6-10년	11
	11-15년	3
	16-20년	2
	21년 이상	2
	합	30
자격증	초등 1급 정교사	18
	초등 2급 정교사	12
	합	30
학위	학사	19
	석사 이상	11
	합	30
3학년 지도 (담임) 경력	유	16
	무	14
	합	30

<표 III-1>과 같이 본 연구 대상자 30명 중 교육 경력 10년 이하는 약 76%(23명), 11년 이상 20년 이하는 약 17%(5명), 21년 이상은 약 7%(2명)[4]) 이다. 참여자의 60%(18명)가 초등 1급 정교사 자격증을, 나머지 40%(12명)는 초등 2급 정교사 자격증을 보유하고 있다. 전체의 약 37%(11명)는 석사 학위 이상을 가지고 있었다. 교과서에서 본격적으로 나눗셈에 대한 지도가 이루어지기 때문에 수÷0에 대한 학생들의 질문이 가장 많이 발생했을 것으로 예상되는 3학년을 지도했던 경험이 있는 교사는 약 53%(16명), 무경험 교사는 약 47%(14명)이다.

2. 연구 절차

본 연구에서는 초등교사들의 수÷0에 대한 내용지식과 그들이 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법을 조사하기 위해, 면담 내용을 선정하여 이에 기초한 면담 양식을 개발하고, 이를 바탕으로 각 대상자와의 개별 면담을 실시하여 그 결과를 분석하였다. 구체적인 연구 절차는 다음과 같다.

가. 면담 양식 개발

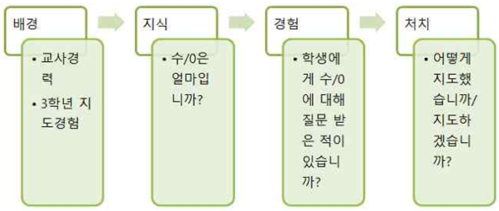
면담 내용은 Reys(1974)에 기초하여, 크게 대상자의 배경, 지식, 경험, 처치를 묻는 흐름의 4

2) 연구 초기에 연구 대상자로 표집 된 초등교사 수는 40명이었으나, 연구의 특성상 개별 면담을 실시해야 하기에 이에 동의하지 않은 교사 4명(경력 21년 이상 3명, 16-20년 1명)을 제외하였다. 또한 실제 면담을 시작한 후 수÷0 관련 내용에 있어서 부담을 표하고 면담을 중도 포기한 6명(경력 21년 이상 1명, 16-20년 3명, 11-15년 2명) 또한 최종 연구 대상에서 제외되어, 총 30명의 초등교사와 개별 면담을 실시하였음을 밝힌다. 이는 일부 현직 초등교사들이 개별 면담을 통해 자신의 PCK를 드러내는 데 있어서 소극적인 경향을 보임을 짐작케 한다.

3) 연구 대상자에 대한 기본적인 정보를 제공하기 위해 <표 III-1>에서 교육 경력, 자격증, 학위, 3학년 지도 경력별로 교사 수를 제시하였다. 그러나 본 연구는 각 범주별 교사의 PCK의 차이가 아닌, 전반적인 초등교사의 수÷0에 대한 PCK에 그 관심이 있기 때문에 각 범주별로 구분하여 PCK의 차이를 분석하지 않았음을 밝힌다.

4) 최초 연구 대상자 선정 시, 표집된 고경력 교사 다수가 개별 면담에 비동의 하거나 어려움을 표함으로써 고경력자의 최종 참여율이 상대적으로 낮았다. 이는 연구 방법으로 교사와의 개별 면담을 실시하는 다수의 연구에서 연구자가 겪는 어려움 중 하나이며, 초등교사의 경우 경력이 많을수록 자신의 지식을 공개하는 데 부담감을 갖고 있는 것을 추측하게 한다.

가지 항목으로 구성된다([그림 III-1]). 배경 항목에서는 대상자의 배경 정보를 수집하기 위하여 교사의 총 교육 경력과 나눗셈이 본격적으로 지도됨으로써 수÷0과 직접적인 관련이 높은 3학년 지도 경험 유무가 포함된다. 지식 항목은 수÷0에 대한 초등교사의 내용지식을 측정하기 위해 수÷0이 얼마라고 생각하는지 묻는 질문을 포함한다. 경험 항목에서는 학생으로부터 수÷0에 관한 질문을 받아본 경험의 유무를 조사한다. 마지막 처치 항목에서는 수÷0에 관한 질문을 받았을 때 교사가 했던 처치 방법과 앞으로 관련 질문을 받게 된다면 어떻게 지도하는 것이 적절한지에 대한 두 가지 측면의 질문을 제시한다.



[그림 III-1] 교사 개별 면담의 흐름과 내용

이러한 흐름에 따라 구성된 구체적인 개별 면담 양식은 <표 III-2>와 같다.

