대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 4, 675 ~ 690. Nov 2015

초등예비교사 교육을 위한 수학적 과제 설계 : 기하 판 위의 정삼각형이 가능한가?[1)]

이 동 환*

본 연구는 초등 예비교사에게 필요한 수학지식을 가르치는 효과적인 수단으로서 수학적 과제의 특징을 논의하고 그에 맞게 과제를 설계하고 교사교육에 실행한 사례를 제시하였다. 그 결과 예비교사들은 '격자점 정삼각형 만들기' 라는 수학적 과제를 해결하면서, 주어진 상황을 수학적 문제로 변환하고 기존 지식과의 연결을 통해 문제를 변형하고 해결하며, 기존의 수학적 개념을 새로운 관점에서 보는 경험을 할 수 있었다. 이러한 경험이 예비교사의 교육에 대한 관점의 변화와 어떻게 연결되는지 그리고 교사교육에 적합한 수학적 과제 설계를 위한 조건에 대해 논의하였다.

Ⅰ. 서 론

초등 예비교사를 대상으로 수학교육 강좌를 진행하면서 수학에 대해 부정적인 태도를 가진 예비교사가 많다는 사실을 확인할 수 있었다. 실제로 많은 초등 교사들은 수학의 본질이나 수학을 한다는 것의 의미에 대해 편향된 관점을 지니고 있다(Fosnot & Dolk, 2001; McGowen & Davis, 2001). 이러한 예비교사의 수학에 대한 부정적인 태도를 개선할 수 있는 방안 중에 하나는 그들에게 새로운 수학학습의 경험을 제공하는 것이다(Yackel, Underwood, Elias, 2007, 이지현, 2015). 이러한 경험은 예비교사들이 수학과 수학학습에 대한 새로운 관점을 형성하고 이를 실현할 수 있는 수학수업의 가능성을 확인하는 기회가 될 수 있다. 그러나 초등 예비교사들은 교사교육 과정에서 대학수준의 수학 강좌는 초등학교 수학내용과 관련이 적어 불필요하다는 인식을 가지고 있으며, 동시에 초등학교 수학내용은 이미 충분히 알고 있으므로 이에 대해서는 더 이상 배울 필요가 없다고 생각하는 경향이 있다. 따라서 초등 예비교사들에게 수학학습의 필요성을 인식시킬 수 있으며 동시에 그들에게 새로운 수학학습의 경험을 제공할 수 있는 수학적 과제를 설계하는 것이 중요하다. 이러한 관점에서 본 연구는 초등 예비교사교육에 적합한 수학적 과제는 무엇이고 이러한 과제를 통해 예비교사는 무엇을 학습하는가를 살펴보는데 목적이 있다.

수학교사교육에서 수학적 과제는 여러 가지 용도로 사용될 수 있는 효과적인 교육 수단이다 (Watson and Mason 2007). 우선 수학적 과제를 통해 교사들은 새로운 수학지식을 얻을 수 있다. 이는 일반 학생들에게도 마찬가지이지만 특히 교사들은 수학적 과제를 해결하면서 수학교육과

---

* 부산교육대학교, dhdhdh@bnue.ac.kr
1) 이 논문은 2015년도 부산교육대학교 교내 연구과제로 지원을 받아 수행된 연구임

관련된 여러 주제를 다룰 수 있다. 이러한 주제에는 수학의 특징, 수학을 보는 관점, 수학 교수-학습의 의미, 문제해결과정에 대한 이해 등이 포함된다. 즉, 교사교육과정에서 제공되는 수학적 과제는 교사의 수학적 이해뿐만 아니라 수학교육적 이해를 신장시킬 수 있어야 한다. 본 연구는 이러한 목적을 고려하면서 초등예비교사교육을 위한 수학적 과제의 특징을 논의하고 그에 맞게 과제를 설계한 사례를 제시하고자 한다. 또한 수학적 과제가 예비교사에게 제공한 수학적 경험이 교사교육에 주는 시사점에 대해 논의한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학교사교육에서 수학적 과제의 역할

수학교사에게 필요한 지식의 유형이 무엇인가를 서술하고 구분하거나 그러한 지식을 갖춘 교사의 수업이 학생에게 어떠한 영향을 주는가에 대한 연구는 활발하게 진행되고 있으나 수학교사에게 이러한 지식을 가르치는 방법에 대한 연구는 상대적으로 부족하다(Steele & Hillen, 2012). 수학교사의 학습을 촉진하는 가장 효과적인 수단 가운데 하나가 수학적 과제를 활용하는 것이다(Watson & Mason 2007; Clarke, Grevholm, Millman, 2009). 본 절에서는 교사교육에서 수학적 과제의 역할과 교사학습에 미치는 영향에 대해 논의한다. 이러한 논의는 초등 예비교사 교육에 적합한 수학적 과제를 설계하는 지침으로 활용될 수 있고 또한 수학적 과제를 해결하는 과정에서 드러나는 예비교사의 수학적 경험을 분석하는 틀이 될 수 있다.

Gadanidis & Namukasa(2009)는 대다수 초등학교 교사들이 수학에 대한 막연한 두려움과 어려움을 느끼고 있다고 진단하고, 예비교사 교육에서 교사의 수학에 대한 부정적인 태도를 개선하는 '수학 치료'가 제공되어야 한다고 주장한다. '수학 치료'는 주로 예비교사의 수학에 대한 관점을 변화시킬 수 있는 수학적 과제로 구성되는데, 이들은 이러한 수학적 과제의 역할로서 두 가지를 제안하였다.

> 첫째, 교사에게 수학적 통찰의 즐거움을 경험할 수 있는 기회를 줄 수 있어야 한다. 둘째, 수학이 무엇이고, 수학을 한다는 것이 무엇이며, 수학을 학습한다는 것이 무엇인가에 대해 교사가 가지고 있는 기존의 관점에 충격을 주고 변화시킬 수 있어야 한다(Gadanidis & Namukasa, 2009, p.113).

Gadanidis & Namukasa(2009)는 수학적 통찰의 경험을 제공하는 수학적 과제를 통해 수학교사가 수학에 대한 관점을 변화시킬 수 있고, 이러한 변화가 수업의 변화를 가져온다고 보았다. 수학교사에 필요한 수학지식은 수학내용의 축적보다는 수학이 생성되고 인정되는 수학적 과정에 대한 이해나 수학적 사고방식이나 태도 등과 같이 수학적 활동을 경험하면서 획득되어야 한다. Wu(2011)는 수학교사에게 필요한 이러한 지식을 가리켜 수학의 기본적인 원리라고 하였다. 수학의 기본적인 원리로서 정의, 정확성, 논리적 추론, 정합성, 목적성 등을 제시하였다.

> 교사교육자로서 우리가 교사에게 가르쳐야 할 수학은 다음 두 가지 조건을 만족해야 한다. 첫째, 교사가 가르칠 내용과 관련이 있어야 한다. 둘째, 수학의 기본적인 원리 즉, 수학적 사고의 본질을 경험해야 한다. (Wu, 2011, p.372).

Liljedahl, Chernoff, Zazkis(2007)는 교사교육에서 '좋은' 수학적 과제는 교사의 수학 지식을 강화할 수 있고 수학교육과 관련된 이슈를 구체적으로 드러낼 수 있어야 한다고 주장하였다. 그리

고 수학적 과제가 이러한 목적을 달성할 수 있는가를 분석하는 '수단-목적' 틀을 제안하고, 교사교육에서 수학적 과제의 역할을 크게 4가지로 구체화하였다. 예를 들어, 수학을 수단으로 해서 다른 수학내용의 학습이 목적이 되거나 교수법 학습이 목적이 되도록 수학적 과제를 설계하고 활용할 수 있다. 전자의 경우 의도한 수학적 내용이 수학적 과제를 해결하는 과정에서 자연스럽게 전달되는 것이 중요하고, 후자의 경우 수학 내용을 다루는 과정에서 교사가 수학의 특징, 수학에서 추론이나 탐구의 역할 등과 같은 교수법과 관련된 이슈를 경험하고 이해하는 것이 중요하다.

