

비선형 진동계 정규모드의 수치적 계산 연구

Research on Numerical Calculation of Normal Modes in Nonlinear Vibrating Systems

이 경 현[†] · 한 형 석^{*} · 박 성 호^{*} · 전 수 홍^{*}

Kyoung-Hyun Lee, Hyung-Suk Han, Sungho Park and Soohong Jeon

(Received August 12, 2016 ; Revised September 26, 2016 ; Accepted September 26, 2016)

Key Words : Nonlinear Vibration(비선형 진동), Numerical Analysis(수치해석)

ABSTRACT

Nonlinear normal modes(NNMs) is a branch of periodic solution of nonlinear dynamic systems. Determination of stable periodic solution is very important in many engineering applications since the stable periodic solution can be an attractor of such nonlinear systems. Periodic solutions of nonlinear system are usually calculated by perturbation methods and numerical methods. In this study, numerical method is used in order to calculate the NNMs. Iteration of the solution is presented by multiple shooting method and continuation of solution is presented by pseudo-arclength continuation method. The stability of the NNMs is analyzed using Floquet multipliers, and bifurcation points are calculated using indirect method. Proposed analyses are applied to two nonlinear numerical models. In the first numerical model nonlinear spring-mass system is analyzed. In the second numerical model Jeffcott rotor system which has unstable equilibria is analyzed. Numerical simulation results show that the multiple shooting method can be applied to self excited system as well as the typical nonlinear system with stable equilibria.

1. 서 론

비선형시스템의 진동응답은 선형시스템과 달리 공진 현상이 매우 복잡하다. 비선형시스템의 공진주파수는 응답의 크기에 따라 주파수가 변하기도 하며 안정도도 달라지기도 한다. 따라서 비선형시스템을 정확하게 이해하기 위해서는 먼저 자유진동 방정식의 주기해(periodic solution)를 도출하고 분석해야 한다. 비선형 시스템의 주기해를 도출하고 분석하는 연구는 비선형 정규모드(nonlinear normal modes, NNMs)를

통해 많은 연구자들로부터 연구되고 있다.

비선형 정규모드는 2자유도 비선형 시스템에서의 동기화된 운동으로 Rosenberg⁽¹⁾에 의해 처음 제안되었다. Rand⁽²⁾는 Rosenberg의 이론을 좀 더 발전시켜 비동기화된 2자유도 비선형 진동에도 정규모드 개념을 적용하였다. 이 비선형 정규모드 이론을 수학적으로 좀 더 정교화하기 위해 Pak^(3,4)은 존재성 및 내부공진에 대한 이론적 연구를 수행하였다. Vakakis⁽⁵⁾는 비선형 정규모드를 속도-변위 평면에서의 곡선으로 정의 하여 비선형 정규모드의 국지화(localization)를 연구하였다. Shaw와 Pierre⁽⁶⁻⁸⁾은

† Corresponding Author; Member, DTaQ
E-mail : leekh@dtaq.re.kr
* Member, DTaQ

A part of this paper was presented at the KSNVE 2016 Annual Spring Conference

‡ Recommended by Editor Jae Hung Han

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

center manifold 이론을 이용하여 비선형정규모드를 정의하였다. Pierre의 이론은 Galerkin method와 같은 방법으로 다자유도계의 비선형 정규모드를 수치적으로 구할 수 있다는 장점이 있지만 평형점 (equilibria) 으로부터 멀어지는 높은 에너지 레벨에서는 정확도가 떨어지는 단점이 있다. Peeters⁽⁹⁾는 비선형 정규모드를 비선형 시스템에서의 주기해로 정의하고 수치해석적 방법을 통해 비선형 정규모드를 도출하였다. Peeters의 방법은 다자유도계에 적용이 가능하며 높은 에너지 레벨까지도 확장이 가능하지만 불안정한 주기해에 대해서는 수치적 오류가 증가하는 단점이 있다. 그리고 감쇠가 존재하는 경우 수치적으로 주기해를 도출할 수 없다는 한계가 있다.

일반적으로 해밀토니안(Hamiltonian)계의 평형점 (Equilibria)의 안정도 해석은 야코비안(Jacobian) 행렬의 고유치를 통해 해석되며, 평형점이 불안정한 경우 그 시스템을 자력진동계(self-excited system)라 한다. 이러한 자력 진동계에서 안정적인 주기해를 찾는 것은 시스템의 최종응답을 유추할 수 있어 매우 중요하다. 하지만 자력진동계의 주기해를 찾는 연구는 1자유도계 방정식인 Van der Poll⁽¹⁰⁾시스템 외에는 그 연구가 미흡하다. 그 이유는 주기해의 도출이 섭동(perturbation) 기법인 다축적법(method of multiple scales)⁽¹¹⁾ 또는 평균법(method of averaging)⁽¹²⁾을 통해 이루어지는데 이 방법은 다자유도계 시스템에서는 적용에 한계가 있다.

이 논문에서는 Peeters의 비선형 정규모드에 대한 계산 방법을 발전시켜 다자유도 자력진동계에서의 주기해를 도출하는 방법을 제안하고자 한다. 먼저 불안정한 시스템에서의 수치적 오류를 줄이기 위해 multiple shooting method를 적용하여 비선형 정규모드를 계산하는 방법을 제안하였다. 그리고 Floquet 이론을 통해 비선형 정규모드의 안정도를 분석하고, bifurcation 분석을 수행하였다. 마지막으로 제안된 비선형 정규모드 연구는 두 가지 수치해석 예제에 적용되었다. 첫 번째 예제에서 multiple shooting method를 2자유도계 스프링-질량 시스템에 적용하여 비선형 진동계의 일반적인 특징들을 분석하였다. 그리고 두 번째 예제에서는 자력진동이 일어나는 회전계를 다뤄 다자유도 자력진동계에서의 수치적 주기해 도출 방법의 가능성을 제시하였다.

2. 비선형 정규 모드

2.1 비선형 정규 모드의 정의

일반적으로 N 개의 자유도를 갖는 해밀토니안 계의 선형 진동 방정식의 해는 고유치 문제의 해로부터 진동방정식의 해를 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2N} \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2N \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{2N} a_i \mathbf{v}_i$$

여기서 \mathbf{A} 는 1차 연립 상미분방정식을 정의 하는 행렬, \mathbf{x} 는 방정식의 일반해, \mathbf{v}_i 는 i 번째 선형시스템의 고유벡터, λ_i 는 i 번째 고유치이다. 선형시스템의 일반해는 고유벡터를 이용하여 식 (1)의 마지막항과 같이 선형합으로 표현할 수 있다. 반면 비선형 진동시스템의 경우 고유벡터를 이용하여 일반해를 선형적으로 표현할 수 없다.