나. 자료 수집 및 분석

개발한 면담 양식을 바탕으로 2015년 1월부터 4월까지 4개월간 30명의 대상자 각각과 면담 일정을 조정하여 일대일 개별 면담을 실시하였다. 설문지가 아닌 개별 면담을 실시한 이유는 본 연구의 관심인 수÷0의 값이나 지도 방법을 동료 교사에게 묻거나 인터넷 자료 검색 등을 활용하는 것을 방지함으로써 대상자 이외의 외부 요인이 연구 결과에 영향을 미치는 것을 최소화하기 위함이다. 면담을 실시하는 과정에서 연구 대상자의 동의하에 면담 내용을 양식지에 상세히 기록하여 결과 분석을 위한 자료로 활용하였다.

개별 면담을 통해 수집한 자료를 수÷0에 대한 초등교사의 MCK와 MPCK의 두 가지 측면에서 분석하였다. 먼저, 전자를 위하여 수÷0이 얼마라고 생각하는지 대상자들의 반응을 분류하여 범주화하고 각각에 해당하는 교사 수를 파악하였다. 후자는 수÷0 관련 교사의 경험(관련 질문을 받은 경험 및 질문을 했던 학생의 당시 학년, 학생의 수÷0 질문에 대한 지도 방법), 교사가 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법의 세 가지 요소에 따라 각 요소별 응답 수와 주요 진술을 추출하여 제시하였다. 이때 수÷0 질문에 대한 지도

<표 III-2> 개별 면담 양식

영역	조사 내용
배경	선생님의 교육경력은 몇 년 입니까? (　　　)년
	3학년 지도 경험은 몇 년 입니까? (　　　)년
지식	수÷0은 얼마라고 생각합니까? (　　　　　　　　)
경험	학생에게 수÷0에 대해 질문을 받은 적이 있습니까? (Y / N)
	수÷0에 대해 질문을 했던 학생은 몇 학년 이었습니까? (　　　)학년
처치	학생의 수÷0 질문에 대해 어떻게 지도했습니까?
	[구체적 설명]
	학생의 수÷0 질문에 대한 적절한 지도 방법은 무엇이라고 생각합니까?
	[구체적 설명]

방법을 분석하기 위해 II장에서 언급한 Reys (1974)의 결과를 바탕으로 일차적인 분석틀을 마련하고, 개별 면담 실시 후 교사들이 실제 응답한 내용에 따라 이를 세분화하여 <표 IV-4>, <표 IV-5>, <표 IV-6>과 같이 조사 내용별 결과를 제시하였다. 또한 교사가 지도했던 방법과 적절한 지도 방법에 대한 구체적인 진술은 교수학적 시사점을 유도하기 위해 주목할 필요가 있는 내용을 추출하여 제시하였다.

Ⅳ. 연구결과

1. 수÷0에 대한 초등교사의 MCK

수÷0은 우리나라 초등학교 수학 교과서에서 제시된 바 없다. 이러한 상황에서 수÷0에 대한 교사의 MCK를 확인하기 위한 질문인 수÷0에 대한 응답 결과를 정리하면 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 수÷0에 대한 교사의 MCK (N=30)

교사 반응	교사 수	%
나눌 수 없다.	17	56.7
0	10	33.3
수	1	3.3
1	1	3.3
∞	1	3.3

조사 결과, 약 57%(17명)의 교사가 수÷0이 불능임을 알고 있는 것으로 분석되었다. 그러나 수÷0에 대해 오개념을 지니고 있는 교사가 13명으로 드러나 전체 대상자의 약 43%가 수÷0 관련 명확한 MCK를 지니고 있지 못했다. 가장 높은 비율을 차지한 오답은 33.3%(10명)의 교사가 응답한 ‘0’이다. 이어서 ‘수’, ‘1’, ‘∞’라고 대답한 교사가 각각 1명씩이다.

2. 수÷0에 대한 초등교사의 MPCK

수÷0에 대한 초등교사의 MPCK를 파악하기 위하여 수÷0 관련 질문을 받았던 경험, 질문을 받고 교사가 취했던 반응, 교사가 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법에 대한 응답 결과를 정리하여 제시하였다.

가. 수÷0 관련 교사의 경험

교과서에 수÷0이 제시되지 않음에도 불구하고 이에 대한 질문이 학생들에 의해 종종 제기된다. 본 연구에 참여한 30명의 교사 중에서 수÷0이 얼마인지 질문을 받았던 경험이 있는 교사는 약 33%(10명)로 나타났다(<표 IV-2>).

<표 IV-2> 수÷0 관련 질문을 받은 경험의 유무 (N=30)

	유	무
학생에게 수÷0 질문을 받은 경험	10	20

수÷0 질문을 받은 경험이 있는 교사 10명에게 질문을 했던 학생의 당시 학년을 조사한 결과는 <표 IV-3>과 같다.

<표 IV-3> 수÷0 질문을 했던 학생의 학년 (N=10)

학년	1	2	3	4	5	6
학생 수	·	·	6	·	3	2

수÷0 질문을 했던 학생은 나눗셈이 처음 지도되는 3학년이 6명으로 가장 많았으며 5학년 3명, 6학년 2명으로 나타났다. 10명의 교사 중 1명은 3학년과 6학년 학생에게 두 차례에 걸쳐 수÷0 질문을 받아본 경험이 있다고 응답하였다.

