

개별요소해석법을 이용한 지오그리드 격자 크기와 도상자갈재료 입도분포 상관관계 평가

피지현* · 오정호**

Pi, Ji-Hyun*, Oh, Jeongho**

Evaluation of the Relationship between Geogrid Rib Size and Particle Size Distribution of Ballast Materials using Discrete Element Method

ABSTRACT

This study evaluated the shear behavior of geogrid reinforced ballast material using a large scale direct shear test and discrete element method (DEM) based on PFC 3D program. The direct shear test was conducted on ballast materials that have different particle size distributions. Whereas the test results revealed that the shear strength generally increased with the larger particle size of ballast material without geogrid reinforcement, the shear behavior of ballast material was found to change pertaining to the relationship between particle size distribution and geogrid rib size. Generally, it is deemed the effectiveness of reinforcement can be achieved when the rib size is two times greater than average particle size. A numerical analysis based on DEM was conducted to verify the test results. The geogrid modeling was successfully completed by calibration process along with sensitivity analysis to have actual tensile strength provided by manufacturer. With a given geogrid model, the parametric evaluation was further carried out to examine the interactive behavior between geogrid and ballast material. Consequently, it was found that the effectiveness zone of geogrid reinforcement generated within a specific depth.

Key words : Geogrid, Direct shear test, Particle size distribution, Discrete element method

초 록

본 연구에서는 지오그리드로 보강된 자갈도상재료들의 전단거동을 대형직접전단시험과 개별요소법을 기반으로 한 PFC 3D프로그램을 사용하여 검토하였다. 직접전단시험은 각기 다른 입도분포를 갖는 자갈도상에 대해 실험을 수행 하였다. 실험 결과, 지오그리드로 보강되지 않은 경우 입경이 큰 입자가 많은 입도분포를 갖는 재료의 전단강도가 증가함을 확인한 반면, 지오그리드로 보강된 경우에는 전단강도 변화가 지오그리드 입자 크기와 입도분포에 따라서 증가 혹은 감소하는 경향을 보였다. 개별요소수치해석을 통해서 실험 결과를 검증하고자 하였으며 이를 위해서 실제 사용된 지오그리드 인장강도를 갖도록 미시 물성치를 민감도 분석을 통해 확보 하였으며, 각기 다른 격자 크기를 가진 지오그리드에 동일하게 적용하여 도상재료 입도분포에 따른 상관관계를 비교하여 보았다. 해석결과 입도분포에 따라 적합한 보강효과를 보이기 위해서는 그에 적합한 지오그리드의 격자크기가 형성됨을 확인하였으며, 평균입자크기에 비해 최소 2배 이상의 격자크기가 확보되어야 하는 것으로 확인하였다. 지오그리드의 영향범위가 일정한 깊이 내에 형성되는 것을 확인하였다.

검색어 : 지오그리드, 직접 전단 실험, 입도 분포도, 개별 요소법

* 철도기술연구원 연구원 (Korea Railroad Research Institute · esc123@krii.re.kr)

** 정희원 · 교신저자 · 한국교통대학교 철도시설공학과 조교수 (Corresponding Author · Korea National University of Transportation · j-oh@ut.ac.kr)

Received September 30, 2015/ revised December 2, 2015/ accepted December 18, 2015

1. 서론

최근 콘크리트 도상을 이용한 고속철도 시공이 활발히 진행되고 있음에도 불구하고 자갈도상 재료는 기존 일반철도 및 고속철도 구간에 광범위하게 사용되어 왔다. 자갈도상은 열차 하중에 대한 회복탄성거동을 유발하여 궤도하부로의 하중전이를 용이하게 하는 역할을 한다. 하지만, 반복되는 열차하중에 의해서 자갈도상이 미세 입자로 파쇄될 경우 우수침투등과 동반하여 침목하부에 분니 현상을 유발함으로써 잦은 유지보수 작업을 요구하게 된다. 국내에서는 고속철도 자갈도상 보강을 위해 주로 자갈 치환 및 다짐 후 도상안정제를 포설하여 안정화를 확보하고 있는 실정이나, 최근 다양한 소재로 제작된 토목섬유를 이용하여 자갈도상을 보강하고자 하는 연구가 진행되어 왔으며 보강효과를 반복재하시험, box test, 수치해석등을 이용하여 어느 정도 검증하였다(Mishura et al., 2013; Indraratna et al., 2005; Oh, 2013). 기존의 연구에서는 주로 반복 축방향으로의 거동에 대한 검토를 하였고, 주로 토목섬유의 보강 위치에 따르는 보강효과를 검증한 반면 본 연구에서는 지오그리드 보강 시 다양한 입도분포를 가지는 자갈도상의 전단변형에 대한 영향을 보고자하며, 이를 개별요소해석을 이용한 수치해석을 통해서 검증해보고자 한다.