비선형 진동계에서 주기함수에 대한 분석을 수행하기 위해서는 먼저 시스템의 평형점에 대한 해석이 필요하다. 비선형 동역학에서 평형점은 진동계의 수학적 해석에 있어서 매우 중요하다. 평형점이란 아래 식 (2)와 같은 지배방정식을 갖는 비선형 진동계에서 모든 시간 미분항이 0이 되는 점을 말한다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \bar{\mathbf{F}}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^{2N} \\ \bar{\mathbf{F}} &= [\bar{F}_1; \bar{F}_2; \dots; \bar{F}_{2N}] \\ \xi &= [\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_{2N}] \end{aligned} \tag{2}$$

이를 수식으로 표현하면 식 (3)과 같다.

$$\bar{\mathbf{F}}(\xi_f) = \mathbf{0} \tag{3}$$

평형점 근처에서 비선형 진동시스템의 거동은 평형점 선형화된 방정식과 유사한 거동을 갖는다. 야코비안 행렬의 고윳값 중 실수부가 양수가 있을 경우 그 진동계는 발산하는 자력진동계이다. 고윳값이 모두 순허수인 경우는 우리가 흔히 다루는 선형진동시스템의 연장선상에서 진동계의 주기함수를 생각할 수 있다.

이 논문에서는 비선형 진동 모드를 Peeters⁽⁹⁾와

같이 진동 시스템에서의 주기함수로 정의하고자 한다. 비선형 진동계에서 주기하는 먼저 평형점 근처에서 선형모드로부터 시작하여 반복법(iteration method) 및 연속법(continuation method)을 사용하여 수치적으로 도출 될 수 있다. 이에 대한 자세한 설명은 다음 절에서 하고자 한다.

2.2 비선형 진동 모드의 계산

(1) Single shooting method

Single shooting method⁽¹²⁾는 일반적으로 미분방정식의 주기해를 찾기 위한 사용되는 수치해석 기법이다. 주기가 T 인 주기함수는 다음과 조건을 만족하는 함수로 정의 할 수 있다.

$$\xi(t) = \xi(t + T) \tag{4}$$

이를 이용하면 주기함수를 구하는 문제는 경계 값 문제를 푸는 것과 동일하다. 경계 값 문제는 shooting 함수 S 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S(\xi_0, T) = \xi(\xi_0, T) - \xi_0 = 0 \tag{5}$$

ξ_0 는 주기함수에서의 한점을 말한다. 주기함수의 점은 특정시간 에서 유일하지 않고 폐곡선을 그리고 있기 때문에, 한점으로 주기함수를 정의하기 위해서는 추가적인 위상함수의 정의가 필요하다. 위상함수를 아래와 같이 정의 하면

$$p(\xi_0) = \xi_{0i} \tag{6}$$

이 연구에서의 위상함수인 식 (6)은 i 번째 자유도의 변위 성분이 0이 되도록 설정하였다. 비선형방정식인 식 (5)의 주기해는 아래와 같이 Newton-Rapson method와 유사한 반복법 행렬을 이용해 도출된다. 반복법행렬과 식 (5)의 우항의 오차항을 이용하면 주기해 도출을 위한 해의 수정 벡터 $[\Delta\xi_0; \Delta T]$ 를 도출 할 수 있다. 주기해를 도출하기 위해서는 이 수정작업을 허용오차수준을 만족할 때까지 반복 수행해야 한다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S(\xi_0, T)}{\partial \xi_0} & \frac{\partial S(\xi_0, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial p(\xi_0)}{\partial \xi_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\xi_0 \\ \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S(\xi_0, T) \\ -p(\xi_0) \end{bmatrix} \tag{7}$$

위 식의 S 의 T 및 ξ_0 에 대한 미분항은 아래와 같이 다시 표현 할 수 있다.

$$\frac{\partial S}{\partial T}(\xi_0, T) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \Big|_{t=T} = \bar{F}(\xi_0, T) \tag{8}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_0}(\xi_0, T) = \frac{\partial \xi(\xi_0, T)}{\partial \xi_0} \Big|_{t=T} - \mathbf{I} \tag{9}$$

$\frac{\partial \xi(t, \xi_0)}{\partial \xi_0} \Big|_{t=T}$ 는 아래의 초깃값 문제의 해를 통해 구할 수 있으며, 이는 monodromy 행렬(\mathbf{M})이라 불린다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left(\frac{d}{dt} \xi(\xi_0, T) \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_0} (\bar{F}(\xi(\xi_0, T))) \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_0} (\xi(\xi_0, T)) \right] &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} \Big|_{\xi(\xi_0, T)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_0} (\xi(\xi_0, T)) \right] \\ \frac{\partial}{\partial \xi_0} (\xi(\xi_0, T)) \Big|_{t=0} &= \mathbf{I} \end{aligned} \tag{10}$$

(2) Multiple shooting method

Single shooting method는 보통 해가 불안정할 경우 주기함수를 찾는데 실패하는 경우가 많다. 이를 극복하기 위해 다른 수치적인 방법이 고안되었다. 시간을 유한요소법과 유사하게 잘게 나눠 적분을 수행하는 구간을 최소화 하는 방법이다. 이 방법은 응용수학분야에서 Keller⁽¹³⁾에 의해 최초로 수행되었으며 multiple shooting method라 칭한다. 이 논문에서는 multiple shooting method를 통해 불안정한 비선형계에서의 수치적 오류를 최소화 하고자 한다.

s_i 는 1을 다음과 같이 나누는 변수라 정의 하면, 식 (11)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= s_0 < s_1 < \dots < s_{m-1} < s_m = 1 \\ \Delta s_i &= s_i - s_{i-1} \end{aligned} \tag{11}$$

비선형 정규모드의 점들은 다음과 같이 multiple shooting point 들로 표현된다.