나. 학생의 수÷0 질문에 대한 교사의 반응

수÷0 질문을 받았던 경험이 있는 교사 10명이 질문을 받고 취했던 반응을 범주화하면 <표 IV-4>와 같다.

<표 IV-4> 수÷0 질문에 대한 교사의 반응 (N=10)

항목	교사 반응	교사 수
1	교육과정에 제시되어 있지 않기 때문에 지도하지 않았다. (또는) 나중에 배우게 될 것이라고 말했다.	1
2-1	(이유 설명 없이) '0'이라고 대답했다.	2
2-2	(이유를 설명한 후) '0'이라고 대답했다.	3
3	'0으로 나눌 수 없기 때문에 해결 방법이 없다(불능).'라고 대답했다.	3
4	기타	1

조사 결과, 10명 중 3번과 4번 항목에 해당하는 반응을 보인 교사 4명이 수÷0에 대한 MCK를 지닌 것으로 분석된다. 이때 3번 반응은 단지 '0으로 나눌 수 없기 때문'이라는 모호한 이유를 제시하고 있기에 당시 질문을 제기했던 학생에게 충분한 이해를 제공하지 못했을 것으로 추측된다. 기타 항목에 대한 교사의 구체적인 진술은 다음과 같으며, 이는 0의 의미에 대한 언급이 추가되었으나 전체적인 맥락은 3번과 유사함을 알 수 있다.

Ta : 0이라는 숫자가 혼자 있을 때의 의미는 아무 것도 없는 것을 말하는 것이에요. 아무 것도 없는 것으로 나눌 수 없기 때문에 나눌 수 없다고 가르쳤어요.

이와 같은 결과는 4명의 교사 모두 수÷0에 대한 MCK를 지녔음에도 불구하고 학생의 질문에 대해 학생의 발달 단계와 이해를 고려한 적절한 설명을 제공하지 못했음을 보인다.

한편, 10명 중에서 수÷0에 대한 MCK를 지니지 못하여 잘못 지도한 교사는 6명으로 나타났다. 이들 중 1명은 1번과 같이 초등학교 단계에서 나오지 않기 때문에 중, 고등학교 때 배우게 될 것이라고 말하며 지도하지 않았다고 응답하였다. 나머지 5명은 수÷0=0이라고 지도하였으며 이중 2명은 2-1번처럼 특별한 이유를 제시하지 않고 0이라고만 답한 것으로 나타났다. 반면 0이 되는 이유를 설명하며 0이라고 답한 교사 3명(2-2번)의 구체적인 진술은 다음과 같다.

Tb : 수÷0=수×$\frac{1}{0}$이고요. $\frac{1}{0}$=0이므로 최종적으로 수×0=0이라고 가르쳤어요. 이때 0이란 숫자는 절대, 무한, 없음의 의미를 가지고 있다는 것도 설명했어요.

Tc : 0이라는 개념을 먼저 설명했어요. 0은 어떤 수에 0을 더하거나 빼도 답은 어떤 수가 되지요. 그러나 곱셈과 나눗셈에서는 어떤 수를 곱하거나 나누어도 답은 0이 돼요. 따라서 수÷0은 0이 된다고 지도했어요.

Td : 0으로 나누면 나누는 수가 없는 것이므로 나누어지는 수도 0이 돼요. 수÷0이 0이 되는 구체적인 이유를 저도 잘 몰라요. 원칙적으로 답이 0이고 일상생활에서 사용이 잘 안 되어서 그냥 0이라고 알고 있으라고 가르쳤어요.

먼저 Tb는 $a \div b = a \times \frac{1}{b}$이라는 알고리즘에 기초하여 수÷0=수×$\frac{1}{0}$이라는 등식을 유도한 것으로 보인다. 그러나 이는 $b \neq 0$라는 전제를 무시한 것이고, $\frac{1}{0} = 0$이라는 오개념으로부터 수÷0=수×$\frac{1}{0}$=수×0=0이라는 오답을 구하였다. Tc는 0의 개념을 0이 포함된 사칙계산에서의 알고리

즘으로 혼동하여 이해하고 있는 것으로 드러났다. 또한 Tc가 제시한 '수＋0＝수'와 '수－0＝수', '수×0＝0'과 '수÷0＝0'은 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 3가지 상황에서 참인 것에 기초하여 나눗셈에서까지 일반화하는 오류를 범하고 있다. Td의 경우, 0으로 나누는 것은 제수가 없는 것이기 때문에 피제수도 0이 된다고 설명하였지만 이에 대한 논리적 근거를 제시할 수 없기 때문에, 잘못된 수학적 권위에 의존하여 0을 강요하는 식의 지도상 문제를 확인할 수 있다.

다. 교사가 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법

1) 수÷0 MCK를 지니지 않은 교사

<표 IV-1>에서 알 수 있듯이 수÷0에 대한 MCK를 지니지 않은 교사 13명 중에서 수÷0을 0이라고 생각하는 교사가 10명이고, 수, 1, ∞라고 생각하는 교사는 각 1명씩이다. 13명의 교사들은 그들이 생각하는 수÷0의 값이 오류임을 인지하지 못한 상태이기에, 그에 기초한 지도 방법을 제시하였다. 수÷0에 대한 MCK를 지니지 않은 교사 13명이 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법을 범주화하여 제시하면 <표 IV-5>와 같다.