2. 시험재료 및 방법

2.1 자갈도상 재료

대형직접전단 시험기를 이용한 전단시험에 사용한 자갈도상 재료의 입도분포는 Fig. 1과 같으며, 최대 입경크기는 62 mm, 입도균등계수 Cu (Coefficient of Uniformity)는 1.71, 입도곡률계수 Cc (Coefficient of Gradation)는 0.96로 산정되어 통일분류법에 의하여 입도분포가 불량한 자갈 GP (Poorly Graded Gravel)로 분류되었다. 평균입경크기 D_{50} 은 약 27 mm로 본 시험에서는 25 mm 입경크기를 기준으로 하여 G-1 재료는 25 mm 이상 그리고 G-2재료는 25 mm 이하의 재료로 입도 조정하였으며, G-3 재료는 원래 입도분포를 갖는 상태로 시험을 각각 수행하였다.



Fig. 1. Particle Size Distribution Curve of Ballast Material Tested

2.2 지오그리드

본 논문에 사용된 지오그리드로는 폴리프로필렌 재질의 3축형상인 Tensar TX 160 지오그리드를 사용하였다. 지오그리드의 기본 물성치는 아래 Table 1과 같다.

2.3 직접전단시험기 및 실험 구성

2.3.1 실험기 제원

대형 직접전단 시험기의 박스 규격은 길이가 30 cm, 폭 30 cm이며, 높이가 20 cm이다. 시료 조성 및 설치 후 수평하중을 가하여 작용되는 수평력을 측정하는 하중계 프레임 방식으로 수평력은 최대용량이 5 ton이고, 최대 수직하중은 10 ton이다. 수직 및 수평 변위량과 하중을 측정하기 위한 변위 측정계와 로드셀은 수직 및 수평측에 설치되어 10-7 mm단위로 자동으로 저장되며, 전단속도는 1~40 mm/min 범위로 조절 가능하다.

2.3.2 직접전단시험 방법

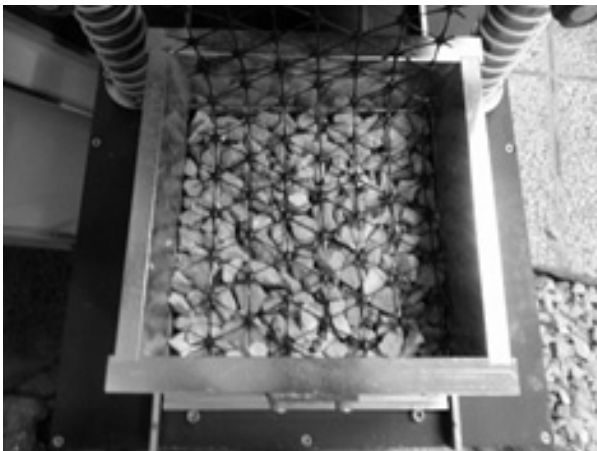
시험기 박스 내부에 Fig. 2(a)와 같이 3 종류(G-1~3)재료를 각각 구성하고 지오그리드 무보강시 재료 자체의 전단응력을 우선적으로 측정하였다. 입도분포가 다른 자갈도상 재료에 대한 비교를 하기 위해서, 시료 준비 시 최대한 동일한 밀도를 갖도록 하였으며 세 시료 평균 밀도는 상하부 박스 각각 1800 kg/m³로 산정하였다.