$$\xi_i = \xi(\Delta s_i T, \xi_0), \text{ for } i=1,2,\dots,6 \tag{12}$$

이를 통해 multiple shooting 함수 \bar{S}_i 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{S}_i = \xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T) - \xi_{i-1} = 0 \tag{13}$$

Single shooting method와 동일하게 주기해를 도출할 수 있는 반복법 행렬은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{M}_{m-1} & -\mathbf{I} & & \mathbf{b}_{m-1} \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{M}_m & -\mathbf{I} & \mathbf{b}_m \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ p\xi_0 & \mathbf{0} & \cdots & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \xi_0 \\ \vdots \\ \Delta \xi_{m-2} \\ \Delta \xi_{m-1} \\ \Delta \xi_m \\ \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{S}_1 \\ \vdots \\ -\bar{S}_{m-1} \\ -\bar{S}_m \\ \xi_m - \xi_0 \\ -\partial p(\xi_0) \end{bmatrix} \tag{14}$$

여기서 \mathbf{M}_i 는 monodromy 행렬 \mathbf{M} 의 i 번째 부분이며, 아래의 single shooting method와 유사하게 초기값 문제의 해로써 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left. \frac{\partial \xi(t, \xi_0)}{\partial \xi_0} \right|_{t=T} = \mathbf{M}_m \mathbf{M}_{m-1} \cdots \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_i &= \frac{\partial}{\partial \xi_{i-1}} \left(\frac{d}{dt} \xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_{i-1}} (\bar{F}(\xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T))) \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_{i-1}} (\xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T)) \right] &= \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} \bigg|_{\xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_{i-1}} (\xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T)) \right] \\ \frac{\partial}{\partial \xi_{i-1}} (\xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T)) \bigg|_{t=0} &= \mathbf{I} \end{aligned} \tag{15}$$

i 번째 속도 벡터인 \mathbf{b}_i 는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial}{\partial T} (\xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T)) = \Delta s_i \bar{F}(\xi(\xi_{i-1}, \Delta s_i T)) \tag{16}$$

주기해는 식 (14)를 이용해 허용오차수준을 만족할 때까지 반복(iteration)을 통해 도출된다.

(3) Pseudo-arclength continuation method

j 번째 주기함수 $\mathbf{z}_{(j)}$ 가 다음 허용오차 조건 ε 을 만

족할 경우, $\mathbf{z}_{(j)}$ 는 주기함수로 판단된다.

$$\left\| \begin{bmatrix} \bar{S}_1(\xi_{0(j)}, T_{(j)}); \bar{S}_2(\xi_{1(j)}, T_{(j)}); \\ \vdots; \bar{S}_m(\xi_{m-1(j)}, T_{(j)}); p(\xi_{0(j)}) \end{bmatrix} \right\| < \varepsilon \tag{17}$$

다음 주기함수를 가리키는 방향벡터 (\mathbf{dv})는 식 (14)의 좌변항의 행렬의 고유치가 0이 되는 고유벡터로부터 구할 수 있다. 이를 통해 도출되는 다음 주기함수의 첫 번째 추측 값은 다음과 같다.

$$[tr(z_{(j+1)}^{(0)})] = [tr(z_{(j)})] + s_{(j)} \cdot \mathbf{dv}_{(j)} \tag{18}$$

여기서 $s_{(j)}$ 는 다음 주기함수를 예상하기 위한 step의 크기이다. 이 첫 번째 추측이 허용오차 조건을 만족하지 않을 경우 식 (14)를 이용하여 반복법을 수행해야 한다. Pseudo-arclength continuation법의 효과적인 계산을 위해 \mathbf{dv} 에 수직한 방향으로 수치 반복법을 수행한다. 반복법과 연속법을 반복 수행하면 비선형정규모드를 높은 에너지 레벨까지 도출할 수 있다.

2.3 비선형 정규 모드의 안정성 분석

비선형 정규모드가 선형 정규모드와 가장 큰 차이점 중 하나는 모드가 불안정 할 수도 있다는 것이다. 주기함수가 불안정 할 경우 초기조건에 아주 작은 변화에도 원래의 해로부터 큰 변화를 일으킬 수 있다. 먼저 식 (5)를 ξ_0 를 미분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\Delta \mathbf{S}(\xi_0, T) = \frac{\partial \xi(\xi_0, T)}{\partial \xi_0} \Delta \xi_0 + O(\|\Delta \xi_0\|^2) \tag{19}$$

식 (19)에서 주기함수 근방에서만 주기함수의 초기조건에 대한 민감도를 분석하기 위해 고차항을 무시하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Delta \mathbf{S}(\xi_0, T) = \mathbf{M} \Delta \xi_0 \tag{20}$$

식 (20)을 통해 주기함수의 초기조건에 대한 민감도를 알 수 있다. 이를 이용하면 비선형 정규모드의 안정성 분석은 Monodromy 행렬의 고유치를 이용하여 분석된다. 식 (15)를 통해 Monodromy 행렬을 도출한 후 고유치 문제를 통해 안정도 분석을 수행한다. Monodromy 행렬의 고윳값들은 Floquet multi-

plier라고 하며 항상 1인 값이 하나 있다. 이 Floquet multiplier를 trivial-multiplier라고 하며 그 외의 Floquet multiplier를 nontrivial-multiplier라고 한다. 비선형 정규모드의 nontrivial-multiplier의 절댓값이 1보다 큰 경우 불안정하며 그렇지 않은 경우 안정하다. 보통 불안정한 정규모드는 작은 변화에도 본래의 주기거동이 사라지기 때문에 물리적으로 실존하지 않는 모드라고 여겨진다.

2.4 비선형 정규 모드의 Bifurcation 분석

비선형 정규모드와 선형 정규모드의 또 다른 차이점 중 하나는 주기함수가 에너지 레벨의 변화를 통해 안정성이 변화 할 수 있다는 것이다. 이는 어떠한 변수의 변화에 따른 상태변화를 뜻하는 분기(bifurcation)라고 칭하는데 선형 정규모드는 응답의 진폭과 주기함수의 안정성의 상관관계가 없는 반면, 비선형 정규모드는 에너지변화에 따른 모드의 분기가 나타나기도 한다.