Stylianides & Stylianides(2010)는 '예비교사의 수학지식을 증진시키기 위해 수학교사교육 프로그램은 어떤 학습 기회를 제공해야 하는가?' 라는 질문에 대한 답으로서 '교육-관련 수학과제'(Pedagogy-Related mathematics task, 이하 'P-R 수학과제')를 제시하였다. 'P-R 수학과제'는 다음의 3가지 조건을 갖추어야 한다. 첫째, 과제의 주요 목적은 수학적 활동이다. 예비교사들이 'P-R 수학과제'에 참여하면서 해결해야 하는 것은 어떤 가설을 증명하거나 수학적 풀이의 정당성을 평가하는 등의 수학적 활동이다. 둘째, 'P-R 수학과제'에 담긴 수학적 내용은 학생들에게 기본적이면서 학습하기 어려운 것이어야 한다. 다른 수학적 개념과의 관련성이 풍부하고 여러 개념을 이해하는 데 필수적이라는 의미에서 기본적인 내용을 다룰 필요가 있고, 많은 학생들이 학습하기 어려운 내용일수록 교사가 제대로 이해해야 할 필요가 있는 것이다. 셋째, 수학적 과제 해결에서 교육적 맥락이 중요한 역할을 해야 한다. 과제가 수업과 같은 교육적 맥락에서 비롯되었거나 과제 해결 방법을 선택할 때 수학적 정당성뿐만 아니라 교육적 맥락도 중요하게 고려해야 한다는 것이다. P-R 수학과제는 수학교사의 수학지식 증진만을 목적으로 하는 것이 아니라 실제 수업에서 학생을 지도하는 과정에서 수학지식을 활용하는 능력 향상에 중점을 두고 있다. 또한 교육적 맥락과 관련된 수학과제는 교사에게 수업에서 일어나는 상황을 수학적인 관점에서 보고 해결할 수 있는 기회를 제공한다. Stylianides & Stylianides(2010)는 이러한 교사의 능력을 가리켜 '수업의 수학화' 라고 불렀다. 즉, 수업에서 일어나는 상황을 수학적 지식을 활용하여 해결하는 과정을 P-R 수학과제로 경험할 수 있는 것이다.

Leikin & Zazkis(2010)은 교사가 수학을 가르치는 과정에서 학습이 이루어지는 현상을 연구하여 '수업을 통한 학습'을 수학교사교육의 효과적인 방법으로 제안하였다. 다시 말해, 수학교사는 수학을 가르치면서 학생들의 질문에 답하거나 예상치 못한 풀이를 검증하는 등의 수학적 문제 상황을 해결해야 한다. 이러한 수학적 문제를 해결하면서 교사가 배우는 내용을 두 가지 즉, 교수법적 수학(Pedagogical mathematics)와 수학적 교수법(mathematical pedagogy)으로 구분하였다. 전자는 수학을 가르치는 교육의 맥락에서 발생하여 배우게 되는 수학내용이고 후자는 수학을 가르치는 전략이나 방법을 말한다. Leikin & Zazkis(2010)은 수학교사 지식의 원천을 수학을 가르치는 맥락에서 우발적으로 발생하는 수학적 문제 상황에서 찾았고, 이러한 문제를 해결하면서 수학교사의 지식이 성장한다고 보았다. 다시 말해, 교사교육에 적합한 수학적 과제는 수학교사의 가르치는 활동과 밀접한 관계를 맺고 그러한 활동에 대한 반성을 자극해야 한다.

김진환, 박교식(2008)은 중등학교 수학 교수·학습에서 학생들의 수학화를 안내할 수 있기 위해서는 중등수학교사들이 먼저 어느 정도의 수학화 능력을 갖추고 있어야 하고, 이를 위해서는 그들이 교사교육을 받는 동안에 실질적인 수학

화 경험을 충분히 쌓을 필요가 있다고 보았다. 따라서 예비중등교사들이 수학자들의 수학화 과정을 모방할 수 있게 하는 즉, 예비중등교사들의 입장에서는 진정한 수학화를 경험할 수 있는 소재로서 자연수의 분할과 피보나치 수열의 관계를 탐구하는 수학적 과제를 개발하였다.

앞서 살펴본 바와 같이 교사교육에서 수학적 과제의 주된 역할은 수학교사에게 수학을 하는 경험을 제공하여 수학지식 향상은 물론 수학에 대한 관점이나 태도의 변화를 유도하여 그들의 수업에 실질적인 영향을 주는 것이다. 따라서 본 연구는 교사교육에서 수학적 과제의 역할을 고려하여 초등 예비교사에게 적합한 수학적 과제를 설계하였다.

2. 격자점 위에서 정삼각형 만들기의 불가능성

본 연구에서 다루는 과제는 격자점 위에서 정삼각형을 만들 수 없다는 성질에 기반하고 있다. 이 성질은 좌표평면에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점으로 구성된 정삼각형이 존재할 수 없다는 성질과 동치이다. 본 논문 연구결과에서 이 성질을 예비교사들이 탐구해가는 과정이 제시되므로, 논의의 편의를 위해 본 절에서 이 성질에 대한 수학적 측면을 살펴보고자 한다.

좌표평면에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점으로 구성된 정삼각형이 불가능함을 다음과 같이 증명할 수 있다. x, y 좌표가 모두 정수인 점 $A(a,b)$를 원점을 중심으로 60° 회전이동한 점 B의 좌표는 $(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b)$ 이다. a,b가 각각 정수이므로, $\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b$ 과 $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b$ 는 정수가 될 수 없다. 다시 말해, x, y 좌표가 모두 정수인 점 $A(a,b)$에 대해 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 이고 $\angle AOB=60^{\circ}$ 를 만족하는 점 B의 x, y 좌표는 각각 정수가 될 수 없다. 따라서 격자점 위에서 정삼각형을 만들 수 없다.

III. 연구방법

1. 연구대상

본 연구자가 소속된 교육대학교의 2015년도 초등수학교수법 강좌를 수강한 2학년 30명을 대상으로 연구를 수행하였다. 초등수학교수법 강좌는 수학 교수-학습이론, 수학학습심리, 평가 등 수학교육 관련 이론을 이해하는 것을 목적으로 진행되며, 예비교사들이 처음으로 수강하는 수학교육 관련 강좌이다. 이들은 본 강좌 이전에 교양수학 과목을 이수하였는데, 교양수학은 기본적인 집합론, 정수론, 대수, 미적분 등의 대학 수준의 수학내용을 다루고 있다. 따라서 예비교사들의 수학학습 및 수학적 경험은 초중고 학교수학과 대학의 교양수학을 중심으로 이루어져 있다고 볼 수 있다. 예비교사들은 1주일간의 학교 참관실습 경험이 있다.