Table 1. Material Properties of Geogrid Used

TX 160 Geogrid	Unit	Longitudinal	Diagonal	Transverse	General
Rib pitch	mm	40	40		
Mid-rib depth	mm		1.8	1.5	
Mid-rib width	mm		1.1	1.3	
Nodal thickness	mm				3.1
Junction efficiency	%				93
Radial stiffness at low strain	kN/m*0.5% strain				300



(a) Single Specimen(G-1, G-2, G-3)



(b) Single Specimen(G-1, G-2, G-3) + Geogrid

Fig. 2. Sample Preparation

전단응력이 발생하는 경계면에 지오그리드를 설치하고(Fig. 2(b) 참조) 전단응력을 측정하였다.

수직하중은 500 kg, 1000 kg, 1500 kg을 적용하였으며 수직하중과 수평하중의 측정은 각각 하중장치에 설치된 로드셀에 의해 일정한 시간간격으로 자동으로 측정되며, 수직과 수평 변위량도 자동으로 측정된다. 전단속도는 5 mm/min의 속도로 설정하였다.

3. 실험 결과

3.1 보강 전 실험결과

자갈도상 재료인 G-1~3 단일재료로 각각 구성하여 지오그리드 보강 전 최대 전단강도를 비교하여 보았다. Fig. 3은 G-1의 실험 결과를 보여주고 있으며 수직하중의 증가에 따라서 전단강도가 증가되는 것을 확인 하였으며 각 입도 구분에 따른 전단강도 시험 결과는 Table 2와 같다. 그래프 상에 불규칙한 데이터들은 자갈

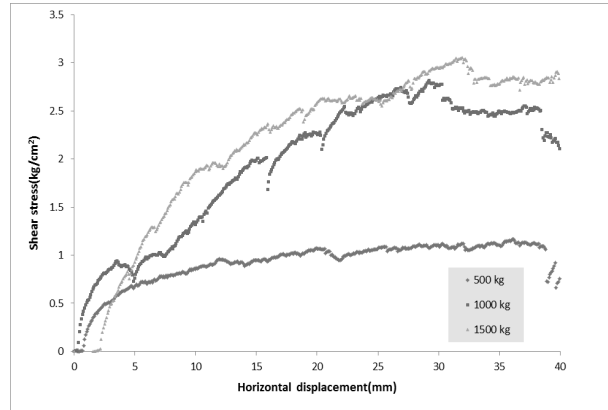


Fig. 3. Test Results of G-1 Sample without Geogrid

Table 2. Results of Direct Shear Test without Geogrid

ID	Particle size range (mm)	Average maximum shear strength (kg/cm ²)	Cohesion (kg/cm ²)	Friction angle (degree)
G-1	25~62	2.344	0.426	48.9
G-2	0.075~25	1.743	0.404	50.4
G-3	0.075~62	2.102	0.724	51.1

특성상 전단면이 고르지 못함에 따라서 전단력에 대한 입자 재배열에 기인하는 것으로 판단된다. 실험 결과에서 볼 수 있듯이, 입도 크기가 큰 입자의 함유량이 클수록, 전단응력과 수평하중이 높은 것으로 나타났다. 이는 입경이 작은 재료들의 전단거동에 미치는 영향을 보여주는 것으로써, 이는 현장에서 자갈도상재료의 마모에 의해 세립자가 형성되어 발생하는 분니현상에 대한 원인과 유사한 것으로 판단된다.

3.2 보강 후 실험결과

단일재료에 지오그리드를 보강 후 동일한 전단실험을 실행하였다. 실험결과는 Table 3에서 볼 수 있듯이, 무보강 재료의 측정결과와 같이 가장 큰 입도분포를 갖는 G-1 재료가 가장 큰 평균전단응력 값이 측정되었다. 보강 전후의 측정값 비교에 의하면 G-1 및 G-3의 측정값은 각각 13, 18% 감소한 반면, G-2의 측정값은 5% 증가한 것으로 나타났다. Fig. 4는 G-2 재료의 수직하중 1000 kg에서의 보강 전후의 수평변위에 대한 전단응력의 변이 추세를 보여주고 있으며 전반적으로 동일한 수평변위 발생 시, 보강한 경우 큰 전단응력을 보여주는 것을 확인 하였다. 이는 도로 하부구조와 달리 구속력이 작은 철도 자갈 도상층의 열차하중에 대한 전단 저항성이 증가하는 것으로 판단되며, 이는 자갈도상의 유지보수 주기를 늘릴 수 있는 요인으로 판단된다.