비선형 정규모드에서의 분기는 주기함수의 안정성 변화로부터 검출되며, 분기점은 비선형 자유진동계의 최종응답으로 나타나기도 하기 때문에 매우 중요한 요소이다. 이 연구에서는 분기점을 찾기 위해 간접적방법(indirect method)⁽⁸⁾를 사용하였다. 분기점은 안정성만 변하는 회전점(turning point)이거나 또

다른 주기함수의 줄기를 생성하는 분절점(branch point)이 되기도 한다. 분기점이 회전점 인지, 분기점 인지는 식(14)의 좌변의 행렬의 0 공간(null-space)의 크기로 판단할 수 있다. 0 공간의 크기가 1이면 회전점, 크기가 1 이상이면 추가적인 줄기를 생성하는 분절점이라고 판단할 수 있다. 분절점은 때로는 2배 주기의 해가 생기기도 하는 데, 이는 Monodromy 행렬의 고유치가 -1을 통과하며 안정성을 잃을 때 발생한다⁽⁹⁾. 이 연구에서는 주기의 배수로 형성되는 줄기는 생략하였다.

3. 수치해석 예제

3.1 스프링-질량 시스템의 비선형 정규 모드

이 연구에서 제안한 비선형 정규모드의 계산 및 분석을 수행하기 위하여 Fig. 1과 같은 비선형 스프링-질량 모델 해석을 수행하였으며, 해석에 사용된 물성치는 Table 1과 같으며 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 m_1\ddot{x}_1 + ((k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2) + k_4x_1^3 &= 0 \\
 m_2\ddot{x}_2 + ((k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Multiple shooting method를 적용하기 위해서는 먼저 2계 미분방정식을 1계 연립 미분방정식으로 변환을 해야 한다. 그러기 위해 속도성분을 다음 식과 같이 독립변수로 설정하면 쉽게 변환이 가능하다.

$$\begin{aligned}
 \xi_1 = x_1, \xi_2 = \dot{x}_1, \xi_3 = x_2, \xi_4 = \dot{x}_2 \\
 \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -2\xi_1 + \xi_3 - \xi_1^3 \\ \xi_4 \\ -2\xi_3 + \xi_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Table 1 Material properties of numerical example (spring mass system)

Symbol	Unit	Value
$m_1 = m_2$	kg	1
$k_1 = k_2 = k_3$	N/m	1
k_4	N/m ³	1

Table 2 Material properties of numerical example (Jeffcott rotor system)

Symbol	Unit	Value
I	kgm ²	5012
m	kg	1014
K_0	N/m	4.0 × 106
K_t	N/rad	2.4 × 106
Ω	r/min	0~1500
\bar{e}	m	0.0005

먼저 평형점에서의 야코비안 행렬을 이용하여 선형 진동모드를 도출해야 한다. 선형진동모드를 구하면 2개의 모드가 도출된다. 각 모드의 주기 동안 (x_1, x_2)의 응답을 도출해 보면 한 모드는 Fig. 2와 같이 x_1 과 x_2 가 대칭이며, 다른 모드는 비대칭이다.

이 선형모드로부터 비선형 정규모드를 높은 에너지레벨로 확장시키려면 식(7)에서 정의된 위상함수가 정의되어야 한다. 이 해석에서 사용된 위상함수는 수치반복과정을 통해 x_1 의 속도성분이 0이 될 수

있도록 함수를 설정하였으며 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

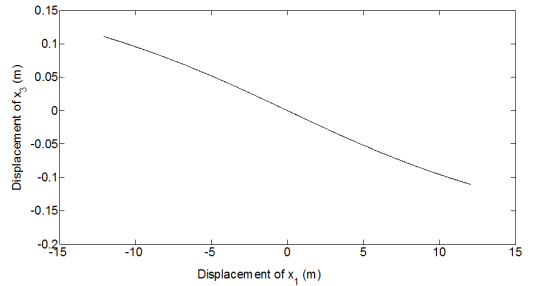
$$p(\xi) = \xi_2 \tag{23}$$

Multiple shooting method를 수행하기 위해 한 진동 주기는 총 31개의 구간으로 나뉘었으며, monodromy 행렬을 계산하기 위한 초기값 문제는 룬게 쿠타(Runge-Kutta) 방법을 이용하여 해석되었다. 각각의 진동모드는 에너지의 증가에 대한 안정도해석과 분기점의 계산이 동반되었다. 각각의 분기점에서는 먼저 0 공간을 분석한 후, 분절점에서 완전히 새로운 줄기가 생성되는지는 perturbation method⁽⁸⁾를 통해 판단하였다.

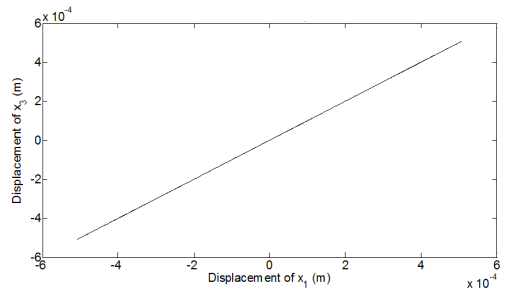
비선형 정규모드의 일반적인 표현 기법 중 하나는 에너지-주파수 표기이다. 에너지는 탄성에너지와 운동에너지의 합으로 구할 수 있으며 주파수는 수치적으로 구해진 주기로부터 얻을 수 있다.

먼저 비대칭 모드의 에너지-주파수 표기를 살펴보면 Fig. 3(a)와 같다. 비대칭 모드는 에너지가 증가함에 따라 회전점이 생성되며 주파수가 상승하는 것을 알 수 있다. 대칭모드의 경우 에너지-주파수 표기는 Fig. 3(b)와 같으며, 비대칭모드와 비교했을 때 좀 더 복잡한 성격을 보인다. 비대칭 모드의 경우 첫 번째 분기점에서 새로운 줄기가 생성되었으며 에너지 레벨이 증가함에 따라 이 줄기에서 새로운 줄기가 생성된다. 이러한 분기 현상이 두드러지는 부분에 대한 확대 그래프는 Fig. 4와 같다. 대칭모드에서의 평형점 근방에서의 응답, 첫 번째 추가적인 줄기, 두 번째 추가적인 줄기에서의 시간응답은 Fig. 5와 같다. 시간응답을 살펴보면 평형점 근방에서는 x_1 과 x_2 가 동일한 주파수로 운동을 하지만, 첫 번째 줄기에서는 2:1, 두 번째 줄기에서는 3:1의 비율의 주파수로 진동을 하고 있는 것 살펴볼 수 있다. 이는 내부공진⁽¹⁴⁾(internal resonance)이라고 하는 비선형 현상인데 이러한 내부공진으로 인하여 비선형 정

규모드는 안정도가 변하기도 하며, 새로운 주기함수 줄기가 생성되는 것을 알 수 있다.