수÷0을 0이라고 생각하는 교사 10명 중 3명은 특별한 이유를 설명하지 않고 그냥 0이라고 지도하겠다고 하였으며 그중 1명은 정확한 지도 방법을 잘 모르기 때문에 그냥 외우라고 하겠다는 기타 의견도 함께 제시하였다. 나머지 7명은 각각 이유를 들어가며 0이라고 지도하겠다고 답하였으며 구체적인 진술은 다음과 같다.

T1 : 5×4=5+5+5+5 혹은 4+4+4+4+4예요. 수÷0=수×$\frac{1}{0}$=$\frac{1}{0}$×수예요. 따라서 $\frac{1}{0}+\frac{1}{0}+\frac{1}{0}+\ldots$(수만큼)=0+0+0+...(수만큼)=0이 되는 거예요. 0이란 숫자는 ×, ÷ 등으로 다른 숫자와 섞이게 되면 다른 숫자를 자신에게 흡수하는 능력이 있어요. 마치 블랙홀처럼...

T2 : 수÷0은 0이에요. 이를 위해 0이 과연 어떤 수인가를 쉽게 이해시켜야 해요. 수는 1, 2, 3, 4,...로 시작해서 셈을 하지요. 이때 0은 존재하지 않는 것이고 또한 값을 가질 수 없는 수이므로 수÷0도 0이 되는 거예요.

T3 : 0으로 나누는 순간 나눠지는 수가 무엇이든 모두 0이란 수로 나타내어지므로 의미 있는 값을 가질 수 없기에 나누는 의미가 사라지게 돼요. 다른 수랑 비교해서 지도하면 좋겠네요.

T4 : 나누기의 의미를 몇 사람에게 배분할 때 한 사람이 받을 수 있는 개수로 생각하면, 0으로 나누는 것은 아무에게도 배분해주지 않는다는 것이므로 아무도 받을 수 없으니까 0이 된다고 가르치면 되지 않을까요?

T5 : 0으로 나누는 것을 예를 들어 설명하면 될 것 같아요.

T6 : 포함제와 등분제의 나눗셈 예시를 들어서 설명할 거예요.

<표 IV-5> 수÷0 MCK를 지니지 않은 교사가 생각하는 적절한 지도 방법 (N=13)

항목	교사가 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법	교사 수
1-1	(이유 설명 없이) "0"이라고 대답한다.	3 (기타1)
1-2	(이유를 설명하며) "0"이라고 대답한다.	7
2	(이유를 설명하며) "수"라고 대답한다.	1
3	(이유 설명 없이) "1"이라고 대답한다.	1 (기타1)
4	(이유를 설명하며) "∞"라고 대답한다.	1
기타	지도 방법을 잘 모르겠다. 그냥 외우라고 말한다.	2

T7 : 접시 위에 빵이 있는 상황을 예로 들어 0번 나눈다고 지도하고 ×0과 ÷0을 짝지어 설명하면 될 것 같아요.

T1은 앞서 언급된 Tb와 동일 교사이다. T1은 적절한 지도 방법에 대해서도 $a \div b = a \times \frac{1}{b}$이라는 알고리즘에 기초하여 $b \neq 0$이라는 전제를 고려하지 않은 채, 수÷0=수×$\frac{1}{0}$이라는 등식을 유도하였다. 또한 $\frac{1}{0} = 0$이라는 오개념을 갖고 있기 때문에 $\frac{1}{0}+\frac{1}{0}+\frac{1}{0}+...=0+0+0+...$ 식을 제시하여 지도한다고 하였지만 여기서도 $\frac{1}{0} = 0$이라고 생각하는 이유를 밝히고 있지 않다. 또한 T1은 어떤 수에 0을 곱하거나 나누면 다른 수를 흡수하여 0이 된다고 부연 설명함으로써 0이라는 개념 자체에 대해서도 오개념을 지니고 있음을 드러냈다. T2, T3, T4 3명의 교사는 '아무 것도 없다'라는 0의 의미에 집중함으로써 수÷0 또한 값을 가질 수 없거나 아무도 배분받을 수 없기 때문에 0이라고 지도해야 함을 주장하였다. 그러나 그들의 진술 중, 값을 가질 수 없기 때문에 의미가 사라진다거나 아무에게도 배분할 수 없으니 아무도 받을 수 없다는 결론 속에는 '불능'이라는 의미가 내포되어 있는 것으로 짐작된다. 교사들이 불능과 0의 개념 간에 혼동하는 양상은 0이 지니는 추상적인 의미와 무관하지 않을 것이다. T5, T6, T7 3명의 교사는 예를 들어 설명하는 것이 적절하다고 말하였다. 그러나 T5는 구체적인 예를 제시하지 못했으며 T6 또한 포함제와 등분제로 예를 들 것을 제안하면서도 실질적인 사례를 제시하는 데 어려움을 보였다. T7은 '접시 위의 빵을 0번 나눈다고 지도하면 된다'는 실질적인 맥락은 제시하였으나 이러한 맥락과 수÷0=0이 어떻게 관련되는지는 설명하지 못했다. 또한 수×0과 수÷0을 짝지어 설명하는 방법을 제안했는데, 이는 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계의 이용이라기 보다는 단순한 형식적 측면의 연계를 의도한 것으로 보이며 적절한 예도 제시하지 못하였다.