이는 지오그리드와 주변 재료간의 상호작용은 지오그리드 격자

Table 3. Results of Direct Shear Test with Geogrid

ID	Particle size range (mm)	Average maximum shear strength (kg/cm ²)	Cohesion (kg/cm ²)	Friction angle (degree)
G-1	25~62	2.031	0.25	57.3
G-2	0.075~25	1.824	0.40	50.0
G-3	0.075-62	1.623	0.81	52.8

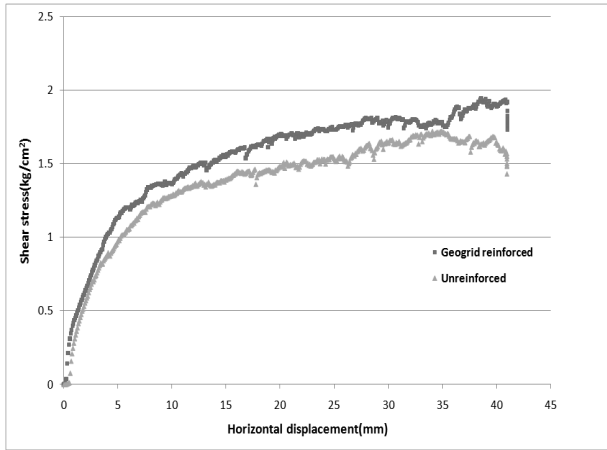


Fig. 4. Comparison of Geogrid Effect on Shear Stress for G-2 Sample

크기 및 물성과 대상재료의 입도분포나 입자모양등의 복합적인 영향을 받는 것으로 판단된다. 또한, 국내 자갈도상의 입도 분포를 고려하였을 때(본 논문에서는 G-3 재료가 해당됨), 지오그리드의 격자 크기가 상향 조정된 재료가 적합할 것으로 판단되며 추후 연구를 통해서 검증하고자 한다.

4. 수치 해석

본 논문에서 수행한 개별요소법의 해석은 PFC 3D (Itasca, 2003) 라는 프로그램을 사용하여 모델의 시편을 모두 각각의 공(ball)의 형태로 구성하여 각 공의 접촉점에서 발생하는 힘과 변위의 관계식에 의해 각 접촉점의 접촉력을 해석 하고 운동방정식을 적용하여 외력, 모멘트, 속도, 위치 등을 시간 단계마다 반복하여 해석하는 방식이다. 또한 해석대상의 초기 간극률 및 특정 입도분포를 모델링 하기 위하여 각각의 공은 입력되는 입도분포 범위 대해 균등분포 또는 정규분포의 형태로 생성될 수 있으며, 그 요소의 개수 및 입경의 조정 등이 필요하게 된다. 개별요소법에는 크게 3가지 접촉 모델이 있으며, 크게 강성모델(stiffness model), 미끄럼 모델(slip model), 접착모델(bonding model)로 구분된다. 강성모델은 개별 요소 간 혹은 개별요소와 경계면 간의 접촉점에서의 접점력과

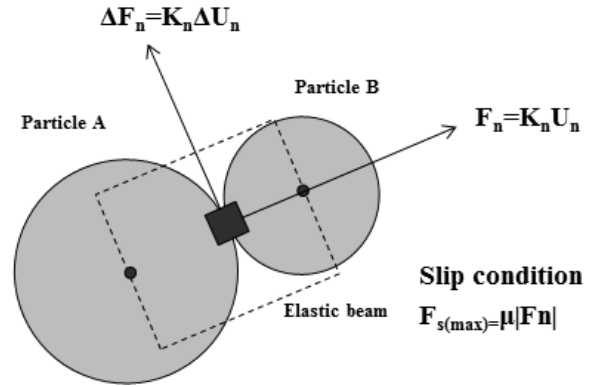


Fig. 5. Conceptual Illustration on Contact-Stiffness Model (Pi, 2015)

상대 변위간의 탄성적 상관관계를 모델링 하며 이는 연직강성과 전단강성에 의한 하중-상대변위 거동을 표현한다. 미끄럼 모델은 개별요소들 간의 미끄러짐을 형상화하는 모델로서, 접촉면에 별도의 접착 조건이 부여되지 않아 인장력에 의한 입자간의 분리 현상을 표현한다. 이는 접점력의 전단성분이 허용 전단력을 초과할 때 발생하게 되는 원리를 따른다. 접촉모델은 개별요소 접점에 작용하는 인장, 압축, 전단력, 모멘트에 대한 저항강도를 제공하는 것으로 주로 암석과 같은 취성재료의 모델링에 적합하다(Itasca, 2003). Fig. 5는 접촉강성모델의 기본 개념을 보여주는 것으로 수직 및 전단방향으로의 강성계수(k)에 의해 입자간 거동이 묘사됨을 보여 준다.