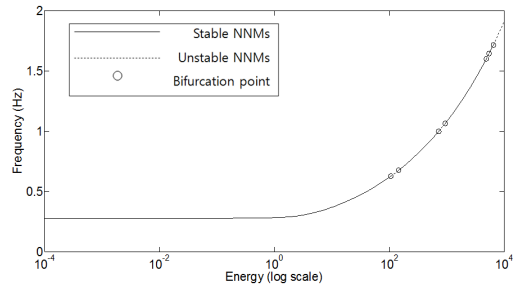


(a) Unsymmetrical mode

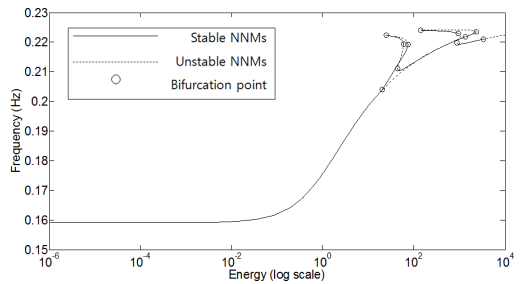


(b) Symmetrical mode

Fig. 2 (x_1, x_2) response



(a) Unsymmetrical mode



(b) Symmetrical mode

Fig. 3 Energy-frequency plot

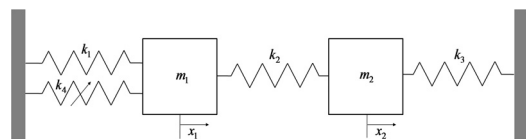


Fig. 1 Schematic representation of 2DOF nonlinear spring-mass system

3.2 비틀림-회진동 연성 회전축의 비선형 정규모드 계산

이 연구에서는 불안정한 평형점을 갖는 자러진동 계에 multiple shooting method를 적용하기 위해, 다음과 같은 제프콧로터의 비선형 진동에 대한 수치 해석을 수행하였다. 강체 베어링으로 지지되고 횡방향 강성과 비틀림 강성을 갖고, Fig. 6의 좌표계를 갖는 제프콧 로터의 운동에너지(T)와 탄성에너지(U)는 다음과 같다.

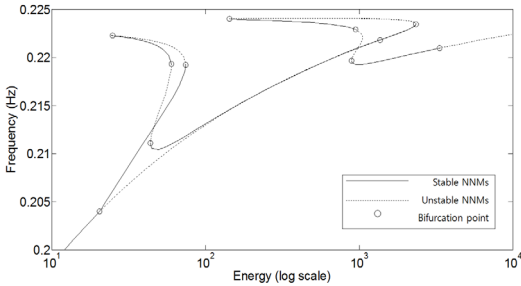
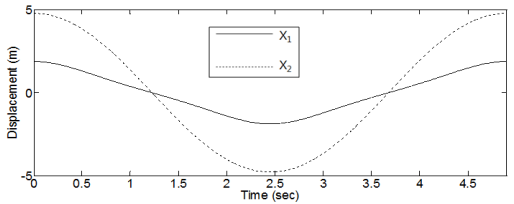
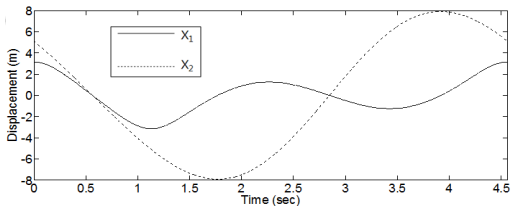


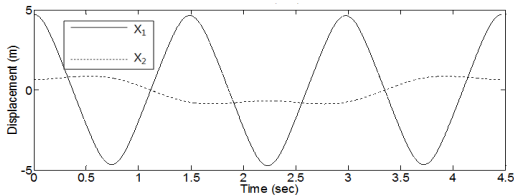
Fig. 4 Close look of bifurcation pattern of symmetrical mode



(a) Near the equilibria



(b) First branch



(c) Second branch

Fig. 5 Time response of symmetric mode

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \bar{e}^2\dot{\phi}^2 + 2\bar{e}\dot{\phi}\dot{y}\cos\phi - 2\bar{e}\dot{\phi}\dot{x}\sin\phi) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \quad (24)$$

$$U = \frac{1}{2}K_0(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}K_t\theta^2 \quad (25)$$

여기서 x_m, y_m 은 회전체의 질량 중심점의 좌표이며 m 은 질량, I 는 극 관성 모멘트는, \bar{e} 는 질량중심점의 처짐량, K_0 는 회전축의 횡방향 강성, K_t 는 비틀림 강성이다. 그리고 이 모델의 재료적 물성치는 Table 2와 같다.

이를 이용하면 Lagrangian방법을 통해 운동방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\ddot{x} + 2\omega_0\eta_0\dot{x} + \omega_0^2x - \bar{e}((\Omega + \dot{\theta})^2 \cos(\Omega t + \theta) + \ddot{\theta} \sin(\Omega t + \theta)) = 0 \quad (26)$$

$$\ddot{y} + 2\omega_0\eta_0\dot{y} + \omega_0^2y - \bar{e}((\Omega + \dot{\theta})^2 \sin(\Omega t + \theta) - \ddot{\theta} \cos(\Omega t + \theta)) = 0 \quad (27)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_t^2\theta - J(\ddot{x} \sin(\Omega t + \theta) - \ddot{y} \cos(\Omega t + \theta) + \dot{y}\dot{\theta} \sin(\Omega t + \theta) + \dot{x}\dot{\theta} \cos(\Omega t + \theta)) = 0 \quad (28)$$

위 방정식을 단순화하기 위해 회전좌표계를 다음과 같이 정의하고

$$w = (x + jy)e^{-j\Omega t}, \bar{w} = (x - jy)e^{j\Omega t} \quad (29)$$

자유진동방정식을 유도하기 위해 식 (26)~(28)의 항들을 D_1, D_2, D_3 및 행렬 $\hat{\mathbf{j}}$ 라는 새로운 변수들을 아래와 같이 정의하면