수÷0이 각각 수, 1, ∞라고 생각하는 3명의 교사 중에서 1이라고 주장한 교사는 지도 방법을 모르고 학생들에게 이해가 어려운 내용이기 때문에 이유 설명 없이 그냥 암기시키는 것이 좋겠다고 하였다. 한편, 수와 ∞라고 말한 교사 각각이 생각하는 적절한 지도 방법은 다음과 같다.

T8 : 나누기의 의미는 어떤 수만큼 묶는다는 개념이에요. 예를 들어, ÷2는 2개씩 묶으라는 뜻인 것처럼 말이죠. 나누기 0의 의미는 그 어떤 수로도 묶지 않는다는 말인 것 같아서 식이 성립할 수 없다고 지도해야 할 것 같고, 그냥 원래 수만 남아있을 것 같아요. 사실 정확히 알지 못해요.

T9 : 1) 제수가 자연수일 때 칠판에 그려가며 설명하면 돼요. 예를 들어, 사과 8개를 4, 2, 1로 나누는 상황은 점점 몫이 커지지요.
2) 제수가 분수일 때, 점점 0에 가까워질 때도 칠판에 그려가며 설명해요. 예를 들어, 사과 2개를 1/2, 1/4, 1/8개씩 자르는 상황도 점점 몫이 커져요. 이처럼 나누는 수가 0에 가까워질수록 수는 커지고, 따라서 제수가 0일 때 몫은 무한대가 되는 거라고 지도하면 좋을 것 같아요. 이때 구체적인 그림을 그려 설명하거나 긴 띠를 잘라가며 제수가 0으로 가까워질 때 몫이 어떻게 변하는지 눈으로 확인시키면 학생들이 쉽게 이해할 것 같고요.

수÷0이 수라고 생각하고 있는 T8은 수÷0이 식이 성립할 수 없음을 알고 있음에도 불구하고 그렇기 때문에 피제수가 그대로 유지된다는 오개념을 지니고 있는 것으로 드러났다. 스스로 말했듯이 T8은 제대로 이해하지 못하고 있음을 보여준다. T9의 경우, 그림이나 긴 띠와 같은 구체물 조작을 통해 제수가 자연수일 때와 분수일

때를 구분하여 지도 방법을 상세히 제시하였으며, II장에서 언급했던 Euler와 유사한 사고 흐름을 확인할 수 있다. 그러나 제수의 크기가 작아질수록 몫이 커지기 때문에 수÷0의 몫이 무한대라고 진술한 것을 바탕으로, 첫째 예시에서는 $\lim_{x\to 0} 8\div x$를 8÷0과 동치로 보았으며 둘째 예시에서는 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$임을 이용하여 $\lim_{x\to\infty} 2\div\frac{1}{x}$을 2÷0과 동치로 간주하는 오류를 보인다.

2) 수÷0 MCK를 지닌 교사

수÷0에 대한 MCK를 지니고 있는 교사 17명이 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법을 범주화하여 제시하면 <표 IV-6>과 같다.

수÷0이 불능임을 알고 있는 교사 17명 중 단 1명(8번)만이 적절한 지도 방법을 알지 못한다고 응답하였으며, 나머지 16명은 자신이 생각하는 적절한 지도 방법을 제시하였다. 이를 범주화한 결과, 총 7가지 방법으로 분석되었으며 가장 많은 교사가 선호한 지도 방법은 총 7명(4번)이 응답한 등분제나 포함제의 상황으로 설명하기이다. 이러한 7명 중 2명(4-1번)은 학생들이 이해하기 쉽도록 구체물을 가지고 등분제와 포함제의 상황으로 설명할 것을 제안하였으며 이중 1명의 구체적인 진술은 다음과 같다.

T10 : 먼저 사탕을 이용해서 등분제로 설명할 수 있어요. 다음과 같은 질문에 대해 생각해 보도록 지도해요. '8÷2: 사탕 8개가 있다. 이 사탕을 접시 2개에 똑같이 담아 나누어 먹으려고 한다. 한 사람당 사탕 몇 개를 먹을 수 있을까?' 이처럼 8÷2를 먼저 생각해보도록 한 뒤, 8÷0을 도입해요. '8÷0: 사탕 8개가 있다. 이 사탕을 접시에 똑같이 담아 나누어 먹으려고 하는데 접시는 0개이다. 이때 한 사람당 사탕 몇 개를 먹을 수 있을까? 또는 사탕을 나누어 먹는 게 가능한가? 또는 접시에 사탕을 나누어 담을 수 있을까?' 그 다음, 사탕을 이용해서 포함제로 설명할 수 있어

<표 IV-6> 수÷0 MCK를 지닌 교사가 생각하는 적절한 지도 방법 (N=17)