2. 연구절차

본 연구는 초등수학교수법 과목에서 수학적 사고방법과 태도를 주제로 진행된 수업의 일부를 분석하였다. 연구자는 예비교사들에게 수학적 과제를 해결하는 경험과 이러한 경험에 대해 논의할 수 있는 기회를 제공하여 이들이 자연스럽게 수학적 사고방법과 태도에 대한 관점을 정립할 수 있도록 수업을 설계하였다. 과제를 실행하는 과정에서 나타나는 예비교사들의 반응과 경험을 분석하고 이로부터 교사교육에 적합한 수학적 과제 설계에 대한 시사점을 제시하고자 하

였다. 이를 위해, 연구자가 수학적 과제를 설계하게 된 배경 및 설계 과정을 제시하였다. 연구자는 예비교사와의 상호작용 과정에서 본 연구의 수학적 과제의 아이디어를 착안하였고, 이 과정을 사고실험 형태로 재구성하여 서술하였다. 이러한 과정을 거쳐 설계된 수학적 과제를 수업에서 실행하였고 그 과정을 분석하였다.

3. 자료수집 및 분석

예비교사들이 학생의 입장에서 새로운 수학학습을 경험하고 이를 교사의 입장에서 반성할 수 있도록 연구자는 개인별 과제해결, 소집단 토론, 전체토론 등을 활용한 토론학습으로 수업을 진행하였다. 예비교사들에게 자신들의 추론을 정당화하고 설명할 수 있는 기회를 충분히 제공하고 연구자는 학생들의 추론을 명확히 드러내고 정리하는 역할을 주로 하였고, 수학적 토론에 진전이 없을 때, 적절한 질문과 힌트를 제공하였다. 예비교사들이 주어진 수학적 과제를 해결하는 과정에서 나타난 질문, 예비교사 및 연구자와의 상호작용 및 토론 등을 분석하기 위해 수업장면을 녹화하고 전사하였다. 또한 수업 과정에서 예비교사들이 작성한 활동지와 수업 후 예비교사들이 수업에 대한 반성으로서 작성한 수업일기를 분석하였다. 이러한 분석은 예비교사들이 수학적 과제를 해결하면서 경험한 수학적 사고나 수학에 대한 관점이나 태도의 변화를 파악하는 데 목적이 있었다.

Ⅳ. 연구결과

1. '격자점 정삼각형 만들기' 과제의 개발

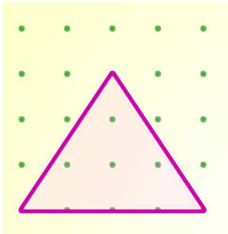
연구자는 예비교사 S가 참관실습 후 작성한 수업비평 보고서에서 착안하여 '격자점[2] 정삼각형 만들기' 과제를 설계하게 되었다. 예비교사 S가 작성한 보고서의 일부는 다음과 같다.

> 실습지도 선생님께서 기하 판 위에서 정삼각형을 만드는 과제를 제시했는데, 아무도 정삼각형을 만들지 못하자 **"밑변을 홀수로 만들고 밑변의 중심에서 밑변의 길이보다 하나 짧도록 높이를 올리면 된다."**[3]라고 설명하셨다. 초등학생 수준에 맞추려면 어쩔 수 없겠지만 그래도 학생들에게 어느 정도 그렇지 않음을 설명할 수 있지 않았을까 하는 아쉬움이 남는다.

S가 참관한 4학년 수학수업은 '변의 길이에 따른 삼각형의 분류'를 주제로 기하판 위에 직접 여러 가지 삼각형을 만들어보는 활동이었다. 이 과정에서 실습지도 교사는 정삼각형을 기하판 위에 만들어보는 과제를 제시하였는데, 아무도 정삼각형을 만들지 못하자 직접 '격자점 정삼각형 방법'을 제시한 것이다. 이 방법에 따라 만든 삼각형은 [그림 IV-1]과 같다. [그림 IV-1]에서 '밑변을 홀수로 만든다.'는 것은 밑변이 지나는 격자점의 개수가 홀수라는 뜻이다[4]. 이러한 경우 밑변의 길이는 항상 짝수이고 따라서 밑변의 중심에 항상 격자점이 존재하게 된다. 따라서 밑변의 중심에서 시작하여 밑변의 길이보다 하나 짧도록 높이를 올릴 수 있게 된다.

---

2) 좌표평면에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점을 모아 놓은 그래프. 초등학교 교과서에서는 기하 판, 점종이 등으로 표현하고, 여러 가지 다각형을 그리는 데 사용된다.
3) 이하에서는 논의의 편의를 위해 이 방법을 '격자점 정삼각형 방법'으로 표현하겠다.
4) 연구자는 '밑변을 홀수로 만든다.'의 의미를 이해하지 못하였고, 예비교사 S와의 대화를 통해 그 의도를 알 수 있었다.



[그림 IV-1] '격자점 정삼각형 방법'에 따른 도형

그러나 [그림 IV-1]은 정삼각형처럼 보이지만 정삼각형은 아니다. 예비교사 S가 비평문에서 '어느 정도 그렇지 않음을 설명할 수 있지 않았을까 하는 아쉬움'을 표현한 것으로 보아 연구자는 '격자점 정삼각형 방법'에 대한 S의 생각을 확인하기 위해 간단한 면담을 진행하였다.

연구자 : 비평문을 보니까, 이 방법이 잘못되었다고 쓴 것 같은데, 그럼 이 방법으로는 어떠한 경우에도 정삼각형을 만들 수 없다는 뜻인가?

S : 제가 몇 가지 그려봤는데, 모두 정삼각형이 아니었어요. 그렇다고 이 방법으로는 정삼각형을 절대 그릴 수 없다고까지 말하기는 좀 그런데요.. 아닌가? 잘 모르겠어요..

연구자 : 이 방법으로 정삼각형을 그릴 수 있는 경우도 있을 것 같아서 그래?

S : 느낌상으론 정삼각형이 안 될 것 같지만.. 그걸 확실하게 증명한 건 아니라서요.

연구자 : 그럼 학생들에게 기하판 위에 정삼각형을 그리라는 숙제3를 내주는 건 어떻게 생각해? 아예 불가능한 잘못된 숙제인가? 아니면 가능한데 찾기 어려운 숙제인 건가?

S : 확신은 없어요. 일단 제가 답을 모르니까 숙제로는 안 낼 것 같아요.

연구자 : 일단 이 방법은 문제가 있어 보이니까 제외하고, 기하 판 위에서 정삼각형을 만드는 다른 방법이 있을까?

S : 아마 없을 것 같은데. 그렇다고 없는 것도 이상하고.

S는 [그림 IV-1]이 정삼각형이 아닌 이유를 설명하기 위해, 피타고라스 정리를 사용하여 각 변의 길이를 비교하였다. 그러나 '격자점 정삼각형 방법'으로 만들 수 있는 일반적인 삼각형 전체에 대해선 그것이 정삼각형이 될 수 없음을 설명하지는 못했다. S가 해결해야 하는 문제는 두 가지였다. 첫째, '격자점 정삼각형 방법'으로 격자점 위에서 정삼각형을 만들 수 있는가? 둘째, 이 문제를 일반화해서, 격자점 위의 점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 존재하는가? 이러한 질문은 수학적 과제의 형태를 하고 있지만, 정삼각형을 지도하는데 기하 판이 적절한 교구인가라는 교수학적 이슈와도 관계가 있다. 따라서 본 연구자는 S와의 면담을 토대로 '격자점 위의 점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 존재하는가? 즉, 정삼각형을 지도하는 데 기하 판을 사용하는 것이 적절한가?'라는 '격자점 정삼각형 만들기' 과제를 개발할 수 있었다.

2. '격자점 정삼각형 방법'은 옳은 것인가?