4.1 지오그리드 형상 모형화

개별요소해석의 모델의 해석은 초기의 입자 크기와 분포, 배열행태 등과 상관관계가 있으나 실제 실내실험의 초기 입자들의 분포와 일치한다는 것은 사실상 불가능 하므로 실내실험의 거동현상과 개별요소해석의 임의 미시 물성치에 대한 해석 결과를 비교하여 미시 물성치를 보정해 실내실험의 거동과 가장 잘 일치하는 보정된 미시 물성치를 산정해 가는 일련의 반복 수행을 해야 한다. 이와같이 보정된 미시 물성치를 사용하여 다양한 하중조건 및 변형조건 등의 개별요소해석을 수행 할 수 있고, 이 결과는 해석대상의 전체적 물리 거동예측으로 인정될 수 있다(Potyondy and Cundall, 2004).

본 연구에 모형화 된 지오그리드는 3축 현상인 Tensar TX 160 지오그리드의 기본 물성치를 기준으로 실제 제품과 유사한 크기로 두 노브 사이의 리브 길이는 40 mm로 모형화 하였다. 그리고, Fig. 6과 같이 하부 접점을 고정하고 상부를 인장하여 실제 지오그리드의 변형을 0.5%에서의 인장력 300 kN/m에 부합하는 보정된 미시물성치 값이 산정될 때 까지 해석을 반복수행 하였으며, Fig. 7에서 볼 수 있듯이, 반복 수행결과 미시 물성치 값 중

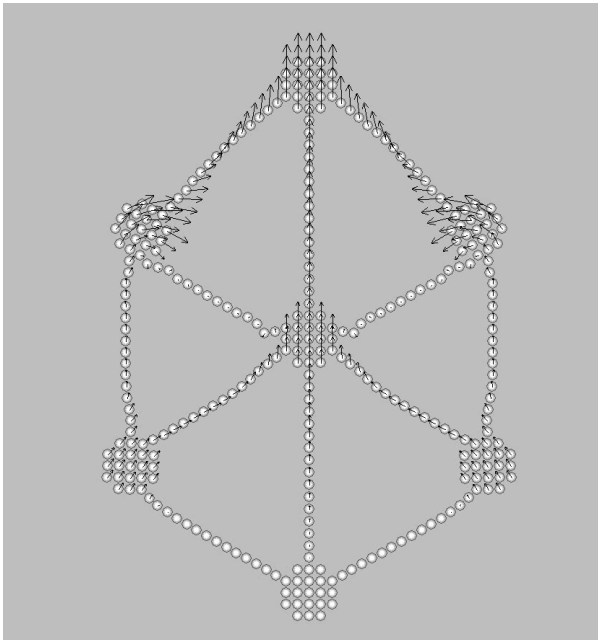


Fig. 6. PFC Modeling on Tensile Strength of Geogrid (Pi, 2015)

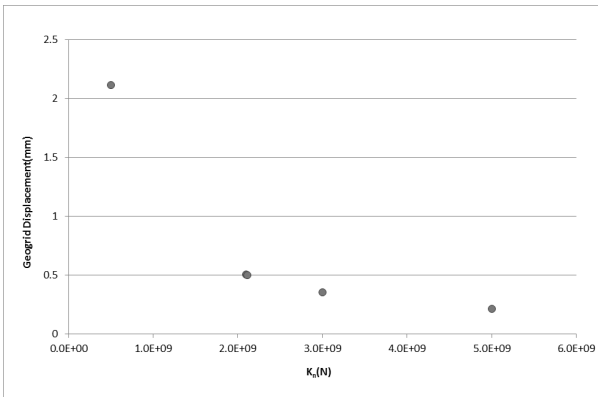


Fig. 7. Sensitivity of Geogrid Displacement on Kn (Pi, 2015)

Kn (수직강성도)에 대한 가장 민감한 반응을 보였다. Table 4와 같이 보정된 미시물성치를 산정할 수 있었다.