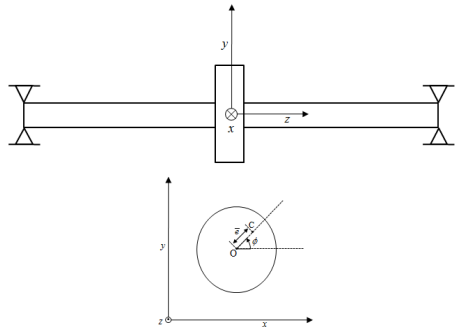


Fig. 6 Definitions of coordinate systems

$$D_1 = -(\eta_0 + 2j\Omega)\dot{w} + (\Omega^2 - \omega_0^2 - j\eta_0\Omega)w + \bar{e}(\dot{\theta} + \Omega)^2 e^{j\theta} \tag{30}$$

$$D_2 = (-\eta_0 + 2j\Omega)\dot{\bar{w}} + (\Omega^2 - \omega_0^2 + j\eta_0\Omega)\bar{w} + \bar{e}(\dot{\theta} + \Omega)^2 e^{-j\theta} \tag{31}$$

$$D_3 = \frac{J}{2j} [(\Omega^2 w - 2j\Omega\dot{w})e^{-j\theta} - (\Omega^2 \bar{w} + 2j\Omega\dot{\bar{w}})e^{j\theta}] - \frac{1}{2} [(\dot{w} + j\Omega w)e^{-j\theta} - (\dot{\bar{w}} - j\Omega \bar{w})e^{j\theta}] - \omega_l^2 \theta \tag{32}$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j\bar{e}e^{j\theta} \\ 0 & 1 & -j\bar{e}e^{-j\theta} \\ \frac{J}{2j}e^{-j\theta} & -\frac{J}{2j}e^{j\theta} & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

이를 이용하여 자유진동 방정식을 유도하면 식 (34)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\bar{w}} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{J}}^{-1} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \tag{34}$$

복소 변수로 정의된 운동방정식을 실수 변수로 변환해 주기 위해 변수 α, β 를 다음과 같이 정의하면

$$\alpha = \text{Re}(w), \beta = \text{Im}(w) \tag{35}$$

회전좌표계인 α, β, θ 좌표계에서의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\ddot{\alpha} = \text{Re}(\ddot{w}) \tag{36}$$

$$\ddot{\beta} = \text{Im}(\ddot{w}) \tag{37}$$

$$\ddot{\theta} = -J \text{Im}(e^{-j\theta} D_1) + D_3 \tag{38}$$

Multiple shooting method를 통해 이 진동계의 주기해를 도출하기 위해 먼저 ξ 를 아래와 같이 정의하고

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha, \xi_2 = \dot{\alpha}, \xi_3 = \beta \\ \xi_4 &= \dot{\beta}, \xi_5 = \theta, \xi_6 = \dot{\theta} \end{aligned} \tag{39}$$

이를 이용하여 2계 미분방정식을 1계 미분방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \tag{40}$$

$$\dot{\xi}_2 = \text{Re}\left\{ \frac{1}{1-\bar{e}J} \left[\left(1 - \frac{\bar{e}J}{2}\right) D_1 - \frac{\bar{e}J}{2} e^{2j\xi_5} D_2 - j\bar{e}e^{j\xi_5} D_3 \right] \right\} \tag{41}$$

$$\dot{\xi}_3 = \xi_4 \tag{42}$$

$$\dot{\xi}_4 = \text{Im}\left\{ \frac{1}{1-\bar{e}J} \left[\left(1 - \frac{\bar{e}J}{2}\right) D_1 - \frac{\bar{e}J}{2} e^{2j\xi_5} D_2 - j\bar{e}e^{j\xi_5} D_3 \right] \right\} \tag{43}$$

$$\dot{\xi}_5 = \xi_6 \tag{44}$$

$$\dot{\xi}_6 = \frac{1}{1-\bar{e}J} \left[-\frac{J}{2j} e^{-j\xi_5} D_1 + \frac{J}{2j} e^{j\xi_5} D_2 + D_3 \right] \tag{45}$$

식 (40)~(45)로 표현되는 미분방정식의 평형점에서 야코비안 행렬의 고유치를 구하면, 회전속도 0 r/min ~ 1500 r/min에서의 고유치의 허수부는 Fig. 8과 같다. 횡방향모드는 회전속도가 증가해 원심력의 영향으로 두개의 모드로 갈라지는 것을 볼 수 있다. 이 중 하나의 모드는 회전속도가 증가하면 주파수가 증가(mode 1)하며, 다른 하나는 회전속도가 증가하면 주파수가 감소(mode 3)하다 주파수가 0이되면 다시 가진주파수가 증가한다. 이러한 횡방향모드의 회전속도에 따른 주파수 변화를 Gyroscopic effect⁽¹⁵⁾라고 하며 이는 관성력에 의한 효과이다. 회전체 동역학에서는 관성력에 의해 공진주파수가 증가하는 모드를 backward lateral mode(mode 1), 감소하는 모드를 forward lateral mode(mode 2)라 칭한다. 진동 모드를 살펴보면 i 번째 모드의 ξ_j 값을 ψ_{ij} 라 하면, 각 진동모드의 모드 형상은 Fig. 7과 같다.

반면에 비틀림모드(mode2)는 회전속도에 따른 주파수 변화가 없는 것을 알 수 있다. 회전속도 1255 r/min ~ 1400 r/min을 좀 더 살펴보면, Fig. 9 ~ Fig. 10과 같이 두모드가 간섭을 일으켜 고유치의 실수부가 양수가 되는 지점이 생성되는 것을 알 수 있다. 해밀토니안 불안정한 평형점을 갖고 있는 경우 이를 자려진동계라 한다.