비평문의 사례를 제시하고 '격자점 정삼각형 방법'이 옳은지를 질문하였다. 처음부터 '격자점 위의 점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 존재하는가?'라는 일반적인 질문은 예비교사의 즉각적인 수학적 반응을 유도하기가 쉽지 않다고 판단했다. 실제 수업 사례에 나타난 '격자점 정삼각형 방법'의 적절성에 대한 질문이 예비교사들의 흥미와 참여를 자극하기에 적절할 것으로 보았다. 실제로, 예비교사들은 '격자점 정삼각형 방법'에 따라 삼각형을 쉽게 만들었고 그렇게 만든 삼각형이 정삼각형이 아니라는 사실을 피타고라스 정리를 통해 쉽게 확인할 수 있었다. 즉, 예비교사의 수준에서 쉽게 확인할 수 있는 수학적 활동과 관련된 질문으로 과제를 시작하였다. 앞서 S와의 개인면담에서 보았듯이, 예비교사 대

부분은 몇 가지 삼각형을 만들어서 확인하는 방식으로 '격자점 정삼각형 방법'으로는 정삼각형을 만들 수 없음을 예상하였다. 그러나 일반화시키는 데 어려움을 겪고 있었기 때문에, 연구자가 개입하였다.

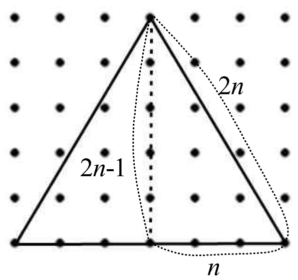
연구자 : '격자점 정삼각형 방법'이 적절하지 않다는 것을 하나씩 확인하지 않고 모든 경우를 확인할 방법은 없을까?

T1 : 밑변의 길이가 짝수인 삼각형에만 적용되는 방법이니까 밑변의 길이를 2n으로 놓으면, 높이는 2n-1이고, 이게 정삼각형이 되려면 $n^2+(2n-1)^2=(2n)^2$ 을 만족해야 하고, 그래서 풀어보니까 $n=2\pm\sqrt{3}$ 이 나왔거든요([그림 IV-2] 참고). 근데 원래 n은 자연수였는데, 지금 무리수가 나왔으니까 모순이고 그래서 이 방법으로는 정삼각형을 만들 수 없는 게 증명된 것 같아요.

T2 : n 값이 존재하잖아. 그럼 가능한 것 아닌가? n이 꼭 자연수여야 해?

T1 : 왜냐하면 격자점 사이의 거리가 1씩 이니까 n은 자연수인거지.

T2 : 격자점 사이 거리가 꼭 1이라는 보장이 어디 있어? 그 거리가 $2-\sqrt{3}$ 일수도 있잖아. 그렇게 생긴 격자점이면 정삼각형 그릴 수 있는 것 아닌가? 네가 푼 식으로 보면, 밑변의 길이가 $2(2-\sqrt{3})$이고, 높이가 $2(2-\sqrt{3})-1$가 되면 세 변의 길이가 모두 같은 정삼각형이 되는데[5].



[그림 IV-2]

이 대화에서 T1은 바로 답을 하지 못했고, 다른 예비교사들도 두 사람의 주장 가운데 어느 것이 옳은지 쉽게 판단하지 못했다. 사실 T1의 설명은 적절하다. T1이 밑변의 길이를 2n으로 할 때의 n의 의미는 격자점 사이의 거리가 아니라 격자점의 개수를 말한다. 따라서 항상 n은 자연수이다. 이러한 상황에서 정삼각형이 되기 위해 만족해야 하는 조건 즉, $n^2+(2n-1)^2=(2n)^2$을 만족하는 자연수 n이 존재하지 않는 것이 증명된 것이다. T2는 n의 의미를 격자점 사이의 거리로 잘못 해석했고 T1은 이를 지적하지 못하고 있었다. 이 때 T3의 새로운 설명이 돌파구를 마련했다.

T3 : 정삼각형이 되려면 $1:2:\sqrt{3}$ 을 만족해야 하잖아. 즉, 밑변의 길이가 2n이면, 밑변의 절반이 n이고 따라서 높이는 $\sqrt{3}n$. 여기 밑변의 양 꼭짓점 사이에 2n개의 공간이 있는 거잖아. 그리고 높이를 이루는 양 꼭짓점 사이에도 2n-1 개의 공간이 있는거고. 근데 정삼각형이 되려면 그 높이가 $\sqrt{3}n$이 되어야 하는데, 이건 말이 안 되잖아. 2n-1개는 자연수인데 $\sqrt{3}n$은 자연수가 아니지. 그러니까 이 방법으론 정삼각형을 못 만들어.

T1 : 그렇네. 격자점 사이 거리는 중요하지 않아. 내가 설명한 n도 격자점의 개수를 말한 거였어. 격자점 사이 거리가 뭐든 상관없겠네. 예를 들어 격자점 사이 거리를 k라고 하면, 아까 내가 쓴 식을 $(nk)^2+((2n-1)k)^2=(2nk)^2$라고 쓸 수 있고, 어차피 계산할 때 k는 다 사라지잖아.

예비교사들은 정삼각형에서 밑변의 길이와 높이 사이의 관계 즉, 높이가 밑변의 길이의 절반에 $\sqrt{3}$배가 된다는 사실에 초점을 맞추면서 '격자점 정삼각형 방법'이 잘못되었다는 점에 확신

5) $n=2-\sqrt{3}$ 이 $n^2+(2n-1)^2=(2n)^2$을 만족한다는 의미이다.

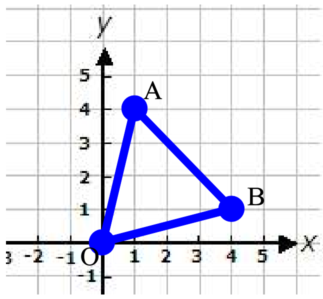
을 갖기 시작했다. 왜냐하면 높이 역시 격자점을 양 끝점으로 하고 있으므로 그 사이에 있는 격자점의 개수가 무리수라는 것은 불가능하기 때문이다. 그 동안 예비교사들이 정삼각형의 세 변의 길이에만 초점을 두고 생각하다고 높이와 밑변 사이의 비가 무리수 비율이라는 점을 생각하면서 '격자점 정삼각형 방법'의 오류를 비교적 쉽게 이해할 수 있었다.

예비교사들은 '격자점 정삼각형 방법'으로는 어떠한 경우에도 정삼각형을 만들 수 없다는 사실을 이해한 다음에, 자연스럽게 두 가지 의문을 제기하였다. 하나는 '격자점 정삼각형 방법'을 가르친 교사는 오류가 있다는 사실을 몰랐을까? 아니면 알면서도 일부러 그런 것일까? 그리고 다른 하나는 그 교사는 이러한 방법을 어디서 배운 것인가? 정삼각형을 만드는 옳은 방법이 원래 존재하는데 그것을 잘못 기억한 것이 아닐까? 전자의 질문은 해당 교사의 의도를 확인할 방법이 없었기 때문에 몇 가지 추측을 논의하는 것으로 마무리하였다. 반면에 후자의 질문은 자연스럽게 본 연구자가 의도했던 일반화된 질문 즉, 격자점 위에서 정삼각형을 만드는 방법이 존재하는가에 대한 수학적 탐구로 이어졌다.

3. 격자점 위에서 정삼각형을 만들 수 있는가?

'격자점 정삼각형 방법'으로 정삼각형을 만들 수 없다는 것이 증명되었지만, 이러한 사실로부터 격자점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형을 만드는 방법이 없다고 단정할 수는 없다. 교수학적 관점에서 보면, 지금까지 확인한 사실은 기하판 위에서 정삼각형을 만드는 방법으로서 '격자점 정삼각형 방법'을 가르치는 것은 잘못되었다는 것이다. 지금부터는 기하판 위에서 정삼각형을 만드는 활동이 불가능한 것인가를 탐구하는 것이다.