Table 4. Results of Calibrated Geogrid Properties

Properties	Kn	Ks	n bound (Contact bond normal strength)	s bond (Contact bond shear strength)
Calibration	2.11e9 N/m	5e5 N/m	8e5 N	8e5 N

Table 5. Results of Calibrated Ballast Material Properties

Properties	Kn	Ks	n bound (Contact bond normal strength)	s bond (Contact bond shear strength)
Calibration	1.3e6 N/m	0.5e4 N/m	1e2 N	1e2 N

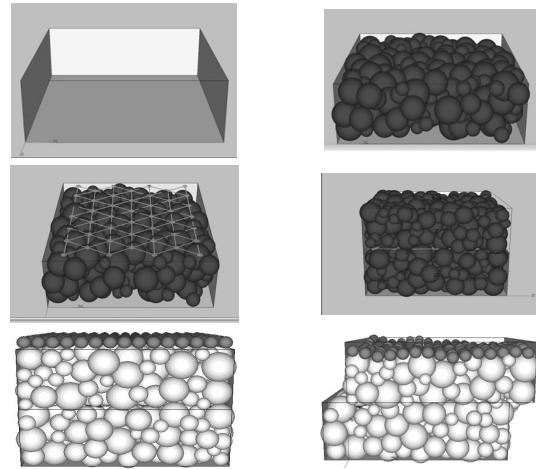


Fig. 8. Discrete Element Modeling (DEM) Process (Pi, 2015)

4.2 자갈도상재료 모형화

Fig. 8은 개별요소해석 단계를 보여주고 있다. 우선 하부박스를 모델링 한 후 입자 배열과 함께 앞서 개별적으로 구성된 지오그리드 모델을 적용 후, 상부박스와 입자 배열을 완성한다. 그리고, 재하판을 일정한 규격을 가지는 구체로 구성된 후 수직 및 전단력을 가하여 모델링을 수행하였다. 직접전단시험 모형화에 구현된 전단상자의 크기는 30 cm×30 cm×20 cm로 구현하였으며 도상재료의 입도분포는 40~25 mm와 25~10 mm 2종류의 분포를 가지도록 모형화 하여 입도분포에 따른 각각의 지오그리드 보강효과를 알아 보았다. 초기 물성치 입력은 기존 연구의 도상재료 입력값을 참고하여 수직강성(Kn)과 전단 강성(Ks)은 5.08e9 N/m로 설정하고, 전단상자 벽은 입자와 동일하게 설정하였다(Lu and McDowell, 2006). 또한 마찰력은 실제 전단 저항각과 유사하도록 재료 입자와 경계 모두 0.6으로 설정 하였으며(Kwan, 2006) 밀도는 2600 kg/m³으로 설정하였다(Itasca, 2003). 상재하중은 실내시험과 동일하게 직접하중 500 kg을 상재하중판을 통해 균일하게 적용하고, 수평변위가 10, 20, 30, 40 mm 발생 시 각각 전단응력을 산출하였다.

위 모델링 수행 전에 실내시험 결과와 비교하기 위하여 지오그리드 모델링에서 실시했던 것과 유사하게 미시물성치를 보정하였으며 Table 5와 같은 보정물성치를 산출하였다. 이 때, 지오그리드