항목	교사가 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법	교사 수
1	곱셈과의 역연산을 통해 지도한다. (예) 12÷4=3 ⇄ 4×3=12 (○) 6÷0=□ ⇄ 0×□=6 : 어떠한 수도 0을 곱하면 0이 되기 때문에 이 곱셈식은 성립하지 않는다. 따라서 6÷0은 불능이다.	2
2	곱셈과의 역연산을 통해 지도한다. • 6×□=6 ⇄ □=6÷6 • 3×□=6 ⇄ □=6÷3 • 2×□=6 ⇄ □=6÷2 • 1×□=6 ⇄ □=6÷1 • 0×□=6 ⇄ □=6÷0 : 따라서 6÷0은 불능이다.	2
3	구체물을 가지고 직접 0으로 나누어서 나눌 수 없음을 설명한다.	2
4-1	구체물을 가지고 등분제와 포함제의 상황으로 설명한다.	2
4-2	그림 또는 시각적 모델을 가지고 등분제와 포함제의 상황으로 설명한다.	1
4-3	(구체물, 그림, 시각적 모델 없이) 등분제와 포함제의 상황으로 설명한다.	3
4-4	등분제의 상황으로 설명한다.	1
5	0으로 나눌 수 없기 때문에 그냥 약속했다고 설명한다.	1
6	0은 값을 가지고 있지 않아서 나눌 수 없다고 설명한다.	1
7	분모에 0이 올 수 없기 때문에 불가능하다고 설명한다.	1
8	지도 방법을 잘 모르겠다.	1

요. '8÷2: 사탕 8개가 있다. 사탕을 2개씩 덜어 낸다면 몇 명이 나누어 먹을 수 있을까?' 이처럼 8÷2를 먼저 생각해보도록 한 뒤, 8÷0을 도입해요. '8÷0: 사탕 8개가 있다. 이 때 사탕을 0개씩 덜어내는 게 가능한가? 또는 사탕을 나누어 먹는 것이 가능한가?' 이러한 상황을 통해 계산이 불가능함을 알게 하고, 그 후 나눗셈을 할 때 나누는 수는 0을 제외한 자연수임을 약속해요.

나머지 5명 중 1명(4-2번)은 T10과 동일한 맥락으로 지도하되, 구체물이 아닌 그림과 같은 시각적 모델을 사용하여 지도하는 것이 적절하다고 하였다. 또 다른 3명(4-3번)은 구체물, 그림과 같은 시각적 모델 없이 등분제와 포함제의 상황을 설명하여 지도할 것이라고 응답하였다. 다른 1명(4-4번)은 다음 진술과 같이 등분제의 상황으로 지도할 것을 제안하면서, 교사 자신이 포함제로 설명하는 방법은 잘 모르고 있음을 인정하였다.

T11 : 과자 10개를 사람 1명, 2명, ... n명이 똑같이 나누어 먹는 것은 말이 되지만, 0명이 나누어 먹는다는 것은 말이 안 되기 때문에 수÷0은 할 수 없다고 지도해야 해요 그런데 이렇게 설명하면 포함제로는 설명할 수가 없겠군요! 그건 잘 모르겠어요.

한편, 17명 중 2명(3번)의 교사는 등분제나 포함제의 맥락 없이, 구체물을 가지고 직접 0으로 나누려는 시도를 통해서 나눌 수 없음을 경험함으로써 수÷0이 불능임을 설명할 수 있다고 하였으며, 이중 1명의 진술은 다음과 같다.

T12 : 사과와 같은 실물을 이용하여 직접 해보도록 하는 것이 좋을 것 같아요. 사과를 2로 나누라고 하면 반으로 나눌 것이고, 1로 나누라고 하면 그대로 두는데, 0으로 나누라고 하면 못하는 상황을 직접 체험해 보게 하면 될 것 같아요.

나머지 7명 중 4명의 교사는 곱셈과의 역연산 관계를 통해 지도하는 것이 적절하다고 주장하였으며, 이중 2명은 <표 IV-6>의 1번 항목에, 다른 2명은 2번 항목에 해당하는 방법을 제시하여 구체적인 지도 방법에서 다소 차이를 보였다.

나머지 3명(5, 6, 7번)은 각각 0으로 나눌 수 없기 때문에 그냥 약속한다, 0은 값을 가지고 있지 않아서 나눌 수 없다, 분모에 0이 올 수 없기 때문에 불가능하다고 설명하는 것이 적절하다고 응답하였다.

Ⅴ. 논 의

본 연구에서는 수÷0에 대한 초등교사들의 PCK와 관련하여 내용지식 수준과 그들이 생각하는 수÷0의 적절한 지도 방법에 대하여 조사하였다. 연구 결과를 토대로 다음과 같은 논의를 통해 몇 가지 시사점을 제안하고자 한다.