'격자점 정삼각형 방법' 문제와 달리 이 문제에 대해선 예비교사들이 쉽게 접근하지 못했는데, 이는 '기하 판 위에서 정삼각형을 만드는 활동'이 조작적으로 정의되지 않았기 때문이었다. 한 예비교사가 좌표계 도입의 아이디어를 제안하면서부터 논의가 활기를 띠었다. 각 격자점의 좌표가 모두 정수가 되도록 하여, 삼각형의 세 변의 길이를 구해서 확인하는 방식으로 이 문제를 조작적으로 다룰 수 있게 되었다. 그러나 임의의 경우를 모두 확인해야 하므로 계산이 복잡했다. 이 때 임의의 삼각형이라도 한 꼭짓점을 원점으로 지정할 수 있고 이 경우 계산이 간편하다는 아이디어가 제안되었고 이를 통해 문제가 한층 명확해졌다. 삼각형 OAB에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 이고, A, B의 x, y좌표 모두 정수가 될 때, $\overline{AB}=\overline{OA}$가 가능한가?([그림 IV-3] 참고) 일종의 수평적 수학화가 이루어졌다고 볼 수 있다. 예비교사들은 '기하 판 위에서 정삼각형을 만드는 활동의 가능성' 문제를 '주어진 조건을 만족하는 $\overline{AB}=\overline{OA}$가 가능한가?'의 문제로 수학화 함으로서 자신들의 수학적 지식을 활용할 수 있었고 논의가 활발해 졌다.



[그림 IV-3]

U1 : 꼭짓점 A를 (a, b)로 놓고, B를 (b, a)로 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 가 되잖아. 이 때 $\overline{AB}$ 길이를 구하면, $\sqrt{(a-b)^2+(b-a)^2}$ 인데, 정삼각형 되려면 $\overline{AB}=\overline{OA}$가 되어야 하니까 이걸

식으로 쓰면 $\sqrt{(a-b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ 즉, $a^2+b^2-4ab=0$ 을 만족해야 해. 결국 이 문제는 $a^2+b^2-4ab=0$ 를 만족하는 정수 a, b가 존재하는가의 문제라고 생각해. 근데 여기서 잘 모르겠어. 2차 방정식도 아닌 것 같고. a, b를 어떻게 구해야 하는지 모르겠어.

U2 : $a^2+b^2-4ab=0$을 $(a-b)^2=2ab$ 로 표현하면 결국 $a-b=\sqrt{2ab}$ 를 만족하는 정수 a, b를 찾는 거네. 여기서 $a-b$는 정수니까 $\sqrt{2ab}$가 정수가 되는지 보면 되겠다. 이게 정수가 될 수 없으면 정삼각형을 만들 수 없다는 것이잖아.

U3 : a=4, b=2이면 $\sqrt{2ab}=4$로 정수야. 하지만 $a-b=2$라서 $a-b\neq\sqrt{2ab}$ 즉, 정삼각형은 아니야. $\sqrt{2ab}$만으론 의미가 없어. 결국 $a-b=\sqrt{2ab}$가 되는 정수가 있는지 없는지를 하나하나 확인해봐야 할 것 같아.

U1 : 근데, 지금 이걸 해결해도 끝이 아닌 것 같아. 내가 처음에 꼭짓점 A를 (a, b)로 놓고, B를 (b, a)로 놓고 했는데, 지금 보니까 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 경우가 다른 것도 있어. 예를 들어, A가 (3, 4) B가 (5, 0)일 때도 $\overline{OA}=\overline{OB}$이고 이런 경우는 더 있을 걸. 이런 경우는 지금 생각하는 $a-b=\sqrt{2ab}$ 하고는 상관없잖아.

예비교사들은 '$\overline{OA}=\overline{OB}$ 일 때, $\overline{AB}=\overline{OA}$가 가능한가?' 문제를 '$(a-b)^2=2ab$를 만족하는 정수 a,b가 존재하는가?'의 문제로 변형하여 해결하려고 했으나 성공하지는 못했다. 게다가 '$(a-b)^2=2ab$를 만족하는 정수 a,b가 존재하는가?[6)]'의 문제가 해결되더라도 원래의 문제에 대한 완벽한 풀이는 되지 않는다는 사실을 인식했다. 그러나 예비교사들은 이러한 과정을 통해 수학에서 문제가 어떻게 점점 구체화되고 변형되는지를 경험할 수 있었다. 추상적인 문제를 수학적 조작이 가능한 수학의 문제로 구체화하고 다시 기하 문제가 대수 문제로 변형되며 여러 가지 동치인 문제를 만들어보는 경험을 한 것이다. 주어진 문제를 해결하기 어려울 때, 그 문제와 같으면서 동시에 내가 풀 수 있는 형태로 문제를 변형하는 경험은 예비교사들에게 익숙하지 않았던 것이다. 예비교사들의 논의에 더 이상 진전이 없게 되어, 연구자가 개입하였다.

연구자 : 우리가 지금 세 변의 길이에만 초점을 두고 있는데, 정삼각형의 중요한 특징 중에 하나가 각이잖아. 각을 이용할 수는 없을까?

U4 : 정삼각형이면 $\overline{OA}$와 $\overline{OB}$ 가 이루는 각이 60도죠. $\overline{OA}=\overline{OB}$ 라면, $\overline{AB}=\overline{OA}$를 확인하지 않더라도 $\overline{OA}$와 $\overline{OB}$ 의 각이 60도가 되는지만 보면 되겠네요.

U5 : 그럼 아까처럼 꼭짓점 A를 (a, b)로 놓고, B를 (b, a)라 할 때 그 사잇각을 구해야 하는데, 그 각을 구할 수 있나? 근데 각을 구해도 끝은 아닌데, 아까 A, B가 꼭 그런 형태만 있는 건 아니라고 했으니까.

연구자 : 두 선분 사이의 각을 구하는 방법이 없을까?

U6 : 벡터 배울 때 각을 구했던 것 같아요. 두 벡터 내적하는 공식 보면 각이 나오잖아요.

벡터와 내적 개념이 언급되었을 때, 예비교사의 절반 정도는 그 의미를 알지 못했다. 고등학교 때 인문계열이었던 학생들은 벡터와 내적이 교육과정에 없었는데, 교육대학 신입생의 상당수는 인문계열이다. 그러나 벡터와 내적을 배운 적이 있었던 예비교사들 역시 정확한 공식은 기억하지 못했다. 그래서 연구자가 두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 공식을 소개하고 설명하였다. 즉, $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{ab+ba}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}$ 를

---

6) $a^2+b^2-4ab=0\Leftrightarrow a^2-4ab=-b^2$. 따라서 $a^2-4ab+4b^2=3b^2$이고, $(a-2b)^2=3b^2$. 그러므로 $a=2b\pm\sqrt{3}\,b$ 이다. 따라서 정수해는 $a=0,\ b=0$ 뿐이다.

이용하면 $\overline{OA}$ 와 $\overline{OB}$ 사이의 각이 60도인지 확인할 수 있다. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{ab+ba}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}$ 을 전개하면 $a^2+b^2=4ab$가 된다. 이는 앞서 U1이 찾아냈던 식과 동일하다. 예비교사들은 놀라움과 동시에 실망감을 표현하였다. 변의 길이를 이용해서 나온 식과 각을 이용하여 구한 식이 동일하다는 것에서 놀라움을 표현했고 동시에 이미 그 식에 대해선 답을 찾을 길이 없다는 점에서 실망감을 표현한 것이다. 이 때 한 예비교사가 회전변환 개념을 언급하였다.