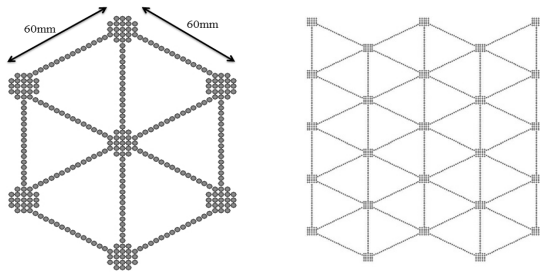


Fig. 9. Geogrid Modelling with 60 mm Rib Size

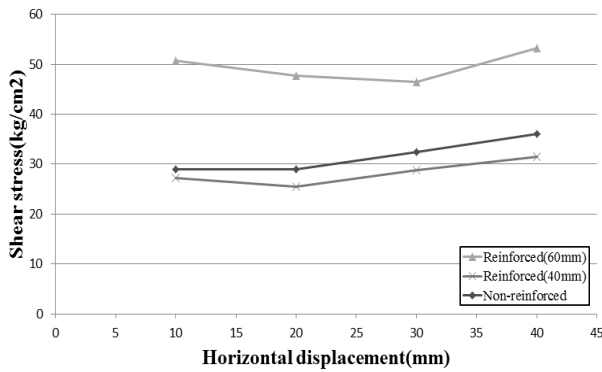


Fig. 10. Results of DEM for Ballast Material Greater than 25 mm Particle Size

물성치는 앞절에서 산출한 물성치를 동일하게 적용하였으며, 도상자갈에 대한 물성치만 보정한 것임을 밝힌다.

또한 Fig. 9와 같이 동일한 지오그리드 물성치를 적용한 리브 길이가 60 mm인 지오그리드를 모형화 하여 자기 다른 격자 크기를 가진 지오그리드와 도상재료 입자와의 상관관계를 비교하였다.

4.3 수치해석 결과

4.3.1 25 mm이상 입도분포 결과

Fig. 10은 25 mm이상의 입도분포를 가지는 도상재료에서 지오그리드 보강 전 후 수평변위 10, 20, 30, 40 mm일 때의 전단응력을 비교한 그래프이다. 지오그리드를 보강하지 않은 재료 자체가 가지는 전단응력과 격자 크기가 다른 2종류의 지오그리드를 각각 보강했을 때의 결과를 비교한 결과 60 mm리브의 지오그리드를 보강한 경우가 가장 큰 전단응력을 가지는 것으로 나타났으며, 40 mm리브의 지오그리드로 보강한 경우는 보강하지 않은 상태의 전단응력보다 낮은 전단응력을 보였으며, 이는 실내시험 결과와 유사한 경향을 보임을 확인하였다. 전반적으로 25 mm이상의 입도분포에서는 60 mm 리브 길이의 지오그리드에서 보강효과를 보였으며 40 mm 리브 길이의 지오그리드는 재료 자체의 전단응력을 감소시키는 결과를 보였다.

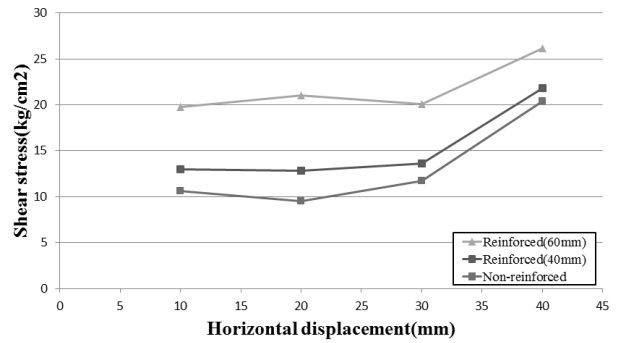


Fig. 11. Results of DEM for Ballast Material Smaller than 25 mm Particle Size



Fig. 12. Results of DEM for Ballast Material Smaller than 25 mm Particle Size

4.3.2 25 mm이하 입도분포 결과

Fig. 11은 25 mm이하의 입도분포를 가지는 도상재료에서 지오그리드 보강 전 후 수평변위 10, 20, 30, 40 mm일 때의 전단응력을 비교한 그래프이다. 25 mm이하의 도상재료 자체가 가지는 전단응력과 지오그리드로 보강된 전단응력을 비교한 결과 40, 60 mm의 리브길이를 가지는 각각의 지오그리드로 보강한 경우 모두 재료 자체의 전단응력보다 높은 전단응력을 나타내어 보강효과를 보였으며, 위의 25 mm이상의 입도분포의 결과와 마찬가지로 60 mm의 리브 길이인 지오그리드가 가장 높은 전단응력을 나타내었다. 수치해석 결과, 해당 도상재료의 보강효과는 60 mm리브 길이를 가지는 지오그리드가 상대적으로 높은 보강효율을 보였으며, 이는 추후 실내시험을 통해 검증하고자 한다.