지금까지 비선형 시스템에서 자려진동이 일어날 때 그 시스템의 비선형 정규모드에 대한 연구는 다 자유도계에서 수행되지 않았다. 따라서 이 연구에서

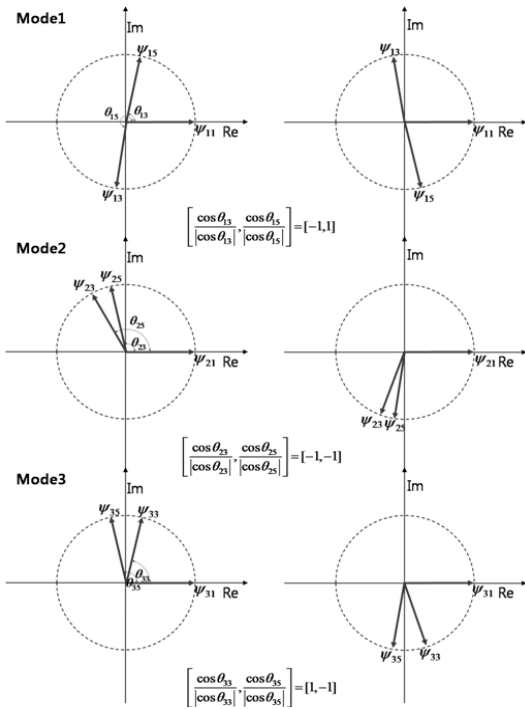


Fig. 7 Mode shape of the rotor system

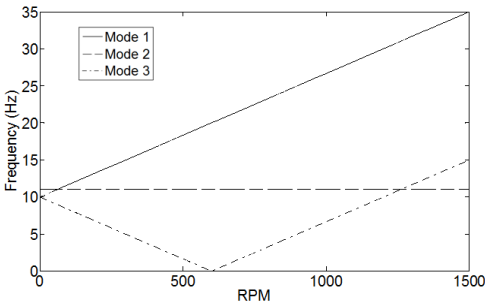


Fig. 8 Imaginary eigenvalue of the rotor system (0 r/min ~ 1500 r/min)

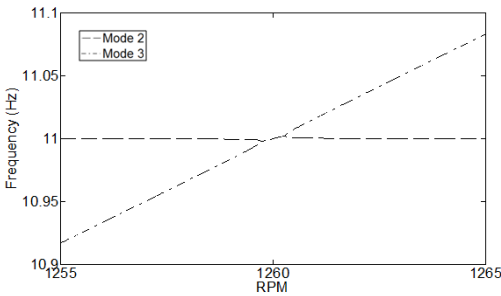


Fig. 9 Imaginary eigenvalue of rotor (1255 r/min ~ 1265 r/min)

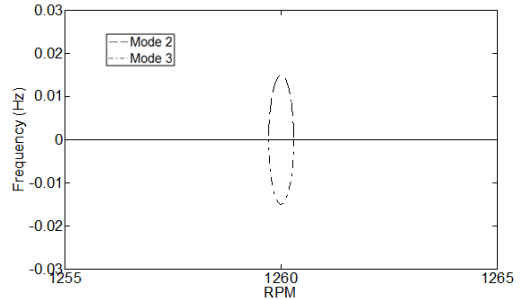


Fig. 10 Real eigenvalue of the rotor system (1255 r/min ~ 1280 r/min)

제안된 비선형 정규모드 해석방법을 3자유도 자러진동 회전체에 적용해보고자 한다.

자러진동이 일어나는 1260 r/min에서의 비선형 정규모드를 multiple shooting method를 3.1절과 동일하게 구해보면 첫 번째 횡방향 모드는 평형점 근처에서부터 높은 에너지 레벨까지 동일한 주파수의 주기해를 갖고 있다. 안정도 해석을 수행하면 평형점 근처에서는 불안정한 주기해를 갖고 있으며 진동에너지 레벨이 높아지면 Fig. 11과 같이 분기를 통해 안정적인 주기해를 갖는다. 그리고 이 자러진동계에서 비틀림모드와 두 번째 횡방향모드는 평형점 근처에서는 주기해가 존재하지 않는다. 따라서 연속법의 초기점을 높은 에너지 레벨에서 구한 후, 초기점에서 평형점을 향해 연속법을 수행하고 초기점에서 평형점 반대 방향으로도 연속법을 수행하면 Fig. 12, Fig. 13과 같이 비틀림 진동 모드 및 두 번째 횡방향 모드의 에너지-주파수 관계를 얻을 수 있다.

비틀림 진동 모드의 에너지 주파수 관계 그래프를 살펴보면 안정적인 주기해가 평형점과 분리되어 있음을 알 수 있다. 비선형 시스템에서 안정적인 주기해는 그 시스템의 attractor로 작용하여 진동의 초기조건이 이 주기해 근처에 놓이게 되면 이 주기해가 최종응답이 된다. 따라서 자러진동계에서 안정적인 주기해를 찾는 것은 매우 중요하며 이를 통해 자러진동계의 최종응답을 유추 할 수 있다.

따라서 3.3절의 수치해석 예제를 통해 비틀림진동과 횡방향 진동의 연성이 일어나면 특정 회전속도에서 횡방향 진동모드 중 하나의 모드와 비틀림모드가 간섭을 일으켜 자러진동 현상이 나타나는 것 알 수 있다. 또한 이 자러진동 시스템의 비선형 정규모드 계산을 통해 안정적인 주기해가 평형점 근처에는

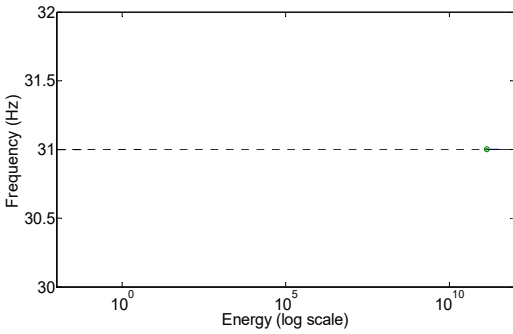


Fig. 11 Energy frequency plot of first lateral mode

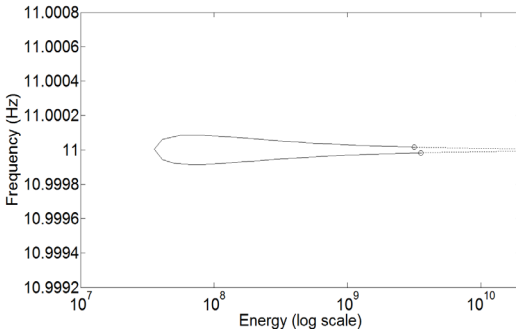


Fig. 12 Energy frequency plot of torsional mode

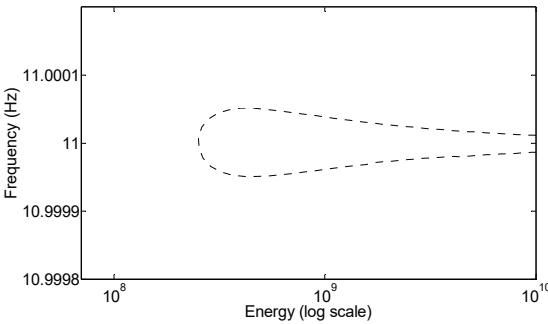


Fig. 13 Energy frequency plot of second lateral mode

존재하지 않으며 평형점과 격리된 지점에 안정적인 주기해를 갖고 있는 것을 알 수 있다. 이 해석 결과를 통해 자러진동이 발생하면 가진력과 상관없이 특정 주파수로 주기적인 진동이 발생한다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