U7 : 회전변환도 있었어요. 어떤 점을 60도 만큼 회전했을 때 어떻게 변하는지 구하는 공식이 있잖아요. 정확한 공식은 기억나지 않지만 그걸 이용하면 점의 좌표를 찾을 수 있어요.

연구자 : (회전변환에 대해 설명한 뒤)

$$\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\end{pmatrix}$$

이니까 점(a, b)를 60도 회전한 좌표는 $(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b)$이지. 그럼 이제 문제를 해결할 수 있는 건가?

U7 : 삼각형 OAB에서 B 좌표가 이렇다면, 둘 사이의 거리를 구해서 하면... (잠시 계산을 시도한 뒤) 너무 복잡한데요.

U8 : 거리 구하지 않아도 되겠네. (a, b)가 정수 좌표였으니까 $(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b)$도 정수가 되어야 하잖아. 회전변환해도 그 길이는 같은 거죠?

연구자 : 회전변환은 각만 변화시키지 그러니까 $\overline{OA}=\overline{OB}$

U8 : $\overline{OA}=\overline{OB}$는 확인된 거고 지금 $\overline{OA}$ 와 $\overline{OB}$ 가 이루는 각은 60도인 거고. 그렇지? 그럼 이렇게 만든 OAB는 정삼각형이네. 그러니까 B 좌표 $(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b)$가 모두 정수인지만 확인하면 되는거네. $\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b$, $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b$ 각각 정수가 될 수 있느냐? 그래야 삼각형 OAB의 모든 꼭짓점이 격자점 위에 있는 거지.

a, b가 정수일 때, $\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b$ 과 $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b$는 정수가 될 수 없다[7]. 무리수 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 때문에 정수가 될 수 없는 것이다. 앞서 '격자점 정삼각형 방법'의 불가능성을 증명하는 과정에서 밑변과 높이의 비 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이 결정적인 역할을 한 것처럼, 이번 해결과정에서도 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이 불가능성을 설명하는 핵심이 되었다. 예비교사들 역시 이를 인식하고 놀라움을 표현하였다.

마침내 기하판 위에서 정삼각형을 만드는 것은 불가능함이 증명되었다. 즉, 정삼각형의 세 꼭짓점이 모두 정수 좌표가 될 수는 없다. 정삼각형의 두 점(예를 들어, 삼각형OAB에서 O와 A)이 모두 정수 좌표가 될 경우, A를 O를 중심으로 60도 회전한 점 B는 정수좌표가 될 수 없음을 증명했기 때문이다. 이러한 설명으로 수업을 마무리하려고 할 때, 한 예비교사가 새로운 아이디어를 제안하였다. 지난 수업에서 다루었던 Pick의 정리를 떠올렸던 것이다.

V1 : Pick의 정리로도 설명할 수 있을 것 같아요.

연구자 : 격자점을 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이를 구하는 공식이니까 관련이 있을 수 있겠네. 자세히 설명해볼래?

7) a=0, b=0 일 때를 제외해야 한다. 그러나 이 경우 OAB가 삼각형이 될 수 없으므로 본 문제 상황에서는 의미가 없다.

V1 : Pick의 정리 $S=\frac{1}{2}b-1+i$ 에서 b, i[8] 모두 격자점의 개수를 나타내니까 자연수죠. 그럼 다각형 넓이 S 역시 정수일 수밖에 없죠. 그런데 한 변의 길이가 a인 정삼각형 넓이 구하는 공식이 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이니까 a가 자연수일 때 이 넓이는 절대 정수가 될 수 없죠. 다시 말해, 정삼각형이 격자점의 꼭짓점으로 만들어진다면 Pick의 정리로 그 넓이를 구할 수 있을 것이고, 그럼 그 넓이는 언제나 자연수가 되어야 하죠. 그러나 정삼각형의 넓이 공식을 보면 절대 자연수가 될 수 없다. 그래서 모순이다.

V2 : 그렇구나. 훨씬 간단하게 증명되었네. 그럼 Pick의 정리가 완벽한 게 아니었네.

연구자 : 완벽하지 않다는 게 무슨 뜻이지?

V2 : 저는 Pick의 정리 배우면서 이제는 점의 개수만 세면 모든 넓이를 구할 수 있구나. 더 이상 가로, 세로 길이 구해서 곱할 필요가 없구나 생각했거든요. 근데 지금 V1 설명 들어보니까 정삼각형은 넓이를 못 구하네요. 아니 넓이가 무리수인 다각형은 못 구하잖아요. 넓이가 정수인 다각형만 구할 수 있는 거잖아요. 그래서 Pick의 정리가 완벽하다는 제 생각이 잘못된 것 같다는 뜻이에요. 하긴 Pick의 정리로 모든 넓이를 구할 수 있었다면 교과서에서 다른 넓이 구하는 공식을 가르칠 필요가 없었겠죠.

V1 : 그렇구나. 난 그것까진 생각 못했었는데..

‘격자점 정삼각형 만들기’ 과제를 설계할 때, Pick 정리를 이용한다는 생각은 연구자도 하지 못했었다. V1은 격자점을 매개로 Pick의 정리를 떠올리면서 본 과제와의 관련성을 찾았던 것이다. 또한 Pick의 정리를 통한 불가능성의 증명 과정 자체가 Pick의 정리의 의미를 반성하는 기회가 되었다. 예비교사들이 Pick의 정리를 발견하는 과정뿐만 아니라 그 결과의 유용성에 대해 깊은 인상을 받았었는데(이동환, 2013), 이번 기회를 통해 그들은 Pick의 정리로 넓이를 구할 수 없는 다각형이 존재한다는 사실 즉, Pick의 정리의 한계를 인식 할 수 있었다.

Ⅴ. 논 의

1. 무엇을 학습하였는가? : 수학적 정합성 (coherence)

본 연구에서 다룬 수학적 과제를 토대로 예비교사들은 기하 판을 사용하여 정삼각형을 가르치는 것은 불가능하다는 것을 알 수 있을 것이다. 또한 4학년 1학기 익힘책에서 정삼각형을 그려보는 활동지로 점 종이 대신 삼각형 모양의 판이 제시된 이유도 알 수 있을 것이다(교육부, 2014, p.73). 그러나 본 연구의 수학적 과제를 통해 예비교사에게 가르치고자 했던 것은 이러한 수학지식만이 아니다. 예비교사들이 수학적 과제를 해결하면서 논의했던 내용과 과제 해결 후 작성했던 수업일기를 통해 이들이 학습한 것은 수학의 본질과 수학 학습의 의미였다.

예비교사들은 ‘격자점 정삼각형 만들기’ 과제를 통해 수학적 개념들 간의 연결성을 경험할 수 있었다. 서로 별개로 인식하였던 수학적 개념들이 서로 연결되어 있고 이러한 관계가 서로 모순되지 않고 문제해결에 도움이 된다는 것을 인식하게 되었다.

도형 문제였는데 풀다 보니까 대수, 벡터 문제가 되는 것이 신기했다. 그리고 내적이나 회전변환이 정삼각형 문제를 해결하는 데 사용될

8) Pick의 정리는 격자점을 꼭짓점으로 하여 이루어진 다각형의 넓이를 계산하는 방법을 말한다. 다각형의 내부에 있는 격자점을 내부점이라 하고, 다각형의 변 위에 있는 격자점을 경계점이라고 할 때, 내부점의 개수(i)와 경계점의 개수(b)를 이용하여 그 넓이를 구할 수 있다(이동환, 2013).

> 것이라고 생각도 못했다. 이미 알고 있었던 내용이었는데 서로 결합해서 생각하니까 내가 모르던 내용이 되었다. 예전에 배웠던 내용들이 새로운 의미로 다가왔다(W1, 수업일기 중).