4.3.3 지오그리드 보강 영향 범위

Fig. 12는 해석 종료 후 지오그리드 접촉면의 영향 범위를 나타낸 그림이다. 리브 40, 60 mm의 지오그리드 모두 하부 방향으로 약 30%범위의 영향 범위가 발생하여, 기존 반복하중을 모형화 하여 지오그리드의 강화효과를 연구한 결과와 같이 영향범위가

발생하는 것을 확인하였다(Chen et al., 2012). 본 연구에서의 영향범위는 직접전단 시험 특성상 지오그리드가 하부재료 상부에 거치되고 상부재료에 전단력이 발생하는 모드에 기인하여 위와같은 영향범위가 발생한 것으로 판단된다.

5. 결론 및 제언

본 논문은 직접전단 실내시험 및 개별요소 수치해석을 이용하여 철도자갈도상의 지오그리드 보강에 대한 상관관계에 대해 연구한 것으로 다음과 같은 결론 및 제언을 정리한다.

- (1) 직접전단 시험은 대상재료의 보강재료의 접촉면의 결속력을 직접적으로 모사할 수 있으므로, 자갈도상과 지오그리드의 상관관계를 파악하기 위해 적합한 실험방법으로 판단된다.
- (2) 실험 결과 동일한 인장강도를 갖는 지오그리드 적용 시 격자 크기와 자갈도상의 입도분포와의 상관관계가 있음을 확인하였다.
- (3) 개별요소법을 이용한 수치해석을 통해서 유한 요소해석에 비해 실제 지오그리드 모델링을 할 수 있었으며, 특히 수직강성 값이 미시물성치를 산정하는데 가장 영향력 있는 인자임을 확인하였다.
- (4) 격자 크기가 다른 지오그리드를 모델링하여 자갈 도상 입도분포에 따른 직접전단 실험을 모사한 결과, 지오그리드 격자 크기가 60 mm인 경우 자갈도상 보강에 더욱 효과적임을 확인하였고, 본 연구에 사용된 자갈도상의 평균입경 크기인 25 mm 대비 지오그리드 격자크기가 최소 2배 정도 큰 경우 보강효과가 있음을 확인하였으며, 추후 실내시험을 통해서 이를 검증하고자 한다.
- (5) 또한, 개별요소 수치해석 결과 지오그리드와 대상재료간의 거동 영향범위를 확인할 수 있었으며, 이는 현장 적용 시 고려함으로써 보다 보강효과를 증진할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국교통대학교 2014년도 교내학술진흥사업에 의해 수행되었으며 이에 감사드립니다.

References

- Cheng Chen, G., McDowell, R. and Thom, N. H. (2012). "Discrete element modelling of cyclic loads of geogrid-reinforced ballast under confined and unconfined conditions." *Geotextiles and Geomembranes* 35, pp. 76-86.
- Indraratna, B., Shahin, M. A. and Salim, W. (2005). "Use of geosynthetics for stabilizing recycled ballast in railway track substructures." *Proceedings of NAGS2005/GRI19 Cooperative Conference*, USA, North American Geosynthetics Society, pp. 13-15.
- Itasca (2003). Particle Flow Code in Three Dimensions. Itasca Consulting Group. Inc. Minnesota.
- Kwan, C. C. (2006). *Geogrid reinforcement of railway ballast*, Ph.D. thesis. The University of Nottingham.
- Lu, M. and McDowell, G. R. (2006). Discrete element modeling of ballast abrasion, *Geotechnique*, Vol. 56, No. 9, pp. 651-655.
- Mishra, D., Kazmee, H., Tutumluer, E., Pforr, J., Read, D. and Gehring, E. (2013). "Characterization of railroad ballast behavior under repeated loading: Results from New Large Triaxial Test Setup. Transportation Research Record." *Journal of the Transportation Research Board*, (2374), pp. 169-179.
- Oh, J. H. (2013). "Parametric study on geogrid-reinforced track substructure." *IJR International Journal of Railway*, Vol. 6, No. 2, pp. 59-63.
- Pi, J. H. (2015). *Evaluation of Geogrid-Reinforced Track Substructure Effectiveness Using a Laboratory Test and Discrete Element Method*, Ms. Thesis, Korea National University of Transportation.
- Potyondy, D. O. and Cundall, P. A. (2004). "A bonded-particle model for rock." *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 41, pp. 1329-1364.