첫째, 개별 면담에 참여한 초등교사 중에서 약 57%가 수÷0에 대한 MCK를 지니고 있는 것으로 분석되었다. Reys(1974)에서 4, 6학년 교사들 중 약 17%만이 수÷0이 얼마인지 알고 있는 것에 비하여 높은 수치라고 판단된다. 한편, 김수미(2004)에서 우리나라 예비 초등교사의 약 63%가 수÷0에 대한 MCK를 지니고 있다는 결과와 비교할 때 현직 초등교사가 예비교사보다 더 낮은 정답률을 보였고, 이는 수÷0을 배운지 오랜 시간이 지났기 때문으로 간주된다. 그러나 교육과정에 수÷0이 제시되어 있지 않다 할지라도 교사가 관련 MCK를 지니지 못한 현실을 당연하게 받아들일 수만은 없다. <표 IV-2>와 같이 약 33%의 교사가 학생으로부터 수÷0에 대해 질문을 받은 경험이 있고 그에 대해 <표 IV-4>와 같이 지도했음을 볼 때, 교사의 오개념이 학생에게까지 큰 영향을 미칠 수 있기 때문이다. 본 연구 결과는 교사가 어느 정도 범위까지의 MCK를 지니고 있어야 하는지에 대한 물음에 대해, 적어도

학생들의 질문에 적절히 지도할 수 있을 정도의 MCK를 지니고 있어야 할 필요를 뒷받침한다. 따라서, 교사 연수 시 교육과정 이외의 관련 교과 내용을 폭넓게 다룸으로써 교사들이 풍부한 MCK를 지닐 수 있도록 프로그램을 개선할 것을 제안한다. 또한 김수환 외(2010)에서 나눗셈을 지도할 때 0에 대해서는 특별한 주의가 필요함을 언급한 것처럼, 지도서 등 교수를 위한 교사용 자료집에 해당 학습과 관련하여 교사가 주의를 기울여야 할 내용에 대해서는 보다 상세히 제시해 줄 필요가 있다.

둘째, 수÷0에 대한 MCK를 지니고 있는 교사들이 생각하는 적절한 지도 방법 중 가장 높은 응답률을 보인 것은 등분제와 포함제와 같은 맥락을 통한 설명 방법이다. 구체물이나 시각적 모델을 이용하여 구체적 맥락에서 설명할 것을 제안하기는 하였으나, 실제로는 존재하지 않는 대상을 나타내는 0으로 인해 등분 또는 포함의 과정이 학생의 머릿속에서 이루어져야 하는 추상성을 띨 수밖에 없기 때문에 초등학생들의 인지발달 단계에서는 이해가 어려울 수 있다. 이와 관련하여 Reys(1974), Blake & Verhille(1985)이 학생들의 이해를 돕기 위해서는 역연산 관계를 사용하는 것이 효과적임을 주장한 것을 고려할 필요가 있다. 수÷0=□와 수=0×□를 연결하여 지도하는 것은 수학적으로 강력한 구조를 보임으로써 학생들이 수÷0은 유의미하게 정의될 수 없음을 쉽게 이해할 수 있다고 하였다. 이 방법은 우리나라 초등 수학과 교육과정에서 ‘한 가지 상황을 곱셈식과 나눗셈식으로 나타내는 활동을 통하여 곱셈과 나눗셈의 관계를 이해한다(교육과학기술부, 2011).’가 성취기준으로 다루어진다는 점을 고려할 때 충분히 의미 있는 실현이 가능한 방법이다. 이는 또한 나눗셈을 항상 등분제와 포함제의 맥락과 결부시켜서 지도하려는 경향을 보이는 다수의 교사에게 시사하는 바가 크다. 교사는 수학 개념이나 원리를 지도할 때 한두 가지 방법만을 강조할 것이 아니라 학습 내용이나 학생들의 수준, 연결성 등을 다양하게 고려하여 적절한 지도 방법을 선택해야 하며, 이는 본 연구의 관심인 수÷0에 대한 학생의 질문이 제기될 때에도 고려되어야 할 것이다.

셋째, 초등학교 수학에서 수÷0 및 0 개념의 지도에 대한 논의이다. Lannin et al.(2013)은 곱셈과 나눗셈의 의미와 알고리즘을 잘 이해한 3-5학년 학생들은 0에 관한 나눗셈을 쉽게 학습할 수 있다고 하였다. 또한 학생들이 스스로 수÷0과 0÷수를 구별하는 것까지도 가능함을 보이고 있다. 그러나 이러한 지도 가능성에도 불구하고, 앞서 언급했듯이 본 연구는 수÷0을 초등학교 교육과정이나 교과서에 포함하여 가르치자는 필요를 언급하기 위함이 아니며, 0 관련 사칙계산을 교육과정에 어느 정도까지 포함시키느냐에 관한 논의는 더욱 심도 있게 다루어질 필요가 있다. 다만, 본 연구의 결과를 통해 0의 개념 자체에 대해 교육과정과 교과서에서 더욱 풍부하고 다양하게 다루어질 필요를 제안한다. 교사들의 구체적인 진술에서도 파악할 수 있듯이 수÷0을 의미 있게 다루지 못하고 이에 대한 오개념을 지니는 이유 중 하나는 0이 지니는 개념 자체의 추상성에서 기인하는 것으로 분석되었다. Blake & Verhille(1985)는 0을 단순히 아무 것도 없는 것으로 간주하는 것은 0이 포함되는 후속 학습에 있어서 어려움을 야기한다고 하였다. 예컨대, 수÷0을 계산할 수 없는 불능인 상황과 아무 것도 없는 0의 상황을 혼동하는 경우에서 이러한 어려움을 확인할 수 있다. 따라서 초등학교 수학 교수·학습 상황에서 0의 개념에 대한 더욱 폭넓고 심도 있는 경험의 필요를 제안한다.