즉, 예비교사들은 수학적 정합성의 의미와 중요성을 인식하였다. 실제로 교사교육에서 수학적 과제를 통해 수학교사들이 학습하는 핵심적인 요소 가운데 하나가 수학이 단순한 사실과 절차의 결합이 아니라 서로 연결되어서 의미 있는 전체를 이룬다는 수학적 정합성이다(Zaslavsky, 2007).

> 교사의 개념적 구조가 서로 분리된 사실과 절차로 구성되어 있다면, 그러한 교사의 수업 역시 사실과 절차에만 초점을 맞추기 쉬울 것이다. 반면에, 교사의 개념적 구조가 수학적 아이디어의 망을 이루고 유연한 사고방식으로 구성되어 있다면, 그 교사는 이러한 구조를 학생에게도 가르치려는 노력을 기울일 것이다. 우리는 후자와 같은 수학적 이해가 학생의 수학에 대한 깊은 이해를 가능하게 하는 수업의 필요조건이 된다고 생각한다(Thompson et al, 2007, p.416).

수학적 아이디어나 개념들을 서로 연결하여 이해하고 있는 수학교사들은 학생들의 예상치 못한 질문이나 답변에 대해서도 가르치는 내용과 의미 있게 연결하여 풍부한 수학적 탐구로 이어갈 수 있다. 실제로 최근 수학교사에게 필요한 수학지식에 대한 연구에서 수학수업의 특징 가운데 하나로 우발성이 논의되고 있다. 수학수업은 본질적으로 예상치 못한 우발적 상황에 대처할 수밖에 없는데, 수학교사는 이러한 우발적인 상황에 대처할 수 있는 수학지식을 갖추어야 한다는 것이다(Rowland & Zazkis, 2013). 수학수업에서 발생하는 우발적인 문제는 그것이 무엇과 관련되어 있는지 어떻게 해결될지가 쉽게 떠오르지 않는다. 이 때 기존 수학내용과의 관련성이 없어 보인다는 이유로 탐구를 끝내면 학생에게 수학에 대한 편협한 관점을 심어주기 쉽고 또한 귀중한 수학적 탐구의 기회를 놓치는 것이다. 그러나 수학적 정합성을 경험한 수학교사는 수학적 탐구를 지속하는 위험을 감수할 것이다. 본 연구에서 Pick의 정리와 연결해서 과제를 생각한 V1의 사례로부터 우리는 예비교사들이 어떤 과제를 여러 가지 관점에서 보려는 태도를 확인할 수 있었다.

교사교육에서 수학적 과제의 역할에 대한 많은 선행연구들이 공통적으로 수학교사가 수학을 탐구하는 경험을 통해 수학교육 관련 이슈를 반성하게 된다는 것을 언급하였다. 본 연구 역시 예비교사들은 자신의 경험을 통해 수학수업에 대한 관점을 반성하게 되었다.

> 정답이 없는 수학문제처럼 보였다. 계속 문제만 생기고 이렇게 해도 되나 싶었는데, 여러 친구들 의견을 듣고 따라가다 보니 어느 순간 해결되었다. 수학수업이 이렇게 진행될 수도 있겠구나 라는 생각이 들었다. 이미 알고 있는 개념이라도 질문에 따라 모르는 게 많을 수도 있다고 생각한다. 특히, 여러 가지 개념과 공식들이 서로 연결되고 잘 맞아떨어지는 것이 신기했다. 한 차시 수업이 꼭 한 학기 수업내용을 다룬 것 같았다(W2, 수업일기 중).

W2에게 '격자점 정삼각형 만들기'는 Gadanidis & Namukasa(2009)가 언급한 '수학 치료' 역할을 했다고 볼 수 있다. 기존의 수학에 대한 관점에 충격을 주고 새로운 수학 수업의 가능성을 보게 한 것이다. 해당 과제를 탐구하면서 수학적 연결성을 경험하였고 수학적 개념과 아이디어들이 서로 연결되어 있고 그러한 연결이 수학적 문제해결에서 중요한 역할을 한다는 것을 인식한 교사는 자신의 수업에서 수학적 정합성을 고려할 것이다. 단순히 수학의 특징과 본성을 설명으로 이해한 교사와 직접 수학적 탐구를 통해 경험한

교사의 수업에는 차이가 있을 것이다.

2. 교사교육에 적합한 수학적 과제의 조건: 익숙함과 생소함의 균형

‘격자점 정삼각형 만들기’ 과제는 실제 수업사례로부터 개발되어 그 맥락은 교육적이지만 본질은 수학적 탐구에 있다. 교사교육에 적합한 수학적 과제 설계에서 가장 중요하게 고려해야할 사항은 수학과 교육의 적절한 균형을 맞추는 일이다. 본 연구에서는 수학적 과제에 담긴 익숙함과 생소함 사이의 균형을 통해 이를 달성하였다.

우선 과제의 맥락과 질문에 포함된 익숙함과 생소함의 균형이다. 예비교사들에게 ‘격자점 정삼각형 만들기’ 과제는 예비교사들에게 익숙한 맥락으로 제시되었다. 기하 판과 점 종이는 초등학교 수학교과서에서 활용되는 교구이고 따라서 과제에서 제시된 활동 역시 그들에게 익숙하게 다가올 것이다. 다른 한편으로, 기하 판은 여러 가지 도형을 구체적으로 만들어보는 효과적인 교구로 사용되는 상황에서, 격자점으로 만들 수 없는 도형이 있는가라는 질문은 예비교사에게 상당히 낯선 질문이다. 또한 이등변삼각형, 예각, 직각, 둔각 삼각형은 쉽게 만들어지는 상황에서 정삼각형을 만들 수 없을 것이라는 예상을 하기는 쉽지 않았을 것이다. 이러한 익숙한 상황에 대한 생소한 질문이 예비교사들에게 동기부여로서 작용했을 것이다.

> 기하 판으로 정삼각형을 만들 수 없다는 것이 신기했다. 아니 그런 질문을 떠올린 것이 더 신기하다. 초등학교 수학은 다 알고 있다고 생각했는데, 잘못인 것 같다. 당연하게 생각하고 있던 것 아니 질문할 생각조차 없던 것을 다시 볼 필요가 있다. 어찌보면 이런 자세가 수학에서 중요한 것 같다(W3, 수업일기 중).

Wu(2011)는 수학교사에게 적합한 수학적 과제의 특징으로 가르치는 내용과의 관련성을 제시했는데, 이는 과제의 소재나 맥락이 주는 익숙함에 해당한다고 볼 수 있다. 그리고 Gadanidis & Namukasa(2009)가 수학적 과제의 역할로 제시한 기존 관점을 뒤흔드는 충격은 익숙한 맥락에 대한 생소한 질문으로 인해 그 파괴력이 더 커질 수 있을 것이다. 또한 수학교사에 대처해야 할 우발적 상황의 본질은 익숙한 상황에 대한 생소한 질문에 있다고 볼 때, ‘격자점 정삼각형 만들기’ 과제에 담긴 맥락의 익숙함과 질문의 생소함은 교사교육에 적합한 수학적 과제를 설계할 때 중요하게 고려해할 요소라고 볼 수 있다.