이 연구에서는 지금까지 다루어지지 않았던 자러

진동계의 주기해 분석을 위해 비선형 진동계에 multiple shooting method를 적용하는 방법을 제안하였다. 먼저 평형점 근방에서 선형정규모드에서 시작하여 multiple shooting method와 pseudo-arclength continuation method를 이용하여 높은 에너지 레벨까지 비선형 정규모드를 확장하였다. 비선형 정규모드의 안정성 분석은 Floquet theory를 활용하여 수행되었으며, bifurcation point의 계산은 간접법을 통해 수행되었다.

수치해석 예제를 통해 비선형 정규모드는 선형 정규모드와 달리 에너지 변화에 따른 공진주파수가 달라지는 특성이 있는 것을 확인하였으며, 선형시스템에서는 나타나지 않는 분기현상을 통해 내부공진과 같은 또 다른 줄기의 주기해가 생성되는 것을 알 수 있었다. 또한 불안정한 평형점을 갖는 자러진동계에도 multiple shooting method를 적용하여 주기해를 도출하였다. 이를 통해 수치적인 방법으로 다자유도 자러진동계의 주기함수 연구에 대한 가능성을 제시하였다. 자러진동은 주로 회전하는 운동계에서 특정 회전 속도에서 나타나며, 본 논문의 내용은 회전축, 헬리콥터, 항공기 등의 안정도 분석에 활용될 수 있다.

하지만 아직 비선형 정규모드 이론은 감쇠가 고려된 복잡한 구조물에 적용하는 것에는 한계를 갖고 있다. 앞으로 좀더 복잡한 구조물에 비선형 정규모드를 적용하기 위해서는 감쇠 시스템의 주기해에 대한 연구 및 수치해석 과정에서의 오류를 감소시키는 방안에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

후 기

이 연구는 국방기술품질원 자체연구로 실시되었으며 군사보안상 문제가 없음을 확인함.

References

(1) Rosenberg, R. M., 1960, Normal Modes of Nonlinear Dual-mode Systems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, No. 2, pp. 263~268.
 (2) Rand, H. R., 1974, A Direct Method for Non-linear Normal Modes, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 9, pp. 363~368.

(3) Pak, C. H. and Rosenberg, R. M., 1968, On the Existence of Normal Mode Vibrations in Nonlinear Systems, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 26, No. 3, pp. 403~416.

(4) Pak, C. H., 2006, On the Coupling of Non-linear Normal Modes, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 41, No. 5, pp. 716~725.

(5) Vakakis, A. F., 1992, Nonsimilar Normal Oscillations in a Strongly Non-linear Discrete System, Journal of Sound and Vibration, Vol. 158, No. 2, pp. 341~361.

(6) Shaw, S. W. and Pierre, C., 1991, Non-linear Normal Modes and Invariant Manifolds, Journal of Sound and Vibration, Vol. 150, No. 1, pp. 170~173.

(7) Shaw, W. S. and Pierre, C., 1993, Normal Modes for Non-linear Vibratory Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 164, No. 1, pp. 85~124.

(8) Shaw, W. S. and Pierre, C., 1994, Normal Modes of Vibration for Non-linear Continuous Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, No. 3, pp. 319~347.

(9) Peeters, M. et al, 2009, Nonlinear Normal Modes, Part II: Toward a Practical Computation Using Numerical Continuation Techniques, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 23, No. 1, pp.195~216.

(8) Seydel, R., 2009, Practical Bifurcation and Stability Analysis, Vol. 5. Springer Science & Business Media.

(9) Kuznetsov, Y. A., 2013, Elements of Applied Bifurcation Theory, Vol. 112. Springer Science & Business Media.

(10) Enns, R. H. and George, M., 1997, Van der Pol Limit Cycle, Laboratory Manual for Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers.

(11) Brackbill, J. U. and Cohen, B. I., 2014, Multiple Time Scales, Academic Press.

(12) Wirkus, S. and Richard, R., 2002, The Dynamics of Two Coupled Van der Pol Oscillators with Delay Coupling, Nonlinear Dynamics, Vol. 30, No. 3, pp. 205~221.

(13) Keller, B. H., 1968, Numerical Methods for Two-point Boundary-value Problems.

(14) Pak, C. H., et al, 2007, One to One Resonance of Nonlinear Cantilever Beam, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering,

Vol. 17, No. 1, pp. 48~54.

(15) Vance, J., Zeidan, F. and Murphy, B., 2010, Machinery Vibration and Rotor Dynamics, John Wiley & Sons, New Jersey.



Kyunghyun Lee received a B.S. and M.S. in Naval Architecture and Ocean Engineering from Seoul National University in 2008 and 2011 respectively. Mr. Lee is currently a Researcher at Defense Agency for Technology and Quality,

Busan, Korea.



HyungSuk Han received a B.S. in Production and Mechanical Engineering from Pusan National University in 1996. He then went on to receive his M.S. and Ph.D. degrees in Mechanical Engineering from Pusan National University in

1998 and 2007, respectively. Dr. Han is currently a Senior Researcher at Defense Agency for Technology and Quality, Busan, Korea.



Sungho Park received a B.S. in Mechanical Engineering from Hanyang University in 2010 and received a M.S. in Mechanical Engineering from KAIST in 2013. Mr. Park is currently a Researcher at Defense Agency for Technology and Quality, Busan, Korea.



Soohong Jeon received a B.S. in Production and Mechanical Engineering from Pusan National University in 2007. He then went on to receive his M.S. and Ph.D. degrees in Mechanical Engineering from Pusan National University in

2009 and 2014, respectively. Dr. Jeon is currently a Senior Researcher at Defense Agency for Technology and Quality, Busan, Korea.