참 고 문 헌

과정교재연구소(2007). **의무교육과정표준실험교과서 수학 4학년 하권**. 연변교육출판사.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**(교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8]).

교육부(2015). **수학 3-1**. 서울: 천재교육.

김수미(2004). 고대 수학자와 현대 예비교사들의 영(zero) 처리 오류 및 교수학적 시사점. **과학교육논총, 16**, 87-106.

김수미(2006). 0처리 오류의 기원 및 0의 지도. **대한수학교육학회지 학교수학, 8**(4), 397-415.

김수미(2009). 영(0)이 초등학생들의 계산 수행에 미치는 영향 분석. **대한수학교육학회지 학교수학, 11**(4), 567-581.

김수환, 박성택, 신준식, 이대현, 이의원, 이종영, 임문규, 정은실(2010). **초등학교 수학과 교재연구**. 동명사.

박성택(1989). 산수학습의 지도과정에 대한 소고. **과학교육연구, 14**, 91-117.

배종수(2005). **초등수학교육 내용지도법**. 서울: 경문사.

백석윤, 조누리(2013). 수학적 발문에 대한 초등학교 예비교사와 현직교사의 PCK 비교. **한국초등수학교육학회지, 17**(1), 167-183.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대출판부.

임해경(2014). 삼각형의 합동조건에 대한 교사들의 이해와 개선 방안. **대한수학교육학회지 학교수학, 16**(2), 219-236.

장경윤, 홍진곤, 이화영, 탁병주(2014). **2014 수학교육 이슈리포트**. 한국과학창의재단.

장혜원, 최민아, 임미인(2014). 0처리 오류에 기초한 교과용 도서 분석 및 활동 구성. **한국초등수학교육학회지, 18**(2), 257-278.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Blake, R., & Verhille, C. (1985). The Story of 0. *For the Learning of Mathematics, 5*(3), 35-47. FLM Publishing Association.

Caldwell, J. H., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2011). *Developing Essential Understanding of Addition and Subtraction for Teaching Mathematics in Prekindergarten-Grade 2*. Reston : NCTM.

Euler, L. (1765) Elements of Algebra. 김성숙 외 (역). **레온하르트 오일러의 대수학 원론**. 살림Math.

Henry, B. (1969). Zero, The Troublemaker. *Arithmetic Teacher, 16*(5). 365-367.

Lannin, J., Chval, K., Jones, D., & Dougherty, B. J. (2013). *Putting Essential Understanding of Multiplication and Division into Practice in Grades 3-5*. Reston:NCTM.

Merseth, K. K. (1993). How Old Is the Shepherd? An Essay about Mathematics Education. *Phi Delta Kappan, 74*, 548-554.

Reys, R. E. (1974). Division by Zero- An Area of Needed Research. *Arithmetic Teacher, 21*(2), 153-157.

Reys, R. E., & Grouws, D. A. (1975). Division Involving Zero: Some Revealing Thoughts from Interviewing Children. *School Science and Mathematics, 75*, 593-605.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Education Research, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Sanderson, S. (1996). *Agnesi to Zero*. 황선욱(역). **수학사 가볍게 읽기**. 서울: 한승.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Peck, R., Bankov, K., Rodriguez, M., Reckase, M., & Rowley, G. (2012). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries*.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2002). Intuitive Beliefs, Formal Definitions and Undefined Operations: Cases of Division by Zero. In Gilah C. Leder, Erkki Pehkonen, Günter Törner(Eds.), *Mathematics Education Library, 31*, 331-344. Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (2014). *We Need Another Revolution: Five Decades of Mathematics Curriculum Papers by Zalman Usiskin*. Reston : NCTM.

An Analysis of Elementary School Teachers' PCK about N÷0

Lim, Miin (Graduate School, Seoul National University of Education)
Chang, Hyewon (Seoul National University of Education)

In this study, we are interested in the teachers' MCK about 'N÷0' and MPCK in relation to the proper ways to teach it. Even though 'N÷0' is not on the current curriculum and textbooks of elementary school mathematics, a few students sometimes ask a question about it because the division of the form 'a÷b' is dealt in whole number including 0. Teacher's obvious understanding and appropriate guidance based on students' levels can avoid students' error and have positive effects on their subsequent learning. Therefore, we developed an interview form to investigate teachers' MCK about 'N÷0' and MPCK of the proper ways to teach it and carried out individual interviews with 30 elementary school teachers. The results of the analysis of these interviews reveal that some teachers do not have proper MCK about 'N÷0' and many of them have no idea on how to teach their students who are asking about 'N÷0'. Based on our discussion of the results, we suggest some didactical implications.

* Key Words : N÷0(수÷0), PCK(내용교수지식), MCK(수학내용지식), MPCK(수학내용교수지식)

논문접수 : 2015. 10. 12
논문수정 : 2015. 11. 16
심사완료 : 2015. 11. 16