과제를 해결하는 과정에서 예비교사가 다루게 되는 수학적 개념에 대한 익숙함과 생소함 역시 중요하게 고려해야 할 요소이다. ‘격자점 정삼각형 만들기’ 과제를 해결하는 데 사용된 정삼각형, 격자점, 방정식, 벡터의 내적, 회전 변환 등의 수학적 개념들은 예비교사들에게 익숙한 것이었지만 그러한 개념들 사이의 관계는 낯선 것이었다. 익숙한 개념으로 인해 예비교사들은 쉽게 수학적 과제에 참여할 수 있었고, 생소한 연결성을 경험하면서 수학적 탐구의 즐거움을 경험할 수 있었다. 이미 알고 있었던 수학적 지식이 서로 연결되어 문제해결에 활용되는 기쁨과 전혀 관련 없어 보이는 개념들 사이의 관계에서 비롯되는 놀라움이 예비교사들의 수학적 탐구를 지속시킬 수 있었다. 익숙한 개념이나 공식을 다른 개념이나 상황과 관련지어 생각하면서 기존의 개념에 대한 새로운 의미를 찾아낼 수 있었다. 예를 들어, Pick의 정리가 모든 다각형의 넓이를 구할 수 있는 보편적인 공식으로 생각했던 V2에게 ‘격자점 정삼각형 만들기’ 과제와의 연결은 Pick의 정리의 한계를 깨닫게 하였다. 또한 정삼각형 넓이를 구하는 공식 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 에 담긴

정삼각형 넓이가 무리수라는 의미를 재인식할 수 있었다.

> 수업할 때 몰랐는데, 지금 수업일기를 쓰면서 초등학교에서 정삼각형의 넓이를 구하는 문제는 낼 수 없을 것이라는 생각이 떠올랐어요. 그래서 문제집 찾아보니까 정말 그렇더라구요. 수업 시간에 한 친구가 말한 정삼각형 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이라는 공식은 저도 알고 있었는데, 이런 생각은 아직까지 한 번도 한 적이 없네요 (W4, 수업일기 중).

'격자점 정삼각형 만들기' 과제를 개발하고 실행하면서 연구자 역시 Pick의 정리나 정삼각형 넓이 등과 관련된 논의가 진행될 것으로 예상하지 못했다. 이미 익숙하여 더 이상 새로울 것이 없을 것으로 보이는 개념에 대해서도 생소한 질문이나 생소한 맥락과의 관계를 통해 새로운 의미를 찾아낼 수 있었다. 이러한 경험은 연구자에게도 수학적 정합성과 자유로운 수학적 탐구의 가치에 대해 다시 한 번 반성하는 계기가 되었다.

Ⅵ. 결 론

초등예비교사들 대부분은 이미 초등학교 수학 내용을 가르치기에 충분한 수학 지식을 갖추고 있다고 생각한다. 따라서 수학교육 강좌는 수학에 대한 내용보다는 수학학습심리 또는 수학교수법 위주로 진행되어야 한다고 생각하기 쉽다. 그러나 교사교육자의 입장에서 초등예비교사가 초등학교 수학교육과정을 지도하기에 충분한 수학지식을 갖추고 있다고 확신하기는 쉽지 않다. 예비교사와 교사교육자 사이의 이러한 인식의 차이는 수학지식에 대한 관점의 차이로 인한 것으로 보인다. 본 연구는 단순히 초등 수학교육과정에 대한 지식이 아니라 그것을 가르치는 교사의 입장에서 필요한 수학지식이 무엇이고 이를 어떻게 가르칠 것인가에 대한 문제의식에서 비롯되었다. 본 연구는 '격자점 정삼각형 만들기' 과제를 통해 초등예비교사에게 필요한 수학지식을 가르치는 방법의 한 가지 가능성을 제안한 것이다.

본 연구에서 초등예비교사들은 '격자점 정삼각형 만들기' 라는 수학적 과제를 해결하면서, 주어진 상황을 수학적 문제로 변환하고 기존 지식과의 연결을 통해 문제를 변형하고 해결하며, 기존의 수학적 개념을 새로운 관점에서 보는 경험을 할 수 있었다. 즉, 예비교사들은 직접 수학을 하면서 수학적 정합성의 의미와 중요성을 경험하고 그것의 수학교육적 함의를 학습할 수 있었다. 또한 교사교육자의 입장에서 교사교육에 적합한 수학적 과제를 설계하기 위해 고려해야 할 조건으로서 익숙함과 생소함의 균형에 대해 반성하는 계기가 되었다. 본 연구에서 확인하였듯이, 교사교육에서 수학적 과제는 교사에게 필요한 수학지식의 향상은 물론 수학교육과 관련된 주제를 다룰 수 있는 효과적인 맥락이 될 수 있다.

참고문헌

김진환, 박교식 (2008). 예비중등교사의 수학화 학습을 위한 교수단원의 설계: 분할모델과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계 탐구. **수학교육학연구, 18**(3), 373-389.

이동환 (2013). 초등 예비교사교육에서 Lakatos 방법론의 적용과 효과. **수학교육학연구, 23**(4), 555- 568.

이지현 (2015). 유리수와 무리수의 합집합을 넘어서: 실수가 자명한다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있는가? **수학교육학연구. 25**(3). 263-279.

Clarke, B, Grevholm, B, & Millman, R. (2009). *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, use and exemplars*. New York: Springer.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). Young mathematicians at work. Constructing multiplication and division. Portsmouth, NH: Heinemann.

Gadanidis, G. & Namukasa, I. (2009). Teacher Tasks for Mathematical Insight and Reorganization of What it Means to Learn Mathematics. In B. Clarke, B. Grevholm, and R.Millman (eds.), Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars, *Mathematics Teacher Education 4*.

Leikin & Zazkis (2010) Teachers' Opportunities to Learn Mathematics Through Teaching. In R. Leikin, R. Zazkis (eds.), *Learning Through Teaching Mathematics* (pp. 3-21). NY: Springer

Liljedahl, P., Chernoff. E., & Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education. 10*(4-6), 239-249.

McGowen, M. A., & Davis, G. E. (2001). What mathematics knowledge do preservice elementary teachers value and remember? In R. Speiser, C. A. Maher,&C. N.Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting, North American Chapter of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 875-884). Snowbird, Utah.

Rowland, T. & Zazkis, R. (2013) Contingency in the mathematics classroom: Opportunities taken and opportunities missed. Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education 13*(2), pp. 137-153.

Steele, M. D., & Hillen, A. F. (2012). Content-focused methods courses: Integrating pedagogy and mathematical content that is central to the 7-12 curriculum. *Mathematics Teacher Educator, 1*, 52-69.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2010). Mathematics for teaching: A form of applied mathematics. *Teaching and Teacher Education, 26*, 161-172.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 415-432.

Yackel, Underwood, Elias, (2007). Mathematical Tasks Designed to Foster a Reconceptualized View of Early Arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6) p351-367.

Watson, A. & Mason, J. (2007) Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education 10* (205-215).

Wu, H. (2011). The Mis-Education of Mathematics Teachers. *Notices of the AMS, 58*(3), 372-384.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related tasks, teacher education, and teacher educators. Journal of Mathematics *Teacher Education, 10*(4), 433-440.

Developing Mathematical Task for Pre-Service Primary Teachers: Equilateral Triangle on Dotty Grids

Lee, Dong-Hwan (Busan National University of Education)

This study explore the features of mathematical tasks as an effective means to foster pre-service primary teachers' mathematical knowledge for teaching and develop mathematical task for pre-service primary teachers. As a result, prospective teachers have while solving a mathematical task, converting a given situation to a mathematical problem, and solve problems through connections with existing knowledge, and experience seeing the existing mathematical concepts from a new perspective. Finally, we discussed the conditions for a suitable mathematical task in teacher education.

* Key Words : pre-service primary teacher education(초등예비교사교육), equilateral triangle on dotty grid(격자점 위의 정삼각형), teacher learning(교사학습), mathematical knowledge for teaching(수학수업에 필요한 지식)

논문접수 : 2015. 10. 12
논문수정 : 2015. 11. 12
심사완료 : 2015. 11. 13